LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

ENCYCLOPÉDIE
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (PREMIER VOLUME),

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

Abréviations.

Dans les publications de l'académie des sciences de Paris, **H.** signifie **Histoire** **M.** signifie mémoires.

I_3 = renvoi au tome premier; troisième volume.

(I 2, **19**) = renvoi au tome premier, article 2, numéro **19**.

Dans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du même article.

(2) 8 (1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

La transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

En particulier *č* se prononce *tch*, *c* se prononce *tz*, *š* se prononce comme *ch* dans *chat*, *ž* se prononce comme notre *j* dans *je*, *j* se prononce comme notre *y* dans *essayer*.

Abh. = Abhandlungen.
Acad. = Academie.
Accad. = Accademia.
Akad. = Akademie.
Alg. = Algèbre, Algebra.
Allg. = Allgemeine.
Amer. = American.
Ann. = Annalen, Annales, Annali.
Anw. = Anwendung.
appl. = appliqué.
arit. = aritmetica.
arith. = Arithmetik, arithmétique.
assoc. = association.
Aufs. = Aufsätze.
Avanc. = Avancement.
Ber. = Berichte.
Bibl. Congrès = bibliothèque du Congrès.
Bibl. math. = Bibliotheca mathematica.
Brit. = British.
Bull. = Bulletin.
Bull. bibl. = Bulletino bibliografico.
cah. = cahier.
Cambr. = Cambridge.
car. = carton.
cf. = comparez.
chap. = chapitre.
chim. = chimie, chimique.
circ. = circolo.
circul. = circular.
col. = colonne.
Comm. = Commentarii.
Commentat. = Commentationes.
Corresp. = Correspondance.
C. R. = Comptes rendus.
déf. = définition.
Denkschr. = Denkschriften.
Diss. = Dissertation.
Ec. = Ecole.
éd. = édité à, édité par, édition.
Edinb. = Edinburgh.
Educ. = Educational.
elem. = elementare.
élém. = élémentaire.
ex. = exemple.
extr. = extrait.
fasc. = fascicule.
fig. = figure.
fis. = fisica.
fol. = folio.
Géom. = Géométrie.
Ges. = Gesellschaft.
Gesch. = Geschichte.
Giorn. = Giornale.
Gött. = Göttingen, Göttingue.
Gymn. = Gymnasium.
Hist. = Histoire.
id. = idem, ibidem.
imp. = imprimé.
inscr. = inscription.
inst. = institution.
interméd. = intermédiaire.
intern. = international.
introd. = introduction.
Ist. = Istituto.
J. = Journal.
Jahresb. = Jahresbericht.
Lehrb. = Lehrbuch.
Leop. = Leopoldina.
Lpz., Lps. = Leipzig.
Mag. = Magazine.
Méc. = Mécanique.
med. = medicinisch.
Mém. = Mémoire.
métaph. = métaphysique.
Mitt. = Mitteilung.
Monatsh. = Monatshefte.
Monatsb. = Monatsberichte.
ms., mss. = manuscrit, manuscrits.
Nachr. = Nachrichten.
nat. = naturelle.
naturf. = naturforschende.
naturw. = naturwissenschaftlich.
norm. = normale.
nouv. = nouveau, nouvelle.
num. = numérique.
numism. = numismatique.
Op. = Opera.
Opusc. = Opuscule.
Overs. = Oversight.
p. = page.
p. ex., par ex. = par exemple.
partic. = particulier.
Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
philol. = philologie.
philom. = philomatique.
philos. = philosophique.
phys. = physique.
pl. = planche.
polyt. = polytechnique.
pontif. = pontificia.
posth. = posthume.
Proc. = Proceeding.
progr. = programme.
prop. = proposition.
publ. = publié.
Quart. = Quarterly.
R. = reale, royal.
Recent. = Recentiores.
Rendic. = Rendiconto.
réimp. = réimprimé.
sc. = sciences.
Schr. = Schriften.
scient. = scientifique.
s. d. = sans date.
sect. = section.
Selsk. = Selskabs.
sign. = signature.
Sitzgsb. = Sitzungsberichte.
s. l. = sans lieu.
spéc. = spéciale.
suiv. = suivante.
sup. = supérieure.
suppl. = supplément.
soc. = société.
theor. = theoretische.
trad. = traduction.
Trans. = Transactions.
Unterh. = Unterhaltung.
Ver. = Vereinigung.
Verh. = Verhandlung.
Vetensk. = Vetenskabs.
Viertelj. = Vierteljahresschrift.
vol. = volume.
Vorles. = Vorlesung.
Wiss. = Wissenschaft, wissenschaftlich.
Z. = Zeitschrift.

ENCYCLOPÉDIE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (PREMIER VOLUME),

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques.

Réimpression autorisée de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées,* publiée par fascicules entre 1904 et 1916 par Gauthier-Villars et B.G. Teubner.

La publication de l'édition française a été définitivement interrompue en 1916 en raison de la guerre.

Cette réédition a été réalisée avec des volumes obligeamment prêtés par les Bibliothèques de l'École Normale Supérieure, de l'École Polytechnique et du Conservatoire National des Arts et Métiers.
De précieuses épreuves, aimablement confiées par M. Jean-Luc Verley, Maître de conférences à l'Université de Paris VII, ont permis de compléter l'article *Fonctions analytiques* écrit par W.F. Osgood, P. Boutroux et J. Chazy, et de terminer l'article *Développements concernant l'hydrodynamique* écrit par A.E.H. Love, P. Appell, H. Beghin et H. Villat.
Nous sommes particulièrement reconnaissants à la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré, ainsi qu'à Mlle Karine Chemla, Chercheur au C.N.R.S., de nous avoir fourni de très utiles renseignements bibliographiques.
Nous adressons à tous nos plus sincères remerciements.

Tome III, volume 1 ISBN 2-87647-110-8
ISSN 0989-0602

ENCYCLOPÉDIE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (PREMIER VOLUME),

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

FRANÇOIS MEYER,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE KÖNIGSBERG.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG,
B. G. TEUBNER

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TABLE DES MATIÈRES
des 7 premiers Tomes

* *La fin de l'article n'a pas été publiée en raison de la guerre.*

III 1. PRINCIPES DE LA GEOMÉTRIE.

EXPOSÉ PAR **F. ENRIQUES** (BOLOGNE).

Introduction.

1. Considérations générales sur les recherches mathématiques concernant les principes de la géométrie. Toutes les études critiques qui ont été faites jusqu'ici des principes de la géométrie sont intimement liées au développement systématique de la géométrie envisagée comme une science déductive.

Dans les fondements de la géométrie, tels qu'ils sont exposés dans *Euclide*[1]), on distingue trois sortes de propositions:

1°) Les *définitions* (ὅροι) qui, à vrai dire, nous apparaissent aujourd'hui comme de simples *descriptions*, mais qui, souvent, renferment de plus en elles des propositions fondamentales: il suffit de citer, à cet égard, la quatrième définition du livre 5 qui contient implicitement le *postulat d'Archimède* [n° **13**];

2°) Les *axiomes* (κοιναὶ ἔννοιαι) et les *postulats* (αἰτήματα).

Entre ces deux sortes de propositions fondamentales existent des différences qu'au 5ième siècle de notre ère *Proclus*[2]) envisage en les réduisant aux trois points de vue suivants:

a) Les postulats jouent par rapport aux axiomes le même rôle que les problèmes de construction par rapport aux théorèmes.

Par les postulats on affirme la possibilité d'effectuer certaines constructions premières, les autres constructions se ramenant toujours à celles-là. Par les axiomes on admet que certaines figures, dont on a obtenu la construction par postulat ou démonstration, jouissent de propriétés que d'ailleurs on ne démontre pas.

---

1) Voir en particulier l'édition critique d'*Euclide*, Elementa, livre 1; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 2/11.

2) *Procli* Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, éd. *G. Friedlein*, Leipzig 1873, p. 178.

b) Les axiomes expriment des propriétés relatives à des grandeurs mathématiques quelconques, de telle sorte que leur application embrasse un domaine plus étendu que celui de la seule géométrie.

Les postulats traduisent uniquement des propriétés géométriques.

c) Un axiome a une valeur propre (καθ' ἑαυτά). La vérité qu'il exprime dépend seulement des concepts figurant dans son énoncé. *C'est, au sens de *I. Kant*, un *jugement analytique.**

Au contraire, la proposition que formule un postulat n'est pas seulement une conséquence logique des définitions. *Au sens de *I. Kant*, elle constitue un *jugement synthétique* et ajoute quelque chose aux notions qui la concernent.*

Dans les recherches actuelles sur les principes de la géométrie on n'attache plus aucune importance à la distinction entre axiomes et postulats qu'établit le point de vue (*c*). *On trouve dans les axiomes d'*Euclide*, aussi bien que dans ses postulats, des jugements synthétiques. C'est pourquoi on ne fait plus généralement usage que du seul mot de *postulat*[3]) pour désigner ces deux sortes de propositions[4]).*

3°) Les *propositions non exprimées*, qui sont obtenues immédiatement par intuition, comme par exemple celles qui se rapportent à l'ordre de succession des points sur une ligne, à l'illimité de la droite, etc.

Au demeurant, pour porter un jugement équitable sur les fondements de la géométrie tels qu'*Euclide* les a conçus[5]) au $3^{\text{ième}}$ siècle avant notre ère, il ne faut pas oublier qu'il y a incertitude[6]) au sujet des interpolations faites avant Théon d'Alexandrie dans le texte des Éléments[7]).

Quoi qu'il en soit, les principes de la géométrie euclidienne

---

3) Cf. *G. Vailati*, Verhandl. des 3^{ten} internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, publ. par *A. Krazer*, Leipzig 1905, p. 575; *H. G. Zeuthen*, id. p. 540.

4) Dans cet article nous entendrons par *postulats* les propositions qui expriment des relations que l'on admet avoir lieu entre les notions fondamentales sur lesquelles repose toute la géométrie.

5) *Voir par ex. *P. Tannery*, Bull. sc. math. (2) 8 (1884), p. 162/75; *J. L. Heiberg* dans *Euclide*, Opera 5, Leipzig 1888, Prolegomena critica, p. LXXXVIII à p. XCIII (Note de *G. Eneström*).*

6) *D'après quelques historiens [voir en particulier *P. Tannery*, Bull. sc. math. (2) 8 (1884), p. 167/8, 173/4] plus d'un des principes qui figurent dans les textes actuels n'existait pas dans l'oeuvre originale.*

7) *On sait cependant qu'*Apollonius* s'est occupé de la démonstration du premier des axiomes d'*Euclide* [*Procli* Diadochi[2]), p. 183] (Note de *G. Eneström*).*

actuelle, *qui datent au moins du quatrième siècle de notre ère[8])*, ont donné lieu à de longues discussions depuis l'antiquité jusqu'à nos jours[9]). C'est surtout sur le *cinquième postulat* (le postulat des parallèles) que se sont portés les plus grands efforts critiques[10]).

Jusqu'à la fin du $18^{\text{ième}}$ siècle on a, en général, accepté sans conteste les principes de la géométrie euclidienne[11]). *Depuis le commencement du $19^{\text{ième}}$ siècle on a, peu à peu, substitué à cette façon de voir plusieurs conceptions critiques; ces conceptions sont d'ailleurs bien différentes les unes des autres.*

Les progrès de la critique moderne portent d'une part sur l'*objet* de la géométrie, d'autre part sur la *forme logique* du développement de cette science.

2. Objet de la géométrie. En ce qui concerne l'objet de la géométrie, on est amené à distinguer:

1°) *l'espace intuitif habituel*, c'est-à-dire la représentation de l'espace telle que notre esprit le conçoit;

2°) *l'espace physique* dont les propriétés nous sont données par l'expérience;

3°) les *espaces abstraits*, c'est-à-dire les conceptions plus générales que nous pouvons déduire de l'espace intuitif ordinaire par abstraction ou généralisation.

C'est la géométrie non-euclidienne, établie entre 1815 et 1830 par *C. F. Gauss*, *J. Bolyai*, *N. I. Lobačevskij*, qui conduisit à cette idée nouvelle et remarquable que l'espace physique pourrait être différent de l'image que nous en fournit notre intuition habituelle.

Toutefois à cette époque, en dehors de la géométrie euclidienne, une seule géométrie semblait possible: elle ne devait différer de celle d'*Euclide* que par son indépendance du postulat des parallèles. C'est en lui donnant ce sens précis qu'on parlait alors d'une *géométrie absolue*.

B. Riemann[12]) élargit ce point de vue dans sa célèbre Thèse sur *les hypothèses qui servent de base à la géométrie*, soutenue à Göt-

---

8) *Presque tous les manuscrits des „Elementa" que l'on possède aujourd'hui contiennent la rédaction due à *Théon* d'Alexandrie.*

9) *Au sujet des interpolations les plus anciennes concernant la partie des „Elementa" dont il s'agit ici, voir aussi *T. L. Heath*, The thirteen books of Euclid's Elements 1, Cambridge 1908, p. 50/1, 61/8 (Notes 8 et 9 de *G. Eneström*).*

10) Voir en particulier n° **14**.

11) Au $19^{\text{ième}}$ siècle encore, plusieurs géomètres, parmi lesquels il faut citer en particulier *A. Cayley*, sont d'ailleurs restés fidèles à ce point de vue dogmatique.

12) Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen [Habilitationsschrift, Göttingue 1854; Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math.

tingue le 10 juin 1854, mais qui n'a été publiée qu'après sa mort, par *R. Dedekind.*

Dans cette thèse, *B. Riemann* abandonne aussi l'hypothèse de l'illimité de la ligne droite et développe, comme l'avait d'ailleurs déjà fait avant lui *H. Grassmann*, l'idée d'une géométrie à plus de trois dimensions[13]).

C'est dans le même ordre d'idées que, dans ses mémoires, puis dans ses cours professés à l'Université de Göttingue, *F. Klein*[14]) a puissamment contribué à généraliser le concept même de la géométrie.

Peu de temps après la publication des recherches de *B. Riemann*, *H. von Helmholtz* formula, sous l'influence des doctrines empiriques de la philosophie anglaise *et aussi sous celle de ses propres recherches sur l'optique physiologique et l'acoustique,* une critique de la conception kantienne de l'espace dont la portée a été considérable. *D'après *H. von Helmholtz*, les propositions fondamentales de la géométrie correspondent à des relations physiques dont l'expérience seule peut nous fournir la connaissance.* De là sont sorties des recherches entièrement nouvelles relatives aux fondements de la géométrie[15]).

La diffusion extraordinaire des théories non-euclidiennes et le développement de ces théories effectué de diverses façons par *G. Battaglini*, *G. J. Hoüel*, *C. Flye S^te Marie*, *P. Mansion*, *J. de Tilly* et, à d'autres égards, par *E. Beltrami*, *W. K. Clifford*, *F. Klein*, *S. Lie*, *H. Poincaré* et *D. Hilbert*, pour ne citer que quelques noms, ont rendu familière la conception de la possibilité de plusieurs géométries; ils ont aussi amené une discussion plus approfondie de la valeur relative des différents postulats au point de vue expérimental.

On ne peut d'ailleurs suivre le développement récent de ces théories qu'en s'imposant de la géométrie une conception abstraite qui permette de considérer, à côté de l'espace physique, des espaces supérieurs, déduits par abstraction de la représentation intuitive habituelle de cet espace physique.

Ainsi nous apparaît, comme une construction de l'esprit tirée de l'espace intuitif habituel en faisant abstraction des notions métriques, l'espace de la géométrie projective conçu d'après le système de

p. 133; Werke, (2^e éd.), publ. par *H. Weber*, Leipzig 1892, p. 272; trad. *L. Laugel*, Paris 1898, p. 280].

13) Cf. n^os **14**, **22**, **34**.

14) Voir déjà, en particulier, son mémoire de 1872 intitulé „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" seconde partie [Math. Ann. 6 (1873), p. 112/45].

15) Voir à ce sujet n^os **39** à **42** („groupes de mouvement").

K. G. Chr. von Staudt. Tels aussi les espaces non-archimédiens[16]) de *G. Veronese* et de *D. Hilbert*[17]).

Des constructions abstraites comme ces dernières sont sans doute surtout intéressantes au point de vue psychologique *et au point de vue logique.* Elles servent avant tout, en effet, à établir la valeur respective des divers concepts géométriques[18]) et à jeter la lumière sur leur genèse[19]).

Enfin ces constructions abstraites permettent d'envisager plus largement les différentes géométries en regard d'une géométrie à développement purement formel que nous examinerons plus loin. On arrive ainsi à considérer une géométrie quelconque comme un système d'hypothèses que l'on étudie, indépendamment de tout objet physique ou psychologique, en suivant, parmi les conséquences de ce système d'hypothèses, celles qui semblent pouvoir présenter quelque intérêt mathématique.

C'est à ce point de vue que se sont placés, surtout dans leurs dernières recherches, *D. Hilbert* et ceux qui se rattachent à son école[20]).

Une des conséquences de cette liberté de construction accordée aux géomètres a été de modifier le caractère des jugements que l'on portait sur la valeur physique des postulats.

F. Klein[21]) et *H. Poincaré*[22]) ont fait remarquer que les postulats géométriques renferment quelque chose d'arbitraire relativement aux données insuffisamment déterminées par l'expérience et l'intuition. Il en résulte qu'en géométrie, comme dans toute autre science physique, on peut faire un choix entre plusieurs représentations possibles de la même réalité. *Ce choix répond, en général, d'après *E. Mach*, au besoin de faire „économie de pensée".*

*Allant plus loin, *H. Poincaré* déclare que les postulats de la géométrie ne sauraient exprimer des relations physiques, mais qu'ils constituent seulement des *conventions* d'après lesquelles on interprète les faits constatés expérimentalement. On en revient ainsi à la thèse kantienne qui nie toute réalité à l'espace.*

16) *Suivant *P. Mansion* [Ann. Soc. scient. Bruxelles 29^1 (1904/5), p. 200] ces constructions abstraites n'appartiennent pas à la géométrie (Note de *G. Loria*).*

17) *F. Klein* insiste beaucoup, dans son enseignement, sur ce caractère des espaces supérieurs. Voir surtout, à ce sujet [n^os **46** à **52**] ce qui concerne la Géométrie non-archimédienne.

18) Cf. n° **19**.

19) Cf. *F. Enriques*, Rivista filosofica (Pavia) 4 (1901), p. 171.

20) Cf. n^os **46** à **52**.

21) *Voir par ex. Math. Ann. 37 (1890), p. 571/2.*

22) *Voir par ex. Bull. Soc. math. France 15 (1886/7), p. 204; La science et l'hypothèse, Paris s. d. [1903], p. 66.*

F. Enriques[23]) critique ce point de vue nominaliste. Une analyse détaillée du sens que l'on peut donner au mot „espace“ l'amène à conclure que le nominalisme de *H. Poincaré*, aussi bien que celui de *I. Kant*, sous-entend une *conception transcendante par rapport à la réalité phénoménale.* Les propriétés géométriques ne sauraient correspondre à des relations entre les corps et l'espace conçu en dehors de ceux-ci, mais bien à des relations entre les corps eux-mêmes.

Dès lors, et conformément aux vues de *B. Riemann* et de *H. von Helmholtz*, la géométrie doit être considérée comme une branche de la physique.*

3. Forme logique du développement de la géométrie. A cet égard tout est subordonné à une nouvelle conception de la *rigueur en mathématiques*, bien supérieure à celle qui régnait autrefois.

Les progrès dans cet ordre d'idées ont été réalisés grâce surtout à la revision des fondements de l'analyse, entreprise dans la seconde moitié du 19ième siècle par *K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor, P. du Bois-Reymond, Ch. Méray, U. Dini, J. Tannery* et plusieurs autres géomètres.

Ce point de vue une fois acquis, on découvrit tout d'abord un certain nombre de postulats, non exprimés jusqu'alors, qu'on sous-entendait par intuition dans la démonstration des théorèmes. Dans cet ordre d'idées on peut, par exemple, citer le *postulat de la continuité*, dû à *G. Cantor* et à *R. Dedekind*, le *postulat d'Archimède*, sur lequel *O. Stolz* a appelé l'attention des géomètres, et les *postulats d'ordre*, dus à *M. Pasch.*

On remarqua ensuite qu'une définition, tout comme une démonstration, n'a qu'une valeur relative. On reconnut, plus généralement, que tout système de relations entre des concepts suppose des *concepts primitifs* qui ne sont aucunement définis et par lesquels on définit tous les autres.

Les postulats apparurent alors comme les énoncés de relations entre les concepts primitifs. Et l'on admit que ces relations doivent avoir encore un sens lorsque, les concepts primitifs ayant été reconnus expérimentalement, on fait *abstraction* des objets physiques ou psychologiques qu'ils désignent.

C'est conformément à ces vues que *M. Pasch*[24]) a défini le concept de la rigueur lui-même par les deux conditions que voici:

23) *Problemi della scienza, Bologne 1906, p. 261 (chap. 4); (2e éd.) Bologne 1910; dans la trad. *J. Dubois*, Les problèmes de la science et la logique, Paris 1908, le chapitre 4 n'est pas traduit; trad. allemande par *K. Grelling*, Probleme der Wissenschaft 2, Leipzig 1910.*

24) Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, p. 16.

1°) On énoncera explicitement les concepts primitifs au moyen desquels on se propose de définir logiquement tous les autres;

2°) On énoncera explicitement les propositions fondamentales (postulats) grâce auxquelles on se propose de démontrer logiquement les autres propositions (théorèmes). Ces propositions fondamentales doivent apparaître comme de pures *relations logiques* entre les concepts primitifs, et cela indépendamment de la signification que l'on donne à ces concepts primitifs.

Quoique le choix des postulats dont il a fait usage ait été dicté à *M. Pasch* par des vues psychologiques, il réalise très exactement les deux conditions que l'on vient d'énoncer: en fait, il place entièrement le fondement du développement logique de la géométrie dans les postulats.

Ce concept de la *rigueur* a depuis pénétré de plus en plus dans le domaine des recherches géométriques, principalement sous l'influence de *G. Peano*[25]), de *G. Veronese*[26]) et de *D. Hilbert*[27]). Déjà même quelques traités élémentaires de géométrie à l'usage des écoles primaires ou secondaires l'ont adopté, surtout en Italie[28]).

*Une collection de mémoires, publiés par *F. Enriques*[29]), renferme une suite de critiques approfondies ayant trait au même objet; elle n'a pas été sans exercer, elle aussi, quelque influence sur l'étude rigoureuse des principes de la géométrie.*

Au point de vue *logique abstrait*, les postulats apparaissent comme des propositions logiques arbitraires; et l'ensemble des relations logiques qu'ils énoncent constitue une définition implicite des concepts primitifs.

Comme l'a remarqué *G. Vacca*[30]) cette sorte de définition se trouve déjà dans *J. D. Gergonne*[31]).

25) I principii di geometria logicamente esposti, Turin 1889.

26) Fondamenti di geometria, Padoue 1891; trad. allemande par *A. Schepp*, Grundzüge der Geometrie, Leipzig 1894.

27) Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899; (2e éd.) Leipzig 1903; (3e éd.) Leipzig 1909. Voir aussi *F. Enriques*, Lezioni di geometria proiettiva, Bologne 1898; (2e éd.) Bologne 1904; (3e éd.) Bologne 1909.

28) *G. Veronese* et *P. Gazzaniga*, Elementi di geometria, Vérone et Padoue 1897; (2e éd.) Vérone et Padoue 1900; (3e éd.) Vérone et Padoue 1908; *G. Ingrami*, Elementi di geometria, Bologne 1899; *F. Enriques* et *U. Amaldi*, Elementi di geometria, Bologne 1903; (2e éd.) Bologne 1905; (3e éd.) Bologne 1909.

29) *Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologne 1900; éd. allemande publiée sous le titre: Fragen der Elementargeometrie 1, trad. par *H. Thieme*, Leipzig 1910; 2, trad. par *H. Fleischer*, Leipzig 1907.*

30) Revue math. [Rivista mat.] 6 (1899), p. 195.

31) Ann. math. pures appl. 9 (1818/9), p. 1/35. Voir en particulier p. 22/3:

Et maintenant, quel usage devra-t-on faire de cette liberté, qui logiquement demeure entière, de choisir à son gré les postulats?

La réponse à cette question relève de la philosophie de la science, bien plus que de la science elle-même, puisque la question ne peut être résolue qu'en portant un jugement sur la valeur relative de plusieurs choix et non sur la légitimité de tel ou tel choix.

En fait, quelques écoles géométriques récentes entendent profiter le plus largement possible de cette liberté. Telle l'école de *G. Peano* dont les recherches se rapportent à des questions d'ordre logique formel; telle aussi l'école actuelle de *D. Hilbert* qui, quoique poursuivant surtout un but essentiellement mathématique, tend vers une abstraction de plus en plus grande et s'écarte, par suite, de plus en plus des données fournies par l'intuition.

Dans cet ordre d'idées, il y a lieu de rappeler que les conditions d'une rigueur formelle ont pu, dans la plupart des cas, être exprimés par les signes de la logique mathématique. Ce système de signes dont il sera question dans le tome VIII de l'Encyclopédie a été l'objet des recherches de plusieurs mathématiciens parmi lesquels nous citerons ici *G. W. Leibniz*, *G. Peacock*, *A. de Morgan*, *G. Boole*, *H. Grassmann*, *W. R. Hamilton*, *Ch. Peirce*, *E. Schröder*, *G. Peano*, *G. Frege* et *B. A. W. Russell*.

Le symbolisme de la logique mathématique qui, depuis 1889, est devenu pour *G. Peano* un système de représentation mathématique, permet de constater, sous une forme sensible, la nécessité de l'introduction de concepts primitifs. Chacun de ces concepts s'introduit sous la forme d'un *nouveau signe* qui le représente.

Ce même symbolisme conduit aussi à une critique approfondie de la simplicité et de l'indépendance des postulats et des concepts primitifs, ainsi qu'à une critique approfondie de la compatibilité des postulats.

„si une phrase contient un seul mot dont la signification nous est inconnue, l'énoncé de cette phrase pourra suffire à nous en révéler la valeur. *Si, par exemple, on dit à quelqu'un qui connaît bien les mots *triangle* et *quadrilatère* mais qui n'a jamais entendu prononcer le mot *diagonale*, que chacune des deux diagonales d'un quadrilatère le divise en deux triangles, il concevra sur le champ ce que c'est qu'une diagonale et le concevra d'autant mieux que c'est ici la seule ligne qui puisse diviser le quadrilatère en triangles.* Ces sortes de phrases qui donnent ainsi l'intelligence de l'un des mots dont elles se composent, au moyen de la signification connue des autres, pourraient être appelées *définitions implicites*, par opposition aux définitions ordinaires qu'on appellerait *définitions explicites*. ... On conçoit aussi que ... deux phrases qui contiennent deux mots nouveaux, combinés avec des mots connus, peuvent souvent en déterminer le sens."

4. Compatibilité des postulats. En étudiant de très près le cinquième postulat d'Euclide (dans le but, auquel on a dû finalement renoncer, de le démontrer) on a reconnu qu'un postulat peut être indépendant d'autres postulats constituant un système donné, en ce sens qu'on ne peut le déduire de ce système. Partant de là on a, peu à peu, été amené à formuler les remarques suivantes:

A) Un système de postulats peut jouir d'une *indépendance ordonnée* ou d'une *indépendance absolue*. Dans le premier cas, les postulats du système étant pris dans un ordre déterminé, chacun d'eux est indépendant de ceux qui le précèdent. Dans le second cas, chaque postulat est indépendant de tous les autres, aucun ordre n'étant assigné.

B. Levi[32]) a montré que si l'on possède un système de postulats $a, b, c, \ldots$, jouissant d'une indépendance ordonnée, on peut toujours le remplacer par un autre système de postulats $a_1, b_1, c_1, \ldots$, jouissant d'une indépendance absolue.

*Pour former ce dernier système il suffit de prendre

1°) pour a_1, le postulat a;

2°) pour b_1 le postulat que voici: la proposition énoncée par le postulat b est satisfaite pour tous les éléments qui satisfont au postulat a;

3°) pour c_1 le postulat que voici: la proposition énoncée par le postulat c est satisfaite pour tous les éléments qui satisfont aux postulats a et b ou b_1; etc.*

B) Le *degré* d'indépendance des postulats $a, b, c, \ldots$ est lié à leur complexité. Moins b est simple et plus on peut s'attendre à ce que b ne soit pas tout entier une conséquence de a, mais qu'on puisse cependant déduire de a une partie de b.

Dès lors l'indépendance des postulats a une valeur d'autant plus significative que ces postulats sont plus simples. Et l'on est ainsi tout naturellement amené à se poser la question suivante:

Peut-on construire la géométrie sur un système de postulats tout à fait simples? D'après *A. Padoa*[33]), à cette question il faut répondre négativement, car toute proposition vraiment simple se ramène à la forme:

a est différent de b,

où a et b sont des entités déterminées, et il faudrait un nombre infini de propositions semblables pour remplacer n'importe quel postulat fondamental de la géométrie ordinaire.

32) Memorie Accad. Torino (2) 54 (1904), p. 283.

33) *A. Padoa*, Communication verbale faite à *F. Enriques*, en 1900.

Pour démontrer qu'une proposition a est indépendante d'un système de propositions $b, c, \ldots$ il suffit évidemment d'établir que la proposition contraire à a est compatible avec le système $b, c, \ldots$

On est ainsi amené à rechercher les *conditions de compatibilité* d'un certain nombre de *postulats*.

Pour cela on a recouru d'abord à l'interprétation analytique. On admet comme évident, ou comme déjà établi, que les théorèmes de l'arithmétique sont compatibles entre eux.

Cela posé, étant donné un système d'hypothèses géométriques, on cherche à traduire ces hypothèses sous forme analytique [on s'est d'ailleurs toujours borné à des hypothèses permettant l'usage des coordonnées]. On obtient ainsi des relations arithmétiques, et de leur compatibilité, si elle a lieu, on déduit celle des hypothèses géométriques envisagées.

Cette façon de procéder peut d'ailleurs être encore interprétée autrement:

Les nombres dont nous admettons à l'avance l'existence logique nous conduisent à la construction d'ensembles (ou de variétés) que l'on conçoit comme des *espaces abstraits*. Le fait de pouvoir définir analytiquement un tel espace abstrait nous assure que les propositions fondamentales, exprimant les propriétés de cet espace, sont logiquement compatibles, puisque toute incompatibilité entre elles entraînerait des conséquences absurdes pour le développement de l'arithmétique.

Il suffit de modifier quelque peu cette dernière idée pour parvenir au procédé plus général que voici:

On admet comme établie à l'avance la possibilité d'une certaine géométrie, par exemple la possibilité de la géométrie euclidienne; cela posé, on cherche à interpréter tout système de géométrie donné comme un système de relations entre certaines figures de cet espace. Cette interprétation, si l'on y parvient, nous assure que le système en question est fondé sur des postulats compatibles, car toute contradiction existant entre eux se retrouverait comme contradiction dans le développement de la géométrie euclidienne.

*On peut d'ailleurs appliquer le même procédé en prenant comme point de départ n'importe quel système de concepts auxquels se rapportent des postulats que nous savons compatibles entre eux. Néanmoins la démonstration logique ainsi établie a toujours un *caractère relatif*.*

Si l'on se préoccupe de la légitimité de la thèse sur laquelle repose cette façon de procéder, on est amené à se poser une suite de questions qui, au fond, sont du domaine de la théorie de la connaissance plutôt que du domaine des mathématiques. Il serait sur-

tout intéressant de savoir à l'aide de quel critère on peut reconnaître pratiquement la compatibilité logique de n'importe quel système de postulats ou d'hypothèses qu'il faut admettre *a priori* pour construire une géométrie quelconque.

Les avis sont partagés à cet égard. Pour quelques-uns ce critère est le résultat de l'expérience et de l'intuition. D'autres, et parmi eux il faut citer tout particulièrement *D. Hilbert*, pensent que la logique peut, à elle seule, établir la compatibilité des propriétés fondamentales des nombres entiers[34]).

C'est là un problème délicat qui a suggéré quelques réflexions critiques[35]).

La question de l'*indépendance des concepts primitifs* a été étudiée surtout par les géomètres italiens de l'école logique mathématique de *G. Peano*[36]). Ces géomètres ont, en particulier, cherché à réduire le nombre des concepts sur lesquels reposent les constructions géométriques (cf. nº **6**).

Étant donnés plusieurs concepts $A, B, C, \ldots$ on peut se demander si l'un d'eux, C par exemple, peut être entièrement défini au moyen des concepts A et B. Mais cette question n'a de sens qu'autant qu'on énonce les relations fondamentales supposées établies entre A, B et C.

Supposons que ces relations fondamentales $a, b, c, \ldots$ soient données sous une forme purement logique. On pourra leur donner deux acceptions différentes:

1°) une acception *concrète* les faisant considérer comme postulats fondamentaux du système de géométrie qui a pour base les concepts primitifs $A, B, C, \ldots$

2°) une acception *abstraite* qui fait envisager $A, B, C, \ldots$ comme des symboles correspondant à des objets indéterminés, lesquels pourront être fixés ultérieurement au moyen d'une convention arbitraire.

Prenons cette dernière acception abstraite de $a, b, c, \ldots$ et supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait seulement trois concepts primitifs A, B, C. Cherchons alors à interpréter de deux façons le

34) Verhandl. des 3ten internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, publ. par *A. Krazer*, Leipzig 1905, p. 174/85.

35) *Voir à ce sujet, *F. Enriques*, Problemi della scienza[23]), p. 196; trad. *J. Dubois*, Les problèmes de la science et la logique, Paris 1908, p. 190; trad. *K. Grelling*, Probleme der Wissenschaft 1, Leipzig 1910, p. 195.*

36) *Voir en particulier *M. Pieri*, I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo [Memorie Accad. Torino (2) 48 (1898), p. 1/62];* *A. Padoa*, L'enseignement math. 5 (1903), p. 85.

système abstrait envisagé, A et B conservant la même signification dans les deux interprétations, mais C prenant un sens différent dans chacune des deux interprétations adoptées, et en nous arrangeant de manière qu'une certaine proposition d, vraie dans la première interprétation, soit fausse dans la seconde. Si l'on y parvient, on aura, par cela même[37]), prouvé que le concept C est indépendant des concepts A et B, par rapport au système de postulats $a, b, c, \ldots$

5. Division de cet article. La division de cet article a été dictée par la dictinction entre les *développements élémentaires* et les *développements d'ordre plus élevé,* dans lesquels il est question du *continuum,* de la *géométrie projective* et des *déterminations métriques* en général: éléments linéaires, distances, groupes de transformation.

Ce qui caractérise le point de vue *élémentaire* c'est qu'on y rapproche immédiatement et sans s'attacher à les distinguer nettement les unes des autres, toutes les idées géométriques qui nous sont familières.

Les développements d'ordre plūs élevé impliquent non seulement l'emploi de méthodes plus approfondies de recherches, et en particulier l'emploi de toutes les ressources de l'analyse, mais encore une séparation et pour ainsi dire une hiérarchie des concepts fondamentaux. Un ordre déterminé de concepts y sert de base à un système géométrique déterminé qu'on développe dans une direction abstraite, et à ce système géométrique on subordonne ensuite les autres concepts.

Dans un dernier chapitre on a réuni les recherches nouvelles relatives à la géométrie non archimédienne. Elles reposent sur une analyse plus abstraite que celle qui avait été faite auparavant de notre concept habituel du continuum.

Questions d'ordre élémentaire.

6. Remarque préliminaire. Tout traité de Géométrie contient un exposé plus ou moins complet des principes de la géométrie élémentaire. Parmi ces principes nous n'envisageons ici que ceux qui ont un caractère général, en renvoyant le lecteur pour tout ce qui concerne plus particulièrement les questions de détail aux articles de l'Encyclopédie contenus dans le second volume du tome III.

En nous plaçant au point de vue général nous passerons ici successivement en revue les concepts du *point,* de la *droite,* du *plan,* du *segment,* de l'*angle,* le concept *situé entre,* les concepts de *coïncidence*

37) *A. Padoa* [Bibl. Congrès intern. philos. Paris 1900, 3, éd. Paris 1901, p. 309] a insisté sur ce point qu'il a particulièrement mis en évidence.

et de *mouvement,* les différentes formes du concept de *continuité* et enfin la *théorie des parallèles.*

Comme complément nous ajouterons quelques développements concernant d'une part la *théorie des proportions* telle que la concevaient les anciens, et d'autre part la *mesure des surfaces.*

7. Point, ligne et surface. Dans ses Éléments de géométrie, *Euclide*[38]) débute ainsi[39])

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν;
Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές;
. . . .
Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει;

ce qui signifie:

Un point est une chose indivisible.
Une ligne est une longueur sans largeur.
Une surface est une chose qui n'a que longueur et largeur.

Euclide ajoute que les limites de la ligne sont des points et les limites de la surface des lignes. Il procède de façon à caractériser les droites entre toutes les lignes et les plans entre toutes les surfaces comme nous le verrons un peu plus loin.

En se conformant à ces définitions d'*Euclide* on peut développer les éléments de la géométrie en suivant deux voies bien distinctes:

1°) On prend le *point* comme concept fondamental tiré, par abstraction, de l'idée que nous nous faisons d'un corps très petit; on cherche ensuite à engendrer les lignes par le *mouvement* du point, les surfaces par le mouvement des lignes, les corps (ou l'espace) par le mouvement des surfaces.

2°) On part du concept du *corps* comme fondamental et l'on envisage les surfaces comme *limites* des corps, les lignes comme limites des surfaces et les points comme limites des lignes.

Ni l'un ni l'autre de ces deux procédés ne fournit de véritable définition logique du point, de la ligne ou de la surface; on n'a, en réalité, obtenu que des données et des descriptions ayant une certaine importance d'ordre physique ou d'ordre physiologique, et rien de plus.

En ce qui concerne particulièrement le second de ces deux procédés, on peut observer que le concept de la *limite* d'un corps, ou

38) Elementa, livre 1, défin. 1, 2, 5; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 2.

39) *Les deux premières définitions, quoique exprimées en termes différents, se trouvent déjà dans *Aristote* [voir *J. L. Heiberg,* Abh. Gesch. Math. Leipzig 18 (1904), p. 8/9] tandis que la dernière semble être due à *Euclide* lui-même [voir *J. L. Heiberg,* Abh. Gesch. Math. Leipzig 18 (1904), p. 8] (Note de *G. Eneström*).*

d'une surface, ou d'une ligne, contient déjà le concept de la surface, de la ligne, ou du point que l'on veut définir, si même il ne comprend pas, en tout ou partie, ces trois concepts à la fois, ou du moins quelques-uns de leurs rapports, d'ailleurs fort difficiles à préciser.

Le premier des deux procédés n'implique pas de cercle vicieux aussi évident, mais il nécessite une recherche approfondie et difficile pour permettre d'aboutir à une systématisation logique des concepts de point, de ligne, de surface et de corps. La grande difficulté de cette recherche résulte de ce que les concepts de la ligne et de la surface que nous obtenons par induction sont dans notre pensée à l'état de développement progressif et qu'il est par conséquent fort difficile de les caractériser nettement[40]).

De là la tendance, qui se fait jour dans ceux des ouvrages actuels de géométrie élémentaire où l'on se préoccupe du point de vue critique, d'introduire, après avoir pris le point comme concept fondamental, d'abord des concepts de lignes et de surfaces *aussi simples que possible* (le concept de la droite ou celui du cercle, le concept du plan ou celui de la sphère, ...) pour chercher seulement ensuite à former, à l'aide de ces concepts primitifs, les concepts plus généraux de la ligne, de la surface ou du corps.

En procédant ainsi, les attributs de celles des lignes et des surfaces que l'on a envisagées comme fondamentales peuvent être exprimés, sans trop de difficultés, avec la plus grande précision (cf. n° **10**).

Le concept du „point" pourrait encore être défini en partant des concepts „corps" et „mouvement". Il suffirait pour cela de considérer les mouvements comme des éléments d'un groupe de transformations que l'on ferait subir aux corps[41]). Les points se trouveraient alors, comme l'a indiqué *H. Poincaré*[42]), correspondre à certains sous-groupes du groupe des mouvements [les groupes des rotations autour des points de l'espace] et ils pourraient être définis comme tels.

Ce mode de développement serait en réalité un peu pénible, mais il serait intéressant pour deux motifs:

D'une part les postulats y seraient exprimés d'une façon qui se rapprocherait plus que toute autre du résultat direct des expériences physiques.

D'autre part, il apparaîtrait ainsi bien nettement que le concept du point, correspondant à l'existence de certains sous-groupes du groupe des mouvements, suppose un fait physique.

40) Voir à ce sujet n^os^ **20** à **23** et l'article III 2.

41) Cf. n^os^ **39** à **42**.

42) *La science et l'hypothèse, Paris s. d. [1903], en partic. p. 108/9.*

8. Droite et plan définis à l'aide de congruences et de mouvements. Nous allons maintenant examiner successivement les différentes définitions que l'on a données de la droite et du plan.

Les concepts „droite" et „plan" peuvent être pris comme concepts primitifs, mais ils peuvent aussi être définis à l'aide des concepts *congruence* et *mouvement.*

Euclide[43]) définit[44]) ainsi la droite:

εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Proclus[45]) interprète cette définition en disant que la droite est la ligne dont la longueur entre deux points coïncide avec la distance de ces deux points, ce qui nous ramènerait à la définition d'*Archimède* que nous allons rencontrer un peu plus loin.

On adopte plus généralement la traduction que voici[46]):

„La droite est la ligne qui s'étend également par rapport à ses points", c'est-à-dire la ligne qui est divisée par chacun de ses points en deux parties égales[47]).

Mais comme l'hélice jouit de la même propriété, il est évident que cette propriété, ainsi énoncée, ne peut servir à caractériser la droite.

G. W. Leibniz[48]) a considéré la droite comme la ligne qui divise

43) Elementa, livre 1, défin. 4; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 2. *Le véritable sens de cette définition obscure était déjà perdu du temps de *Proclus*. *H. G. Zeuthen* [Archiv für die Geschichte der Naturwiss. (Leipzig) 1 (1909), p. 327] la qualifie de définition qui ne dit rien (nichtssagend).*

44) *La plus ancienne définition de la ligne droite actuellement connue est celle de *Platon* [*Παρμενίδης* (Parmenides) éd. *H. Estienne* 3, Paris 1578, p. 137, passage ε; éd. *F. Didot* 1, Paris 1891, p. 634 lignes 51/2]: *οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ*, formulée ainsi par *Proclus*: *ἧ τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ*, ce qu'on pourrait traduire par: „la droite est une ligne dont le milieu obscurcit les deux extrémités" c'est-à-dire dont le milieu et les deux extrémités sont situés sur le même rayon visuel. *Aristote* reproduit la même définition [voir *J. L. Heiberg*, Abh. Gesch. Math. Wiss. Leipzig 18 (1904), p. 7].*

45) *Procli* Diadochi[2]) p. 109.

46) *H. G. Zeuthen* [Forelaesning over mathematikens historie: Oldtid og middelalder, Copenhague 1893, p. 101; Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Copenhague 1896, p. 115; trad. par *J. Mascart*, Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, Paris 1902, p. 94] et *M. Simon* [Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901, p. 26] abordent l'étude de ces diverses interprétations.

47) *On consultera surtout, au sujet de ces diverses interprétations, *T. L. Heath*, The thirteen books[9]), p. 165/8 (Note de *G. Eneström*).*

48) Lettre à *V. Giordano* écrite en 1689; Werke, éd. *C. I. Gerhardt*, Math. Schr. 1, Berlin 1849, p. 196, 199.

le plan en deux parties congruentes et le plan comme la surface qui divise l'espace en deux parties congruentes.

Ces conceptions d'*Euclide* et de *G. W. Leibniz* peuvent conduire à une façon logique de formuler les principes de la géométrie, en prenant comme notions primitives les notions de *point* et d'*équidistance* et en établissant, à l'aide d'un système approprié de postulats, les *symétries* sur la droite, dans le plan et dans l'espace[49]).

Archimède[50]) a considéré la droite comme la ligne la plus courte entre deux points et ce concept a été repris par *A. M. Legendre*[51]).

Cette conception d'*Archimède* peut aussi conduire à une définition logique de la droite, en prenant comme notion primitive celle de *distance entre deux points* ou, d'une façon plus précise, la notion qui nous permet de comparer entre elles deux paires de points données d'une façon quelconque en disant suivant les cas, que la *distance* entre les deux points de la première paire de points est égale, est supérieure, ou est inférieure à la distance entre les deux points de la seconde paire de points. Un système approprié de postulats permet alors de déterminer, sous certaines conditions, la *longueur d'une ligne* et, par suite, de définir la droite comme la ligne de longueur minimée entre deux points[52]).

Une autre définition dont *G. W. Leibniz*[53]) a fait usage, et qui est rapportée déjà par *Proclus*[54]), est souvent[55]) mentionnée[56]). Elle consiste à envisager la droite comme l'unique ligne qui reste immobile quand on la fait tourner autour de deux de ses points.

49) Voir *T. Brodén*, Pedagogisk tidskrift (Halmstad) 26 (1890), p. 255/71.

50) Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου (De la sphère et du cylindre), postulat 1, Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1880, p. 8; cf. *P. du Bois-Reymond*, Math. Ann. 15 (1879), p. 283. *On ne sait pas si *Archimède* a envisagé ce concept comme une définition ou comme un postulat [voir à ce sujet *H. G. Zeuthen*, Archiv für die Geschichte der Naturw. (Leipzig) 1 (1909), p. 320/7; *G. Eneström*, Bibl. math. (3) 8 (1907/8), p. 66; (3) 10 (1909/10), p. 53/4.*

51) Éléments de géométrie, (1re éd.) Paris an II, p. 1; (12ième éd.) Paris 1823, p. 1.

52) Voir *R. Bettazzi*, Ann. mat. pura appl. (2) 20 (1892/3), p. 19.

53) Lettre à *V. Giordano* écrite en 1689; Werke, éd. *C. I. Gerhardt*, Math. Schr. 1, Berlin 1849, p. 196; cf.[67]) id. 5, Halle 1858, p. 164; 7, Halle 1863, p. 27.

54) **Procli* Diadochi[2]), p. 110.*

55) *Voir par ex. *P. Ramus* (*Pierre de la Ramée*) Scholarum mathematicarum libri unus et triginta, Bâle 1569, p. 148.*

56) *La même définition se trouve aussi [cf. *G. Friedlein*, Bull. bibl. storia mat. 4 (1871), p. 95; *Heronis* Alexandrini Geometricorum et stereometricorum reliquiae, éd. *F. Hultsch*, Berlin 1864, p. 8/9] dans les soit-disant „Définitions" attribuées sans qu'on sache pourquoi à *Héron* et dont la rédaction actuellement connue est postérieure à *Proclus* (Notes 54 à 56 de *G. Eneström*).*

C. F. Gauss[57]) a observé, en passant, que dans la pratique on a recours à cette propriété de la ligne droite quand on opère avec le théodolite pour contrôler si une ligne est droite ou non.

Plusieurs géomètres, parmi lesquels il convient de citer tout particulièrement *H. Grassmann*[58]), ont regardé la droite comme la ligne qui conserve en chacun de ses points une direction constante. Pour que cette définition soit acceptable il faut prendre comme *notion primitive* celle de *direction*, et cela peut se faire, par exemple par rapport à deux points, sans tenir compte de la notion de droite.

Cette idée a été développée par *E. T. Dixon*[59]). Elle se rattache d'ailleurs à une autre idée de *H. Grassmann*[60]) d'après laquelle la géométrie peut être envisagée comme un *calcul géométrique effectué sur des vecteurs* ou, suivant le langage adopté aujourd'hui, comme une *analyse vectorielle.*

G. Peano[61]) a analysé avec le plus grand soin les notions et propositions fondamentales de ce calcul géométrique. *G. Darboux*[62]), *F. Siacci*[63]), *R. Schimmack*[64]), *F. Schur*[65]), *G. Hamel*[66]) ont aussi publié des recherches plus ou moins étendues sur ce même sujet.

Une définition bien plus remarquable de la droite et du plan est celle qu'a imaginée *G. W. Leibniz*[67]) et qui a été ensuite reprise

57) Note posthume s. d. (semble être écrite entre 1840 et 1850); Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 196/7.

58) Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844; (2e éd.) Leipzig 1878, p. XXIX (introd. section C); Werke 1[1], publ. par *F. Engel* Leipzig 1894, p. 28: „Die einfachste Ausdehnungsform ist die Form, welche durch eine aus demselben Gesetze erfolgende Änderung des erzeugenden Elementes entsteht" [La forme simple d'extension est la forme qui résulte d'un changement de l'élément générateur, d'après une même loi], et p. 29: „In der Raumlehre ist die Gleichheit der Richtung das die einzelnen Änderungen umfassende Gesetz" [Dans la théorie de l'espace, la constance de la direction est la loi qui comprend les divers changements].

59) The foundations of geometry, Cambridge 1891, p. 32 et suiv.

60) Pour avoir une idée générale de la question, lire par exemple l'article de *H. Grassmann* intitulé „Kurze Übersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre" [Archiv Math. Phys. (1) 6 (1845), p. 337/50; Werke 1[1], publ. par *F. Engel*, Leipzig 1894, p. 297 et suiv. (voir surtout les sections III et IV)].

61) Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Turin 1888.

62) Bull. sc. math. (1) 9 (1875), p. 281; réimpr. dans *Ch. Despeyrous*, Cours de mécanique 1, Paris 1884, p. 371/7 (note I).

63) Rend. Accad. Napoli (3) 5 (1899), p. 34.

64) Nachr. Ges. Gött. 1903, p. 34.

65) Z. Math. Phys. 49 (1903), p. 352.

66) Z. Math. Phys. 49 (1903), p. 362.

67) Characteristica geometria, ms. bibl. Hanovre daté du 10 août 1679; Werke, éd. *C. I. Gerhardt*, Math. Schr. 5, Halle 1858, p. 166, 167.

et développée par *J. Bolyai*[68]) et par *N. I. Lobačevskij*[69]). Elle consiste à regarder le plan comme le lieu des points équidistants de deux points donnés[70]) et la droite comme le lieu des points équidistants de trois points non alignés, ou aussi comme le lieu des centres des sphères ayant un même point de contact[71]). La notion de l'*équidistance* de paires de points figure ici comme primitive.

Quand la définition du plan et celle de la droite ne sont pas données simultanément, ou que la définition du plan ne précède pas celle de la droite, on peut ramener sans difficulté la notion du plan à celle de la droite.

Euclide[72]) définit le plan:

> ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται

ce que l'on traduit généralement[73]):

> „un plan est une surface qui est également située par rapport à ses droites".

Cette définition contient certainement quelque chose de superflu, car le plan est déjà défini comme étant la surface contenant entièrement la droite qui joint deux quelconques de ses points, et cette définition, que l'on fait souvent remonter à *Héron*[74]), est plus simple que la précédente.

C. F. Gauss[75]) a d'ailleurs mis en évidence que, dans la définition d'*Euclide*, se trouve contenu implicitement un nouveau postulat, puisqu'une droite et un point extérieur à cette droite suffisent pour déterminer un plan. C'est pourquoi il a proposé de définir plutôt le plan comme le lieu des perpendiculaires à une droite menées par un point arbitrairement fixé sur cette droite.

La définition d'*Euclide* se présente alors sous la forme d'un *théorème* dont la démonstration a préoccupé *C. F. Gauss*[76]) comme on le voit en consultant ses œuvres posthumes.

Des considérations analogues ont amené *F. Deahna*[77]) à une définition du plan qui ne diffère pas essentiellement de celle de *C. F. Gauss*. Après avoir établi les concepts de la droite et de la sphère en s'appuyant sur le concept de l'équidistance comme sur un concept primitif, il suppose que l'on peut mouvoir la sphère autour d'un de ses diamètres de façon que chaque point de la surface décrive une ligne fermée (une circonférence de cercle); parmi ces circonférences il y en a une qui partage la surface de la sphère en deux parties congruentes: les droites qui joignent les points de cette circonférence au centre de la sphère engendrent un plan[78]).

G. Veronese[79]) a repris à nouveau l'examen des définitions que l'on peut donner du plan. Après avoir énoncé quelques postulats sur la droite et la congruence (cf. n° **11**), il définit deux droites comme parallèles (dans la géométrie euclidienne) quand ces deux droites sont opposées (symétriques) relativement à un point, et il introduit le postulat suivant:

Deux droites parallèles sont opposées par rapport au milieu de chaque segment dont les extrémités sont situées sur ces deux droites.

En s'appuyant sur ce postulat il définit le plan par l'ensemble des droites (le faisceau de droites) qui projettent, d'un point A extérieur à une droite (a), les points de cette droite (a), en adjoignant à cet ensemble de droites la parallèle menée par A à (a). Ceci posé, il démontre que le plan ainsi défini et *construit* contient la droite qui joint deux quelconques de ses points[80]).

---

68) Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi 2, Maros-Vásárhelyini 1832; (2e éd.) 2, Budapest 1904, p. 8.

69) O načalach geometrii, Kazan 1829/30; Novyĭa načala geometrii s polnoj teoriej parallelĭnych, Kazan 1835/8; trad. allemande par *F. Engel*, Zwei geometrische Abhandlungen, Leipzig 1899, p. 7, 95.

70) Ces données mêmes conduisent tout naturellement à écrire l'équation du plan sous la forme normale [cf. III 22] (sous laquelle elle a été envisagée par *L. O. Hesse*).

71) Voir aussi, à ce sujet, *G. Peano*, Atti Accad. Torino 38 (1902/3), p. 6.

72) Elementa, livre 1, déf. 7; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 2.

73) „Le véritable sens de la définition était déjà perdu du temps de *Proclus* (5ième siècle de notre ère); cf. note 43 (Note de *G. Eneström*).*

74) „La définition se trouve chez *Théon de Smyrne* (qui vivait au second siècle de notre ère) [cf. Expositio rerum mathematicarum, publ. par *E. Hiller*, Leipzig 1878, p. 112] et dans les soi-disant „Définitions" attribuées sans qu'on sache pourquoi à *Héron*[56]) [voir *G. Friedlein*, Bull. bibl. storia mat. 4 (1871), p. 97; *Heronis* Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae, éd. *F. Hultsch*, Berlin 1864, p. 10/1; voir aussi: *Anaritii* in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii, éd. *M. Curtze*, Leipzig 1899, p. 10] (Note de *G. Eneström*).*

75) Lettre à *F. W. Bessel* datée du 27 janvier 1829; Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 200.

76) Note écrite très probablement en mars 1832; Werke 8, Göttingue (Leipzig), p. 194.

77) Diss. Marbourg 1837. Cf. *W. Killing*, Einführung in die Grundlagen der Geometrie 1, Paderborn 1893; 2, Paderborn 1898, p. 183.

78) „Les développements de *F. Deahna* renferment un cercle vicieux. Ils supposent, en effet, les postulats de congruence qui eux-mêmes ne peuvent être établis sans supposer préalablement la notion du plan (Note de *F. Schur*).*

79) Fondamenti[26]), p. 299 (livre I n° 19, livre II n° 7). Pour plus de détails voir *G. Veronese* et *P. Gazzaniga*, Elementi[28]), (2e éd.) p. 31, 32.

80) *G. Veronese* a indiqué comment on pourrait définir le plan dans l'hypo-

La droite et le plan[81]) peuvent aussi être introduits conformément aux principes de la théorie des groupes dont il est question dans d'autres articles de l'Encyclopédie[82]).

9. Droite et plan définis à l'aide de postulats. Au lieu de définir les concepts „droite“ et „plan“ à l'aide des notions de „congruence“ et de „mouvement“, on peut les envisager comme des concepts fondamentaux caractérisés par un groupe de postulats.

Si l'on envisage comme primitif le concept du *segment rectiligne*, on peut donner une définition de la *droite*[83]) à l'abri de toute critique. Si l'on postule d'une façon convenable les attributs d'une surface plane, on peut de même définir nettement ce qu'il faut entendre par *plan illimité*. Si, au contraire, on part du concept de la droite comme fondamental, on ne peut définir le *segment de droite* sans faire intervenir encore un autre concept primitif.

Quand il sera question des principes de la géométrie projective (n^os **29** à **31**) nous énumérerons les postulats auxquels on parvient en suivant la première de ces deux voies. Nous nous bornerons ici à montrer que, en suivant la seconde voie, les attributs concernant les rapports de position mutuelle, ou l'*appartenance*, des droites et des plans [ce que *D. Hilbert*[84]) appelle *die Verknüpfung* c'est-à-dire en quelque sorte l'*enchevêtrement* des notions de droite et de plan] apparaissent, dans une certaine mesure, comme distincts des attributs que ces figures possèdent en tant que lignes et surfaces, c'est-à-dire des postulats d'*ordre* et de *séparation*.

Voici comment on peut d'ailleurs formuler ces postulats d'*appartenance*:

a. On suppose donnée une classe d'éléments appelés *points* [dont l'ensemble se nomme *espace*] et, dans cette classe, on envisage des sous-classes (droites et plans) qui satisfont aux postulats suivants:

1) deux points appartiennent à une droite et à une seule droite;
2) trois points n'appartenant pas à une même droite appartiennent à un plan et à un seul plan;
3) la droite déterminée par deux points d'un plan appartient à ce plan;
4) deux plans qui ont un point commun ont nécessairement encore un second point commun (et ont donc, par suite, une droite commune).

A ces postulats d'une forme d'abord hypothétique seulement, on adjoint les postulats affirmant l'*existence* de plusieurs points différents et celle de points *extérieurs* à une droite et à un plan. L'existence d'un nombre *infini* de points distincts, de droites distinctes, ou de plans distincts les uns des autres, résulte alors des postulats de la *disposition* dont on parlera plus loin [cf. n° **10**, β].

Il convient de remarquer que le quatrième des postulat *a* exprime que l'espace a trois dimensions et qu'on peut le démontrer en se basant sur ce que le plan divise l'espace en deux parties distinctes (n° **10**) et en énonçant convenablement cette propriété sous forme de postulat.

10. Segment; angle; le concept „situé entre“. Nous allons maintenant nous occuper des postulats qui expriment les propriétés linéaires de la droite et les propriétés de surface du plan (cf. n^os **20** à **23**) attributs qui se rapportent aux concepts „situé entre“, „ordre naturel de succession des points d'une droite“, „segment“, „demi-droite“, „côté du plan“, „angle“.

Ni *Euclide*, ni ceux qui l'ont suivi n'ont examiné ces concepts; ils n'ont formulé aucun postulat les concernant. De tels postulats sont cependant nécessaires si l'on veut que le raisonnement géométrique soit purement logique et indépendant de toute intuition.

C. F. Gauss[85]) a attiré l'attention sur ce qu'il est absolument indispensable de formuler nettement le concept „situé entre“.

Le concept concernant la disposition (ordre de succession) des points d'une droite forme la base de toute la géométrie[86]). En fait ce

---

thèse de *N. I. Lobačevskij* (donc indépendamment du postulat du texte qui contient le postulat des parallèles d'Euclide et peut-être un peu plus). *G. Veronese* a aussi examiné le cas de *B. Riemann* (n° **14**) où par un point il n'y a aucune droite parallèle à une droite donnée: le plan tout entier est alors donné par les droites, issues d'un point extérieur à une droite fermée, qui projettent les points de cette droite fermée; mais, dans ce cas de *B. Riemann*, il n'a donné la définition du plan qu'en faisant aussi appel à une autre hypothèse dans laquelle apparaît le double concept d'un espace infiniment petit et d'un espace infiniment grand. *G. Veronese* estime d'ailleurs que cette dernière hypothèse est inutile dans son système; mais cette affirmation demanderait à être justifiée.

81) *Pour la définition du plan par la droite, voir *F. Schur*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909, p. 9.*

82) *Cela n'est toutefois possible que si l'on suppose que l'espace est une variété analytique (Note de *F. Schur*)*

83) *M. Pasch*, Neuere Geom.[24]), p. 7/8; *G. Peano*, Principii[25]), p. 9; Sui fondamenti della geometria [Rivista di mat. 4 (1894), p. 51].

84) Grundlagen[27]), (1^re éd.) p. 5; (2^e éd.) p. 2; (3^e éd.) p. 3.

85) Lettre à *W. Bolyai* datée du 6 mars 1832; Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 222.

86) Cf. *J. F. Herbart*, Werke, publ. par *G. Hartenstein* 3, Schriften zur

concept s'introduit systématiquement en géométrie analytique par l'usage des *signes*. Le principe des signes a été utilisé en géométrie pure par *A. F. Möbius* et *H. Grassmann*[87]) en a, lui aussi, fait systématiquement usage.

Mais c'est à *M. Pasch*[88]) que l'on doit d'avoir formulé le premier ensemble de postulats caractérisant ces relations. Après lui, *G. Peano*[89]), *G. Veronese*[90]), *D. Hilbert*[91]) et plusieurs autres géomètres ont étudié à nouveau ces mêmes questions[92]).

On peut distinguer deux manières de procéder à cet examen; elles se rattachent toutes deux, au moins dans une certaine mesure, aux remarques de *C. F. Gauss* et de *J. F. Herbart* et se distinguent l'une de l'autre en ce que dans l'une on se place à un point de vue que l'on peut désigner comme *actuel*, où il s'agit de la figure achevée, tandis que dans l'autre on se place au point de vue de la génération des figures: nous désignerons ce dernier point de vue sous le nom de *génétique*.

A. Envisageons d'abord les *attributs linéaires* de la droite. Ils peuvent être postulés au point de vue *actuel* en partant du concept „situé entre" ou „division en parties" de la façon suivante:

β. 1) Si A, B, C sont des points d'une droite et que B se trouve entre A et C, B se trouve entre C et A.

2) Si A et C sont deux points d'une droite, il y a toujours au moins un point B *entre* A et C et au moins un point D tel que C se trouve entre A et D.

3) De trois points quelconques d'une droite il y en a toujours un et un seul qui se trouve placé entre les deux autres[93]).

Au point de vue *actuel*, on peut aussi postuler comme il suit:

β'. Chaque point A de la droite divise la droite en deux classes de points [constituant deux parties distinctes de la droite] que l'on peut appeler l'une „partie à droite", l'autre „partie à gauche" du point A et qui sont telles que:

1) chaque point de la droite, autre que A, appartient à une et une seule des deux parties;

2) si A se trouve à gauche [à droite] d'un point B distinct de A, chaque point qui est à gauche [à droite] de A se trouve à gauche [à droite] de B;

3) si A se trouve à gauche de B, B se trouve à droite de A.

Si l'on se place au point de vue *génétique* on postule comme il suit:

β''. Les points de la droite sont rangés les uns à côté des autres en deux *ordres* (*naturels*) opposés l'un à l'autre, de façon qu'en considérant un ordre déterminé on ait:

1) deux points A, B de la droite étant donnés, si l'un d'eux, par exemple A, *précède* l'autre B, alors B suit A;

2) trois points A, B, C de la droite étant donnés, si d'une part A précède B et que d'autre part B précède C, alors A précède C;

3) entre deux points A et B existent des points *intermédiaires* (précédant l'un et suivant l'autre);

4) il n'existe aucun *premier point* (précédant tous les autres) ni aucun *dernier point* (suivant tous les autres).

En se basant sur ces postulats, on peut définir sur la droite le *segment* ayant ses points *extrêmes* en deux points donnés A et B de la droite et contenant les points intermédiaires. Et l'on peut aussi obtenir les attributs élémentaires d'un tel segment AB.

B. Envisageons en second lieu les attributs de surface du plan.

Si l'on se place au point de vue du plan *actuel* on peut prendre comme base la division du plan en deux parties par une de ses droites et caractériser, avec *M. Pasch*[94]), l'attribut fondamental correspondant par le postulat suivant (qui fait pendant en quelque sorte aux trois postulats β énoncés plus haut) pour la droite.

β. 4) Si, dans un plan, trois segments AB, BC, CA sont donnés, une droite (du plan) qui a un point commun avec l'un d'eux a aussi un point commun avec l'un des deux autres.

En raison de ce postulat, le plan est divisé par une quelconque de ses droites (d) en deux parties [*côtés* ou *demi-plans*] de façon que le segment joignant deux points situés du même côté de (d), mais

Metaphysik I, Leipzig 1851, p. 18; 5, Schriften zur Psychologie I, Leipzig 1850, p. 114 et suiv.

87) *A. F. Möbius*, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, p. 3/4; Werke 1, Leipzig 1885, p. 25; *H. Grassmann*, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, p. 17; (2e éd.) Leipzig 1878, p. 17; Werke 1¹, p. 47/8.

88) Neuere Geom.[24]), p. 5.

89) Principii[25]), p. 9/17; Sui fondamenti della geometria [Rivista mat. 4 (1894), p. 51].

90) Fondamenti[26]), p. 55, 68.

91) Grundlagen[27]), (1re éd.) p. 6; (2e éd.) p. 4; (3e éd.) p. 4/9.

92) Voir nos **20** à **23**.

93) *D. Hilbert*, Grundlagen[27]), (2e éd.) p. 4; (3e éd.) p. 5.

94) *M. Pasch*, Neuere Geom.[24]), p. 21.

extérieurs à (d), n'a aucun point commun avec (d); au contraire, le segment joignant deux points qui ne se trouvent pas du même côté de (d) a un point commun avec (d).

On peut introduire les mêmes attributs en se plaçant au point de vue *génétique*. Pour la géométrie euclidienne on y parvient très simplement en postulant comme il suit:

1) le postulat des parallèles d'Euclide;

2) si deux paires de droites (a, a'), (b, b') issues d'un même point O sont coupées par *une* transversale (d) [qui est supposée n'être parallèle à aucune des quatre droites et ne pas passer par O] en deux paires de points (A, A'), (B, B') tels que A et A' soient séparés par l'un des deux points B ou B' et que B et B' soient séparés par l'un des deux points A ou A', il en est nécessairement de même pour *toute* transversale qui ne passe pas par O et n'est parallèle à aucune des quatre droites envisagées (cf. n^os **24** à **28**).

Ce postulat de *M. Pasch* conduit directement à la définition des *surfaces planes* dans lesquelles deux droites qui se coupent partagent le plan et à la définition des *angles* formés par ces deux droites.

La question de la définition de l'angle a soulevé autrefois bien des discussions.

Euclide[95]) désigne l'angle comme l'*inclinaison* de deux droites se coupant, ce qui est une tautologie manifeste[96]). D'autres ont considéré l'angle comme la „mesure d'une rotation". L'essentiel dans toutes les définitions que l'on donnait consistait d'ailleurs à affirmer l'existence d'une certaine invariabilité, concernant une paire de droites qui se coupent, par rapport au groupe des mouvements. Le concept d'un tel invariant (la grandeur de l'angle) suffit évidemment pour constituer la théorie élémentaire des congruences des figures.

Mais l'angle joue dans d'autres questions un rôle différent. On le voit, en particulier, quand il s'agit de certains rapports de situation tels que la notion de „point situé à l'intérieur d'un angle", par

95) Elementa, livre 1, déf. 7; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 2.

96) *Déjà dans l'antiquité des efforts avaient été tentés pour obtenir une meilleure définition de l'angle, mais presque tous ces efforts n'ont abouti à aucun résultat. D'après *Apollonius* un angle est la contraction ou le resserrement [συναγωγή] d'une surface ou d'un solide autour d'un point sous forme de ligne brisée ou de surface ayant une pointe [en latin du moyen âge: angulus est coniunctio superficiei aut corporis ad unum punctum, que comprehenditur a linea curva aut superficie acuta] définition qui n'est guère préférable à celle d'*Euclide*. D'autres définitions presque aussi obscures ont été données par *Plutarque* et *Carpus* [cf. *Procli* Diadochi[2]), p. 121/8; *Anaritii* In libros Euclidis commentarii[74]), p. 11/4] (Note de *G. Eneström*).*

exemple. Au point de vue de ces relations, on a besoin d'un concept de l'angle qui soit indépendant du concept de la congruence des angles.

C'est pourquoi *Louis Bertrand*[97]) a défini l'angle comme *partie d'un plan*. D'une façon précise: l'angle de deux droites est la partie du plan qui est commune aux deux demi-plans limités par ces deux droites; ou encore: l'angle de deux droites est l'*interférence* de ces deux demi-plans. Les deux droites sont les *côtés* de l'angle.

G. Veronese[98]) remarque que la figure ainsi définie, qu'il appelle „champ angulaire" ou „section angulaire", ne correspond pas à la conception habituelle de l'angle; on considère en général l'angle comme une figure n'ayant qu'*une* dimension, appartenant non à un plan mais à un faisceau de droites. C'est pourquoi il propose plutôt, en s'appuyant sur le principe de dualité qui domine toute la géométrie projective, de définir l'angle de deux demi-droites a, b comme l'*ensemble* des demi-droites *situées entre* les deux demi-droites a et b.

On peut développer tous les rapports de situation des figures polygonales quelconques en se basant sur le postulat de *M. Pasch*. On peut, en particulier, définir ainsi la *surface* d'un *polygone*.

G. Veronese[99]) parvient à ce même résultat d'une façon récurrente, en considérant d'abord la *surface* du triangle comme la partie du plan qui est commune à deux angles, puis en considérant la surface du polygone convexe comme une somme [une juxtaposition] de surfaces de triangles. Si l'on rattache ces développements à la construction génétique du plan, ils entrent en rapport avec le concept des parallèles (cf. n° **14**).

F. Enriques et *U. Amaldi*[100]) définissent la surface du polygone convexe comme l'interférence des demi-plans qui contiennent les sommets et sont limités par les côtés du polygone. Ils en déduisent les attributs élémentaires de situation des polygones en appliquant directement le postulat de *M. Pasch*.

Les deux parties dans lesquelles un plan est divisé par un polygone convexe peuvent de même être définies soit par *juxtaposition*, soit par *interférence* de demi-plans et l'on en déduit alors cette propriété fondamentale qu'un segment, ne passant pas par un sommet du

97) Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques 2, Genève 1778, p. 6.

98) Fondamenti[26]), p. 619; trad. *A. Schepp*, Grundzüge[26]), p. 307 et suiv. et p. 695; Elementi[28]), (2^e éd.) p. 35.

99) Fondamenti[26]), p. 321 et suiv.; trad. *A. Schepp*, Grundzüge[26]), p. 346 et suiv.; Elementi[26]), (2^e éd.) p. 105; (3^e éd.) p. 113.

100) Elementi[28]), (1^re éd.) p. 98.

polygone et joignant deux points du plan, coupe le périmètre du polygone en un nombre pair ou impair de points selon que ces deux points appartiennent, ou non, à la même partie du plan.

La partie *intérieure* (surface du polygone) ne semble pouvoir être distinguée de la partie *extérieure* qu'en raison de l'infinité de cette dernière.

C. Les concepts de géométrie *plane* dont on vient de parler s'appliquent aussi à la géométrie dans l'*espace*.

Les *parties* (ou *côtés du plan*) dans lesquelles l'espace est divisé par un plan peuvent être définies, si l'on admet un postulat [analogue au postulat de *M. Pasch* relatif au plan] affirmant que l'espace a trois dimensions et permettant de prouver que „deux plans ayant un point commun ont nécessairement une droite commune". Si, au contraire, on prend cette propriété comme postulat (comme dans le n° **7**) la division de l'espace par un plan résulte du postulat de *M. Pasch* relatif au plan.

Le concept de l'*angle dièdre* est analogue à celui de l'angle plan et n'appelle pas de nouvelles réflexions.

La définition générale du polyèdre (ou plutôt de la figure polyédrique) et celle du corps fermé demandent quelque attention. En effet une nouvelle difficulté apparaît déjà ici quand on envisage les figures polyédriques et à cette première difficulté vient s'en ajouter une autre encore quand on envisage des corps fermés limités par des surfaces courbes. Ces questions seront traitées dans des articles spéciaux relatifs aux polyèdres.

Nous terminerons l'examen de ces concepts en remarquant que les concepts du *sens d'un angle*, du *sens d'une figure*, du *sens d'un segment*, ... dans le plan, ainsi que les concepts du *sens d'un angle dièdre*, du *sens hélicoïdal*, ... dans l'espace, peuvent être établis en prenant comme base le postulat de *M. Pasch* relatif au plan, et le postulat analogue dans l'espace, sans recourir à d'autres intuitions primitives.

Ce sujet a été traité de façons différentes par *G. Veronese*[101]) d'une part, par *F. Enriques* et *U. Amaldi*[102]) d'autre part[103]), *et enfin par *F. Schur*[104]).*

101) Elementi[26]), (2ᵉ éd.) p. 59.

102) Elementi[28]), (1ʳᵉ éd.) p. 58.

103) Voir aussi, à ce sujet, l'article de *U. Amaldi* dans *F. Enriques*, Questioni, p. 56; et voir encore *B. Levi*, Periodico di mat. (3) 1 (1903/4), p. 207/14.

11. Congruence et mouvement. A la *congruence* (ou égalité géométrique) et au *mouvement* (des corps rigides) qui permet de la contrôler (dans l'espace physique) se rattachent deux manières de voir distinctes.

Selon les uns le mouvement géométrique fournit la définition de la congruence, puisque par mouvement on peut distinguer les figures superposables de celles qui ne le sont pas.

Pour d'autres, le concept même de mouvement géométrique, représentant une variation de position *sans déformation*, contient implicitement l'idée de congruence.

Nous ne parlerons pas ici des tentatives faites depuis *Euclide* pour écarter des principes de la géométrie l'idée du mouvement. Nous rappellerons seulement que, vers 1868, *H. von Helmholtz*[105]) a soutenu que le concept du mouvement (abstraction faite du temps) est le fondement naturel du concept de congruence [cf. nᵒˢ **39** à **42**] d'où il apparaît à *G. J. Hoüel*[106]) que l'on fait une confusion d'idées en voulant bannir le mouvement des éléments de la géométrie.

Ch. Méray[107]) partage aussi cette façon de voir. Il part du concept de la *translation* pour parvenir à celui du parallélisme et c'est le concept de la *rotation* qui le mène au concept de l'orthogonalité.

H. Poincaré[108]), lui aussi, considère le concept du mouvement comme le fondement propre de la géométrie.

Dans le domaine mathématique les deux thèses opposées que nous venons de mentionner peuvent également se défendre comme légitimes.

Si même on admet que, dans la genèse psychologique, l'idée de congruence est née du mouvement physique des corps rigides, on ne peut nier que l'esprit *formé* du mathématicien comprend, en fait, les deux notions de congruence et de mouvement de telle façon qu'il puisse logiquement prendre chacune d'elles, indépendamment de l'autre, comme notion primitive caractérisée par un système convenable de postulats.

Peut-être aussi, à un certain point de vue, serait-il possible de

104) *Grundlagen[81]), p. 79.*

105) Verh. des Naturhist. medic. Vereins Heidelberg (1) 4 (1865/8), p. 197; (1) 5 (1869/70), p. 31/2; Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (1) 5 (1867), p. 372/8; Nachr. Ges. Gött. 1868, p. 193/221; Wiss. Abh. 2, Leipzig 1883, p. 610/617; 618/39.

106) Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, Paris 1867; (2ᵉ éd.) Paris 1883.

107) Nouveaux éléments de géométrie, Dijon 1874; (2ᵉ éd.) Dijon 1903, p. 21, 31.

108) La science et l'hypothèse, Paris s. d. [1903], p. 60/1.

soutenir que la congruence, entendue comme un rapport physique, a par elle-même une signification indépendamment du mouvement des corps.

Outre les deux manières de voir déjà indiquées, il en est une troisième[109]) qui cherche à rattacher l'idée de la congruence géométrique à l'identité logique. Mais les critiques ont déjà noté, et cela à juste titre, que ceux qui procèdent ainsi se fondent sur une fausse interprétation du principe logique d'identité.

Sans quitter l'ordre élémentaire, nous allons exposer brièvement les systèmes de postulats par lesquels *M. Pasch*, *G. Veronese* et *D. Hilbert* ont formulé logiquement les propriétés fondamentales de la congruence géométrique. Nous examinerons plus loin (nos **39** à **42**) les développements qui, d'après les idées de *H. von Helmholtz*, permettent de caractériser l'ensemble des mouvements comme un *groupe de transformations*.

a. *Systèmes de postulats de Pasch*[110]). Après avoir donné les postulats [de la géométrie projective] qui concernent les propriétés graphiques[111]) de la droite et du plan dans une région de l'espace (Raumstück) convenablement délimitée [n° **15**], *M. Pasch* introduit comme notion logiquement primitive (quoique psychologiquement acquise par l'expérience du mouvement) la notion de la relation de congruence *entre deux figures géométriques* composées de points, relation que nous désignerons par

$$M \equiv M'.$$

La congruence est conçue comme une correspondance parfaite [I 1, **1**], c'est-à-dire univoque et réciproque, élément par élément, ainsi qu'il suit:

Les parties homologues de figures congruentes sont congruentes. Deux figures congruentes à une troisième sont congruentes entre elles. Si deux figures M, M' sont congruentes [$M \equiv M'$] et qu'à M on adjoigne un point A, on peut toujours déterminer un point A' de façon que les figures composées $M + A$, $M' + A'$ soient congruentes [$M + A \equiv M' + A'$].

Les propriétés fondamentales de la congruence par rapport à la droite et au plan sont énoncées dans les sept postulats suivants dont les cinq premiers se rapportent à la droite et les deux derniers au

109) *G. Veronese*, Elementi [28]), (2e éd.) p. 22 [première partie, livre I].

110) Neuere Geom.[24]), p. 103.

111) *J. V. Poncelet* a désigné successivement sous le nom de *propriétés descriptives* [Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1823; (nouv. éd.) 1, Paris 1865, Introd. p. XIII] et de *propriétés graphiques* [id. 1, p. 5] les propriétés des figures qui ne concernent que la position respective de ces figures.

plan. [Dans les énoncés de ces sept postulats les lettres $A, B, C, \ldots$ représentent des *points*].

1) Les figures AB et BA sont congruentes; en d'autres termes on a

$$AB \equiv BA.$$

2) Si l'on envisage la figure plane ABC, il existe sur la droite qui joint A et C, du côté de A où est C, un point B' tel que

$$AB' \equiv AB.$$

3) Si $ABC \equiv A'B'C'$ et si C est intérieur à AB, alors C' est intérieur à $A'B'$.

4) Si C_1 est intérieur à AB et que sur la droite qui joint A et B, on construise, du côté opposé à A, le point C_2 de façon qu'on ait $C_1C_2 \equiv AC_1$, puis, toujours du côté opposé à A, le point C_3 tel que l'on ait $C_2C_3 \equiv C_1C_2$, et ainsi de suite, on parvient nécessairement après un nombre fini d'opérations à un point C_{n+1} tel que C_nC_{n+1} contienne le point B.

5) Si dans la figure ABC on a

$$AB \equiv BC,$$

il en résultera

$$ABC \equiv CBA.$$

6) Si D, E, F sont trois points non en ligne droite et que l'on ait

$$AB \equiv DE,$$

il existe, dans tout plan mené par AB, deux points C tels que

$$ABC \equiv DEF.$$

7) Si deux figures non planes $ABCD$, $ABCE$ sont congruentes, le point E coïncide avec le point D.

Le postulat 4) contient le postulat d'Archimède dont nous parlerons au n° **13** avec plus de détail.

b. *Systèmes de postulats de Veronese.* Quoique le système de postulats de *M. Pasch* soit d'une logique parfaite, celui de *G. Veronese* accuse si l'on veut un progrès en ce sens du moins qu'au lieu de prendre comme notion primitive celle de la congruence de deux figures quelconques, on n'y prend comme notion primitive que celle de la *congruence de deux segments*.

Le système de *G. Veronese* est caractérisé par cinq postulats dont voici l'énoncé[112]):

112) En formulant ainsi cet énoncé, on a égard non seulement au texte des „Fondamenti" mais aussi, en partie du moins, à celui des „Elementi" de *G. Veronese*. On reproduit toutefois ici le système général des postulats [non contenu dans les „Elementi"] qui fait abstraction du postulat des parallèles.

1) La congruence de deux segments consiste en une correspondance biunivoque entre les points de ces deux segments, telle que à des points successifs de l'un correspondent des points successifs de l'autre et que chaque segment partiel de l'un soit congruent au segment partiel, homologue de l'autre.

2) Deux segments congruents à un troisième sont congruents entre eux.

3) Étant donnés, sur une droite, un segment AB et un point C, il existe sur la droite un segment déterminé CD congruent à AB et de même sens.

4) Étant donné sur une droite un segment AB, il existe sur cette droite un segment déterminé AB_1 qui est congruent à AB et de sens contraire.

5) Si deux droites ont un point commun A, à chaque segment AB de l'une correspond un segment congruent AB' de l'autre (et un segment AB'' de sens contraire).

Ces postulats, joints aux postulats relatifs à la notion primitive de droite (ordre de ses points, leur coïncidence au sens du n° **13**, leur détermination au moyen de deux points), permettent de comparer deux segments quelconques en parlant de segments *plus grands* et *moins grands*, de *somme* ou de *différence* de deux segments, ...

Ces postulats ne renferment d'ailleurs pas le postulat d'Archimède, qu'il faut donc encore leur adjoindre quand on en a besoin.

La congruence de deux figures quelconques (composées de points) peut ensuite être *définie* comme une correspondance telle que les segments homologues soient congruents.

Pour l'étude des figures congruentes, *G. Veronese* propose un postulat relatif aux *paires de droites incidentes*, c'est-à-dire aux *angles*:

6) Si (AB, AC) et $(A'B', A'C')$ sont deux paires de droites et que les trois paires de segments $(AB, A'B')$, $(AC, A'C')$, $(BC, B'C')$ sont congruentes, alors les deux paires de droites (AB, AC), $(A'B', A'C')$ sont aussi congruentes.

Il se sert en outre du postulat suivant:

7) Si un côté d'un triangle devient infiniment petit, la différence des deux autres côtés devient aussi infiniment petite.

Si, dans ce système de postulats et dans le développement des conséquences que l'on en tire plus d'un détail paraît compliqué, cela tient essentiellement à ce que *G. Veronese* s'est imposé d'une part de ne pas prendre comme *donnée* la propriété fondamentale du plan (cf. n° **8**), et d'autre part de faire dépendre le concept général de la congruence, en particulier de la congruence des angles, uniquement de celui de la congruence des segments.

L'importance du dernier postulat sur la continuité du plan (continuité qui, dans la méthode ordinaire, résulte de celle de la droite, mais qui ici figure comme un *complément* de celle de la droite) apparaît nettement quand on cherche avec *J. Mollerup*[113]) à développer les constructions dans le plan sans faire intervenir le concept de la congruence des angles.

Dans la méthode de *J. Mollerup* il est nécessaire d'établir un postulat d'après lequel „on puisse construire sur une droite donnée comme base, et d'un des côtés de cette droite, un seul triangle ayant ses côtés respectivement égaux à ceux d'un triangle donné." Or dans le système de *G. Veronese*, ce théorème peut être prouvé en se basant sur le postulat, déjà mentionné, de la continuité du plan[114]).

c. *Système de postulats de Hilbert*[115]). En distinguant l'un de l'autre les postulats de l'appartenance et de la disposition [n^os^ **9** et **10**, α et β] et en prenant par suite comme donnée la propriété fondamentale [n° **9**, α] du plan, *D. Hilbert* a établi un nouveau système de postulats fort simples dans lequel le concept de la *congruence des segments* et celui de la *congruence des angles* apparaissent tous les deux comme primitifs.

Si l'on considère les segments et les angles comme définis indépendamment de leur sens (n° **10**), on peut formuler les postulats de Hilbert de la façon suivante:

γ. Sous le nom de *congruence*, on suppose donnée une relation *symétrique* entre les segments et les angles telle que les sept conditions que voici soient satisfaites:

1) Tout segment et tout angle est à lui-même congruent.

2) Deux segments, ou deux angles, qui sont congruents à un même troisième, sont congruents entre eux[116]).

3) Sur une droite on peut déterminer, d'un côté d'un point A' donné sur cette droite, *un* segment $A'B'$ qui soit congruent à un segment donné AB; on écrit

$$A'B' \equiv AB.$$

113) Math. Ann. 58 (1904), p. 479.

114) Voir aussi *A. Guarducci*, dans *F. Enriques*, Questioni[20]), p. 65.

115) Grundlagen[27]), (2^e^ éd.) p. 7.

116) Ces deux premières conditions [auxquelles correspondent des propriétés que les logiciens qui s'occupent de mathématiques appellent propriétés *réflectives* et *transitives*] comme aussi la condition: si $a = b$ on a aussi $b = a$ [à laquelle correspond la propriété *symétrique*] constituent, en général, les attributs formels de tout rapport pouvant être envisagé comme une égalité.

4) Si B est un point du segment AC, B' un point du segment $A'C'$ et si
$$AB \equiv A'B',\ BC \equiv B'C',$$
on a aussi
$$AC \equiv A'C'.$$

5) Si, dans un plan, on se donne une demi-droite $O'a'$ partant d'un point O' et si l'on considère un des deux demi-plans limités par la droite (a'), on peut déterminer, dans ce demi-plan, une demi-droite $O'b'$ issue de O' et formant avec $O'a'$ un angle congruent à un angle donné $\sphericalangle(a, b)$; on écrit
$$\sphericalangle(a', b') \equiv \sphericalangle(a, b).$$

6) Si Ob est une demi-droite issue du sommet O de l'angle $\sphericalangle(a, c)$ et si $O'b'$ est une demi-droite issue du sommet O' de l'angle $\sphericalangle(a', c')$, si enfin
$$\sphericalangle(a, b) \equiv \sphericalangle(a', b') \text{ et } \sphericalangle(b, c) \equiv \sphericalangle(b'\ c'),$$
on a aussi
$$\sphericalangle(a, c) \equiv \sphericalangle(a', c').$$

7) Si A, B, C d'une part, A', B', C' d'autre part, sont des „triples de points" [groupes de *trois* points] non situés en ligne droite et si
$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',$$
$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$
on a aussi
$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \text{ et } \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$
et par conséquent aussi
$$BC \equiv B'C'.$$

Ces postulats ne contiennent pas le postulat d'Archimède qui doit donc leur être expressément adjoint quand on en a besoin. Ils forment la base des théorèmes ordinaires relatifs à la congruence des triangles, théorèmes sur lesquels repose toute la théorie de la congruence des figures quelconques.

12. Sur la réduction des concepts fondamentaux considérés dans les numéros précédents. L'École de logique mathématique de *G. Peano*[117]), faisant abstraction de tout ce qui ne regarde pas uniquement la logique formelle, se propose de *restreindre* le nombre des concepts dont il vient d'être question (n^os **7** à **11**) et de poursuivre au point de vue formel, autant que faire se peut, l'examen des postulats en les *décomposant* dans leurs éléments.

117) Voir *G. Peano*, Formulaire de mathématiques 4, Turin 1903, p. 253.

Dans cet ordre d'idées, *G. Peano*[118]) a pris comme point de départ les postulats de caractère projectif de *M. Pasch* se rapportant aux concepts „point", „segment" ou „situé entre" et „surface plane". En les traduisant en symboles empruntés à la logique mathématique déjà systématisée à cette époque, il commença par ramener le concept de la surface plane à celui du segment (cf. nº **11**). Il montra ensuite[119]) que l'on peut remplacer le concept de la congruence par les postulats de caractère projectif que nous venons d'énumérer en y joignant le postulat du „mouvement". Il se préoccupa aussi de prouver l'indépendance de ses postulats en en donnant diverses interprétations (cf. nº **4**).

M. Pieri[120]) a défini le „segment" à l'aide des concepts „point" et „mouvement" et, à cet effet, a développé un système convenable de postulats.

M. Pieri[121]) et *A. Padoa*[122]) ont proposé de remplacer le concept du mouvement par le concept „paire de points équidistants" qui peut être ramené au cas de „paire ayant un point commun" et cela en suivant une idée qui apparaît déjà dans les premiers théorèmes d'*Euclide* et qui a été développée par *G. Veronese*[123]).

G. Peano[124]) a montré que ces définitions ne sont pas sans relations avec celles de la droite et du plan données par *G. W. Leibniz* (nº **8**); il a mis aussi en évidence le lien qui les unit à ses postulats concernant la théorie des vecteurs.

Il convient de remarquer que jusqu'ici *M. Pieri* seul a formulé d'une façon *complète* les postulats dont il fait usage. Il faut toutefois ajouter que ces postulats se présentent sous une forme extrêmement compliquée et perdent tout caractère d'évidence relativement à l'intuition que nous en avons. Cela vient surtout de ce que les concepts primitifs de la disposition (c'est-à-dire les attributs de la droite en tant que ligne) ont été supprimés par *M. Pieri*. D'ailleurs *M. Pieri* n'attache aucune importance à l'*évidence* plus ou moins grande de ses prémisses[125]).

De son côté, *B. Levi*[126]) a développé un système de postulats en

118) Principii[25]), p. 9 et suiv.
119) *Rivista mat. 4 (1894), p. 75.*
120) Memorie Accad. Torino (2) 49 (1899), p. 173.
121) Memorie Accad. Torino (2) 49 (1899), p. 173 et suiv.
122) Voir en particulier: C. R. du deuxième congrès intern. math. Paris 1900, publ. par *E. Duporcq*, Paris 1902, p. 353.
123) **G. Veronese*, Fondamenti[26]), en partic. p. 274.*
124) Atti Accad. Torino 38 (1902/3), p. 6.
125) Memorie Accad. Torino (2) 49 (1899), p. 178 et suiv.
126) Memorie Accad. Torino (2) 54 (1904), p. 281/353.

ne s'appuyant que sur les concepts „point" et „paires équidistantes"; mais les postulats de *B. Levi* ne définissent pas seulement la géométrie habituelle: ils définissent aussi un système géométrique plus général; à l'aide des concepts de disposition, ce système plus général conduit d'ailleurs à la géométrie métrique habituelle (aussi bien euclidienne que non-euclidienne).

A côté de ces travaux il y a lieu de mentionner un mémoire de *B. Kagan*[127]) où l'on trouve un système de définitions et de postulats propres à caractériser la géométrie euclidienne en prenant comme base les concepts fondamentaux „point", „mouvement" (transformation des points) et „distance" (considérée comme invariante au point de vue des mouvements). Les développements de *B. Kagan* sont très clairs et ses postulats sont plutôt simples; mais cette simplicité est obtenue en supposant que la distance est immédiatement représentée par un nombre; cette supposition remplace en particulier les concepts de la disposition; il convient d'ailleurs d'observer qu'elle semble en contradiction avec le point de vue auquel se place *B. Kagan.*

Dans une voie différente, mais en suivant cependant encore les idées directrices de l'Ecole de logique mathématique de *G. Peano*, *O. Veblen*[128]) a établi un système de postulats très simples dans lesquels le „point" et les „triples de points se succédant en ligne droite" apparaissent comme des concepts primitifs; il a aussi cherché à définir la congruence en se basant sur ces postulats. Mais cette dernière définition se fonde sur le choix arbitraire d'une certaine polarité [pour ce qui concerne le fondement projectif de la géométrie métrique, cf. n^os **28, 30**] et elle semble, par suite, ne faire que déguiser l'introduction d'un nouveau concept primitif.

13. Continuité et postulat d'Archimède. L'analyse du concept de continuité a reçu de nos jours une grande extension par suite du développement des considérations infinitésimales (cf. n^os **46** à **52**). On rencontre cependant déjà des traces de cette analyse dans quelques théories développées par les géomètres grecs, en particulier dans la théorie des *proportions*, où ces géomètres sont parvenus à surmonter les difficultés qui se présentent quand le rapport des grandeurs en proportion est incommensurable[129]), et dans l'emploi de la méthode

127) Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 11 (1902), p. 403.

128) Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 343; *voir aussi *E. H. Moore*, id. 3 (1902), p. 147; *F. Schur*, Grundlagen[81]), p. 8.*

129) *Euclide*, Elementa, livre 5, déf. 5; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1884, p. 2.

d'*exhaustion*[130]). Dans ces deux cas toutefois, il s'introduit uniquement ce qui, dans la notion de continuité, correspond au *postulat d'Archimède*[131]): „si deux segments sont donnés, il y a toujours un multiple du plus petit qui surpasse le plus grand".

Ce postulat est implicitement contenu dans la quatrième définition du cinquième livre des „Eléments" d'*Euclide*[132]):

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν „il existe un rapport mutuel entre des grandeurs qui peuvent en se multipliant se surpasser mutuellement".

A notre point de vue moderne, l'importance du *postulat d'Archimède* résulte surtout de ce qu'on peut en conclure immédiatement la possibilité de représenter chaque segment par un nombre soit rationnel, soit irrationnel. En effet, étant données deux grandeurs quelconques y satisfaisant, ce postulat permet de déterminer deux multiples successifs de la première de ces deux grandeurs, encadrant la seconde, en sorte que l'on peut établir des calculs sur ces grandeurs et définir le rapport (*λόγος*) de deux d'entre elles conformément à la théorie des proportions d'*Euclide.* Si l'on convient de prendre une des deux grandeurs envisagées comme *unité de mesure,* ce rapport est un *nombre,* le nombre qui *mesure* l'autre grandeur[133]).

Il résulte aussi du postulat d'Archimède qu'il n'existe pas d'*infiniment petit actuel* par rapport aux longueurs que l'on considère.

Mais de ce postulat à lui seul on ne saurait conclure que réciproquement à tout nombre irrationnel correspond un segment mesuré par ce nombre[134]).

130) *Euclide,* Elementa, livre 10, prop. 1; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 3, Leipzig 1886, p. 4.

131) C'est *O. Stolz* [Ber. naturw.-mediz. Ver. Innsbruck 12 (1881/2), p. 75; réimpr. Math. Ann. 22 (1883), p. 504] qui a désigné cette proposition sous le nom de *postulat d'Archimède.* Il ne faudrait pas croire toutefois que ce postulat soit effectivement dû à *Archimède.* Comme le dit d'ailleurs *O. Stolz* lui-même, [Ber. naturw.-mediz. Ver. Innsbruck 12 (1881/82), p. 86; Math. Ann. 22 (1883), p. 512] bien avant *Archimède*, plusieurs géomètres avaient déjà fait usage de cette proposition fondamentale. Elle se trouve dans *Aristote* [voir *J. L. Heiberg,* Abh. Gesch. Math. 18 (1904), p. 23] et il est même vraisemblable [cf. *H. G. Zeuthen,* Verhandl. des 3. internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, publ. par *A. Krazer,* Leipzig 1905, p. 541; Bibl. math. (3) 7 (1906/7), p. 344] qu'*Eudoxe* s'en est déjà servi.

132) Elementa, livre 5, déf. 4; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1884, p. 2.

133) Cf. *O. Hölder*, Ber. Ges. Leipzig 53 (1901), math. p. 1.

134) **F. Schur* [Grundlagen[81]), p. 183] se place à un point de vue différent. Il admet que l'existence *géométrique* d'un segment résulte de ce que d'une part

Notre concept de continuité renferme à la fois le postulat d'Archimède et ce qu'il faut lui adjoindre pour qu'effectivement à tout nombre réel corresponde un segment mesuré par ce nombre. Il renferme ainsi un énoncé positif d'existence que les Grecs ne semblent pas avoir connu: quelques sophismes célèbres, comme celui d'Achille et de la tortue, paraissent le prouver.

Ce n'est pas que les Grecs n'aient utilisé la représentation du continu. Tout ce qui, dans cette représentation, leur était nécessaire se retrouve implicitement dans les „Eléments“ d'*Euclide*: ainsi les faits essentiels touchant l'intersection des cercles et des droites y sont admis et les constructions basées sur ces faits sont pour *Euclide* l'unique façon de prouver l'*existence des figures*[135]).

A notre point de vue moderne, le postulat de la continuité des droites (et, par suite, celui de la continuité de l'espace) apparaît quand on cherche à représenter géométriquement tous les nombres réels et c'est sur ce fondement que repose pour nous la géométrie analytique.

Dans ses cours professés à l'Université de Berlin, *K. Weierstrass*[136]) a déjà formulé ce postulat; *G. Cantor*[137]) et *R. Dedekind*[138]) l'ont énoncé différemment.

Postulat de continuité de Cantor. Ce postulat s'exprime géométriquement de la manière suivante:

S'il y a sur un segment rectiligne OM deux suites illimitées de segments OA_1, OA_2, OA_3, . . . d'une part, OA'_1, OA'_2, OA'_3, . . . d'autre part, tels que les segments de la première suite croissent indéfiniment et que les segments de la seconde suite décroissent indéfiniment, et cela de façon que les segments $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, . . . décroissent constamment pour devenir plus petit qu'un segment arbitrairement fixé à l'avance (quelque petit qu'on fixe ce segment), à partir d'un indice n (qui dépend naturellement du choix de ce segment), alors il existe sur le segment OM *un point* X tel que OX soit plus

on le définit géométriquement sans ambiguïté et que d'autre part on suppose qu'il satisfait précisément aux mêmes postulats que ceux qui conviennent au segment analytique. A chaque segment géométrique correspond alors par définition un nombre réel et l'on peut déduire du postulat d'Archimède qu'à chaque nombre irrationnel correspond un segment existant géométriquement (Note de *F. Schur*).*

135) Cf. *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 47 (1896), p. 222.

136) *Ces cours n'ont pas été publiés.*

137) Math. Ann. 5 (1872), p. 128.

138) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Brunswick 1872; (3e éd.) Brunswick 1905, p. 8.

grand que tous les segments de la première suite et plus petit que tous les segments de la seconde suite[139]).

En adjoignant ce postulat au postulat d'Archimède, on peut renverser la correspondance entre segments et nombres qui résulte de la mesure des segments et l'on parvient ainsi au théorème fondamental d'après lequel *tout nombre réel* (irrationnel aussi bien que rationnel) *correspond à un segment dont il est la mesure.*

On peut donc dire que l'*ensemble des deux postulats d'Archimède et de Cantor fournit la représentation cartésienne des points de la droite.*

Le rôle joué ici par le postulat de Cantor peut aussi bien l'être par un autre postulat auquel on a donné le nom de *postulat d'intégralité* (Vollständigkeit) et qu'on énonce ainsi[140]):

L'espace est une variété d'éléments (points) qui ne saurait être agrandie par l'adjonction d'autres éléments de telle façon que le système des postulats formant la base de la géométrie soit encore satisfait dans la variété agrandie.

En traduisant géométriquement les expressions du postulat de la continuité formulées par *K. Weierstrass* et par *R. Dedekind* on parvient à deux nouveaux énoncés de ce postulat qui se présentent sous une forme descriptive.

Postulat de continuité de Weierstrass. Si un segment OM contient une suite illimitée de points successifs A_1, A_2, A_3, ... , il *existe* un point (*limite*) B tel que, dans le voisinage[141]) de B, quelque petit que soit fixé ce voisinage, se trouve un au moins des points de la suite A_1, A_2, A_3, ...

Postulat de continuité de Dedekind. Si un segment OM est divisé en deux classes de points de telle sorte que si O appartient à la première classe et M à la seconde, chaque point de OM appartienne à *une* des deux classes et qu'un point quelconque de la première classe se trouve à l'intérieur du segment formé par O avec chacun des points de la seconde classe, alors il *existe* un point X tel que tous les points situés à l'intérieur du segment OX appartiennent à la première classe tandis que tous les points situés à l'in-

139) C'est à propos de ce postulat de la continuité de *G. Cantor* que *F. Klein* [Bull. Soc. phys. math. Kazan (2) 8 (1898), p. 18; Math. Ann. 50 (1898), p. 594] remarque qu'au point de vue physique on doit déjà faire intervenir comme postulat l'existence de ceux des points du segment OM ayant une abscisse rationnelle dont le dénominateur est suffisamment grand.

140) C'est ce que fait *D. Hilbert*, Grundlagen[27]), (3e éd.) p. 22. Cf. note 134.

141) *Au lieu de *voisinage* d'un point, on dit aussi souvent *environs* de ce point. Il vaudrait peut-être mieux dire *entourage* du point, mais cette locution est peu usitée.*

térieur du segment XM appartiennent à la seconde classe. On démontre qu'il n'existe qu'*un seul* point X jouissant de cette propriété. Il peut d'ailleurs arriver que X coïncide soit avec O soit avec M.

Les deux postulats de *K. Weierstrass* et de *R. Dedekind* sont entièrement équivalents.

Si l'on adjoint l'un de ces deux postulats de continuité aux postulats de congruence des segments sur la droite [n° **11**, γ] on peut:

a) prouver[142]) le postulat d'Archimède[143]);

b) représenter les points de la droite sur le continuum numérique au moyen d'une correspondance biunivoque [dite aussi parfaite I 1, **1**].

On peut donc dire que *si les postulats sur la congruence des segments sont donnés* [n° **11**, γ 1 à 4], *le postulat de continuité de Weierstrass (ou celui de Dedekind) est équivalent à l'ensemble des postulats de continuité de Cantor et d'Archimède.*

La question se pose maintenant de savoir si le postulat d'Archimède est aussi une conséquence des postulats sur la congruence des segments et du postulat de la continuité de Cantor.

G. Veronese[144]) a montré qu'à cette question il faut répondre négativement et a ainsi prouvé que le postulat de la continuité de Cantor est compatible avec la supposition d'un segment *actuel, infiniment petit* (par rapport à une unité donnée) [cf. n° **47**].

Cela résulte, en somme, du raisonnement que voici[145]):

Supposons, dans un même plan, un système $a, a', a'', \ldots$ de droites horizontales en nombre illimité, à distances égales les unes des autres, et considérons l'ensemble de tous les points de ces droites comme un système de points ordonnés de façon que chaque point B situé *à droite* d'un point A sur une même horizontale, et que chaque point C ou D situé *plus haut* que A, soient regardés comme „*suivant* A"; au contraire A *précède* B, C et D. Dans ce système de points que l'on peut supposer ordonné dans les

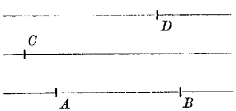


Fig. 1.

142) Cf. *O. Stolz* [Ber. naturw.-mediz. Ver. Innsbruck 12 (1881/2), p. 75; Math. Ann. 22 (1883), p. 504].

143) *O. Hölder* [Ber. Ges. Lpz 53 (1901), math. p. 1] a énuméré d'une façon précise les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

144) Atti Accad. Lincei *Memorie mat.* (4) 6 (1890), p. 603; Fondamenti[26]), p. 105; trad. *A. Schepp*, Grundzüge[26]) 1, (Einleitung § 105).

145) *G. Veronese*, Fondamenti[26]), p. 166; trad. *A. Schepp*, Grundzüge[26]), Einleitung, p. 184 en note.

deux sens à partir de chaque point A, la définition du segment est fixée (aussi bien celle du segment fini AB que celle du segment indéfini composé d'une demi-droite, ou celle du segment tel que AC ou AD chevauchant sur deux ou plusieurs demi-droites) et l'on peut aussi parler de *segments congruents* relativement à une translation quelconque du plan qui superposerait les droites envisagées.

Ainsi se trouvent réalisés à la fois tous les postulats concernant la congruence des segments et ceux qui regardent la disposition. Il en est de même pour le postulat de la continuité de Cantor (mais non pour le postulat de la continuité de Weierstrass ou de Dedekind).

Au contraire, le postulat d'Archimède ne convient pas au système envisagé, car un multiple quelconque du segment (fini) AB est toujours plus petit que le segment (indéfini) AC composé de deux demi-droites.

On en conclut que *le postulat d'Archimède est indépendant du postulat de la continuité de Cantor.*

On peut aussi formuler la différence entre le concept de continuité de *Cantor-Dedekind* et celui de *G. Veronese* de la façon suivante[146]):

Si l'ensemble des points d'un segment OM est divisé en deux classes M' et M'' conformément au postulat de Dedekind, il peut se présenter quatre cas:

1°) M' a un dernier point A' et M'' un premier A'' (on dit alors qu'il se produit un *saut* dans le segment);

2°) M' a un dernier point A', mais M'' n'a pas de premier point;

3°) M' n'a pas de dernier point, mais M'' a un premier point A'';

4°) M' n'a pas de dernier point et M'' n'a pas de premier point (on dit dans ce cas qu'il y a un *vide* dans le segment).

Le concept de continuité de *R. Dedekind* exclut les vides et les sauts; celui de *G. Veronese* exclut toujours les sauts, mais n'exclut les vides que dans des conditions particulières. Dans le continuum de *G. Veronese* des vides apparaissent par exemple toujours quand les segments $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, ... dont on a parlé dans l'énoncé du postulat de continuité de Cantor *ne deviennent pas* inférieurs à tout segment du système envisagé, ce qui est possible.

On peut encore se demander si le postulat d'Archimède peut être démontré à l'aide des postulats de l'appartenance, de la disposition et de la congruence [n^{os} **9**, **10**, **11**, α, β, γ].

Il faut aussi répondre négativement à cette question (cf. n° **47**).

146) *A. Schoenflies*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 15 (1906), p. 26.

Nous nous attacherons néanmoins, dans ce qui suit, au postulat de la continuité de Dedekind-Weierstrass, sauf dans certaines recherches spéciales où nous dirons *explicitement* que ce n'est pas ce postulat de continuité que nous avons en vue. Toutefois nous ferons abstraction de la manière dont *R. Dedekind* ou *K. Weierstrass* ont formulé leur postulat et nous le rapporterons plutôt à des concepts purement descriptifs, en particulier aux concepts qui sont déterminés par le groupe de postulats γ énoncés au nº **11.**

14. Le postulat des parallèles. Le cinquième postulat des „Éléments" d'*Euclide*[147]) affirme que „deux droites d'un plan qui forment avec une troisième droite de ce plan et du même côté de celle-ci, des angles dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent si on les prolonge suffisamment".

„Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες".

Ce postulat se trouve à la base de la théorie des parallèles. Il revient à affirmer que par un point extérieur à une droite donnée on peut mener une, et une seule parallèle à cette droite.

Les grecs déjà[148]) ont cherché à démontrer ce postulat en le rattachant aux postulats déjà admis et aux 28 premières propositions des „Éléments" d'*Euclide* qui n'ont rien à voir avec le postulat des parallèles. Il suffit de rappeler les essais tentés dans cet ordre d'idées, au second siècle de notre ère, par *Claude Ptolémée*[149]) et, au cinquième, par *Proclus*[150]). A ces essais[151]) se rattachent ceux de *Nassir ed Din*[152])

147) Elementa, livre 1, postulat 5; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 8.

148) L'histoire de ces recherches depuis l'antiquité jusqu'à *N. I. Lobačevskij* et *J. Bolyai* a été exposée par *P. Stäckel* et *F. Engel,* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, Leipzig 1895. Voir aussi *R. Bonola*, dans *F. Enriques*, Questioni[29]), p. 143/222.

149) *L'ouvrage où *Claude Ptolémée* traite de cette question est perdu, mais *Proclus* nous a conservé son essai [*Procli* Diadochi[2]), p. 362/3].*

150) **Procli* Diadochi[2]), p. 371/3.*

151) *Un géomètre grec, probablement un peu postérieur à *Proclus* et dont le nom ne nous est connu que sous la forme arabe *Aganis* a essayé de démontrer le postulat des parallèles d'une manière que rappelle l'essai de *J. Wallis.* Quel que soit le triangle que l'on envisage, *Aganis* suppose que l'on puisse construire un triangle semblable plus grand ce qui lui permet de déterminer le point où deux droites non parallèles se rencontrent [*Anaritii* Euclidis commentarii[74]), p. 70/3].*

au treizième siècle de notre ère. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que ce géomètre arabe, dans ses développements, suppose *implicitement* connu le postulat des parallèles puisqu'il part d'un triangle dont la somme des angles est égal à deux droits.

J. Wallis[153]) a introduit dans la théorie des parallèles un point de vue nouveau en remarquant que le postulat d'Euclide peut être remplacé par un postulat affirmant l'existence d'un triangle *semblable* à un triangle donné et d'une grandeur arbitraire[154]). En fait, il suffit, pour éliminer les hypothèses contraires au postulat d'Euclide, d'admettre l'existence de deux triangles semblables et inégaux.

C'est précisément ce dernier postulat que *L. N. M. Carnot*[155]) et *P. S. Laplace*[156]) ont proposé de substituer au postulat d'*Euclide.*

V. Giordano[157]), qui considérait les droites parallèles comme des droites équidistantes, ce qui concordait avec la définition que plusieurs géomètres en avaient donné avant lui, a prouvé que si trois points d'une droite (d) sont à égale distance δ d'une autre droite (d'), les deux droites (d) et (d') sont équidistantes, c'est-à-dire qu'alors *tout* point de la droite (d) est à la même distance δ de la droite (d').

G. Saccheri[158]), dans un ouvrage sur *Euclide*, s'est livré à une critique approfondie du postulat des parallèles[159]), en se plaçant au

152) *Une traduction latine de cet essai de *Nassir ed Din* a été publiée par *J. Wallis* [Opera 2, Oxford 1693, p. 669/73]. L'original de l'essai de *Nassir ed Din* se trouve dans la traduction arabe des Éléments d'*Euclide* par *Nassir ed Din* publiée à Rome en 1594 on ne sait par qui (Notes 149 à 152 de *G. Eneström*).*

153) De postulato quinto et definitione quinta lib. 6 Euclidis disceptatio geometrica; Opera 2, Oxford 1693, p. 665/78.

154) *Effectivement *J. Wallis* [Opera[153]) 2, p. 667] se sert du postulat indiqué dans le texte, mais le postulat *posé* par lui [Opera[153]) 2, p. 676] est plus général; il admet qu'à chaque *figure* correspond une *figure* semblable (Note de *G. Eneström*).*

155) Géométrie de position, Paris 1803, p. 481, en note.

156) Exposition du système du monde, note ajoutée à la 5e édition, Paris 1824; Œuvres 6, Paris 1884, p. 472.

157) Euclide restituto overo gli antichi elementi geometrici ristaurati e facilitati, Rome 1680; (2e éd.) [d'après *P. Riccardi,* elle ne diffère de la précédente que par le feuillet de titre], Rome 1686. Cf. *R. Bonola*, Bolletino bibl. storia mat. 8 (1905), p. 33/6.

158) Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, Milan 1733; *réimpression partielle publiée sous le titre: L'Euclide emendato dal *G. Saccheri*; traduzione e note di *G. Boccardini,* Milan 1904 (Note de *G. Loria*).*

159) C'est *E. Beltrami* [Un precursore italiano di Legendre et di Lobatschewsky, Atti. R. Accad. Lincei *Rendic.* (4) 5 II (1889), p. 441/8] qui a mis en pleine lumière l'importance des travaux de ce géomètre italien.

point de vue suivant qui se rattache d'une part aux idées de *Nassir ed Din* et de l'autre à celles de *V. Giordano*:

Si l'on prend dans un plan un segment AB et qu'on élève à ses deux extrémités A et B les perpendiculaires au segment d'un même côté de celui-ci, puis que l'on porte sur ces deux perpendiculaires deux segments égaux AC, BD, on obtient un quadrilatère $ABCD$ dont deux des angles sont droits et dont on peut démontrer que les deux autres angles sont nécessairement égaux entre eux; on peut d'ailleurs faire sur ces deux angles trois hypothèses distinctes: on peut les supposer *aigus, droits* ou *obtus*. *G. Saccheri* a démontré que si l'une de ces trois hypothèses est vérifiée une seule fois, elle le sera toujours, de quelque façon que l'on fasse varier les données.

La seconde des trois hypothèses équivaut au postulat d'Euclide tandis que la première conduit à la géométrie de *N. I. Lobačevskij* et la troisième à celle de *B. Riemann*. *G. Saccheri* prétend démontrer l'absurdité de la première et de la troisième hypothèse; il exclut le cas de l'angle obtus en se basant sur l'infinité de la droite et il croit trouver un élément „discordant“ dans le caractère asymptotique des parallèles où aboutit l'hypothèse de l'angle aigu[160a]).

J. H. Lambert[160]) s'est placé à un point de vue qui ne diffère pas beaucoup de celui de *G. Saccheri*[161]). *Lui aussi part d'un quadrilatère, mais il le suppose construit avec *trois* angles droits; il considère trois hypothèses suivant que le quatrième angle est *aigu, droit* ou *obtus*. Il montre que si pour *un seul* quadrilatère on se trouve dans le cas de l'angle *droit*, il en est de même pour *tous* les autres quadrilatères envisagés, et que ce cas est celui qui convient au postulat d'Euclide.*

J. H. Lambert observe, en outre, que dans les cas où le quatrième angle est soit aigu, soit obtus, cas qui conviennent aux géométries non-euclidiennes, il doit y avoir une espèce d'*unité de mesure naturelle* ou *absolue*, c'est-à-dire une unité définie par ses relations avec le plan (dans la géométrie euclidienne il n'y a rien de semblable; une longueur quelconque ne saurait y être déterminée dans le plan tant qu'on ne s'y donne pas une unité arbitrairement fixée). *J. H. Lambert* montre que le rapport de l'aire d'un triangle à l'unité des aires est égal au

160) Theorie der Parallellinien [Leipziger Magazin für die reine und angew. Math. 1 (1786), p. 137/64, 325/58]. Ce mémoire est daté de 1766. *Voir aussi *P. Stäckel,* Bibl. math. (2) 13 (1899), p. 107/10.*

160a) *Cf. *O. Langekamp,* Diss. Munster (en Westphalie) 1907 (Note de *G. Loria*).*

161) *Cependant *J. H. Lambert,* contrairement à ce qu'avait fait *G. Saccheri,* n'utilise en général aucun postulat de continuité (Note de *F. Schur*).*

rapport à l'unité d'angle de la différence entre la somme des angles du triangle et deux angles droits. Enfin il remarque, et ici il devance *B. Riemann,* que l'hypothèse du quatrième angle obtus se vérifie dans la géométrie sphérique et que l'hypothèse du quatrième angle aigu se vérifierait sur une sphère de rayon purement imaginaire.

Aux critiques formulées par *G. Saccheri* et *J. H. Lambert* relativement à la théorie euclidienne des parallèles se rattachent les vues sur le postulat d'Euclide exposées par plusieurs des plus grands géomètres français de la fin du 18ième siècle, *entre autres par *J. d'Alembert*[162]), *P. S. Laplace*[163]), *L. N. M. Carnot*[164]), *J.-B. J. Fourier*[165]) et peut-être *J. L. Lagrange*[166]). Les résultats obtenus par ces géomètres[167]) comprennent d'ailleurs la partie la plus essentielle du théorème formulé un peu plus tard par *A. M. Legendre*[168]), tout à fait indépendamment d'ailleurs des travaux de ses devanciers*, à savoir que *le postulat d'Euclide équivaut entièrement à l'hypothèse que la somme des angles d'un seul triangle, arbitrairement choisi, est égale à deux angles droits,* hypothèse de laquelle découle alors la même propriété pour tous les triangles possibles, au moins quand on admet comme donnés tous les postulats α, β, γ des nos **9** à **11**, ainsi que le postulat d'Archimède.

C. F. Gauss[169]) semble avoir été le premier à concevoir l'impossibilité de démontrer le postulat des parallèles et, par suite, la possibilité d'une géométrie plus générale que celle d'*Euclide* dans laquelle on ferait abstraction de ce postulat. Il a d'ailleurs établi les fondements d'une telle géométrie.

162) *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie 5, Amsterdam 1759; nouv. éd. Amsterdam 1770, p. 202; Œuvres 1, Paris 1821, p. 278; Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné 11, Neufchastel 1765, p. 905; Encyclopédie méthodique, math. 2, Paris et Liége 1785, p. 520 (article parallèles).*

163) **P. S. Laplace*[156]), Œuvres 6, Paris 1884, p. 472.*

164) *Géom. de position[155]), p. 481.*

165) *Séances des Écoles normales 1, Paris an III, p. 28/33; réimpr. Mathesis (1) 9 (1889), p. 139/41. Cf. *L. Couturat,* Opuscules et fragments inédits de Leibniz, Paris 1903, p. 554/5.*

166) *Le mémoire de *Daviet de Foncenex* [Misc. Taurinensia (Mélanges de philos. et de math.) 2 (1760/1), éd. 1762, p. 299/322] a peut-être été rédigé d'après des communications verbales de *J. L. Lagrange.* Sur les vues de *J. L. Lagrange* voir la communication de *F. Lefort* dans *G. J. Hoüel,* Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, Paris 1867, p. 76 en note.*

167) *Voir *R. Bonola,* Nicht-euklidische Geometrie, Leipzig 1908, p. 54/8.*

168) Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles d'un triangle [Mém. Acad. sc. Institut France (2) 12 (1833), p. 367/410].

169) En tous cas avant 1816. Cf. Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 175, 182.

Avec *C. F. Gauss* il faut aussi nommer *F. K. Schweikart*[170]), *F. A. Taurinus*[171]) *et *F. L. Wachter*[172])* qui, entre 1816 et 1826, se sont occupés de ces mêmes questions. Il est, en effet, bien remarquable que *F. K. Schweikart* dans des lettres et communications verbales ait, déjà à cette époque, nettement exprimé la conviction qu'un système de géométrie est possible où l'on ne tiendrait aucunement compte du postulat des parallèles. De son côté *F. A. Taurinus*, en développant une idée dont le germe se trouve dans les publications de *J. H. Lambert*, a obtenu les formules de la trigonométrie non-euclidienne et a observé que le système de ces formules n'a rien de contradictoire; une fausse interprétation des constantes (de la courbure) contenues dans ces formules l'avait toutefois amené à croire que la géométrie euclidienne est seule valable dans l'espace physique.

N. I. Lobačevskij[173]), dans des mémoires publiés à partir de 1829, a, le premier, énoncé la possibilité d'une géométrie où l'on ferait abstraction du postulat d'Euclide, et en a posé les fondements. Il fut d'ailleurs suivi de près, dans cette voie, par *J. Bolyai*[174]). Les résultats concordants obtenus par ces deux géomètres[175]) furent ensuite confirmés par *C. F. Gauss*[176]) dans sa correspondance avec *F. W. Bessel*, *W. Bolyai*, *H. W. M. Olbers* et *H. C. Schumacher*. Ils constituent un corps de doctrine que l'on a désigné tour à tour sous le nom de „géométrie imaginaire", „géométrie absolue", „géométrie non-euclidienne" et „pangéométrie" ou „géométrie générale".

Le nom de „géométrie imaginaire" fait allusion au jugement porté par la plupart des géomètres sur l'absurdité physique des nouvelles théories. Le nom de „géométrie absolue" provient de la croyance à la validité absolue des postulats géométriques autres que celui des parallèles. Le nom de „géométrie non-euclidienne", dont *C. F. Gauss*[177]) faisait usage, peut être pris à bon droit au sens propre quand on considère le système géométrique correspondant comme résultant de la négation du postulat d'Euclide; on s'en est servi quelquefois d'une façon impropre pour désigner la géométrie qui comprend à la fois le cas euclidien et le cas non-euclidien. Nous ne ferons usage de ce nom de „géométrie non-euclidienne" qu'au sens propre et nous adopterons pour désigner le système géométrique comprenant à la fois la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne le nom de *géométrie générale*.

Les résultats de *N. I. Lobačevskij* et de *J. Bolyai* n'épuisent d'ailleurs pas tout le champ de la géométrie non-euclidienne. Ils supposent toujours, en effet, que la droite a une *longueur infinie*. Or on peut supposer, au contraire, que la droite a une *longueur finie* et, dans cette hypothèse, on arrive à un système de géométrie non-euclidienne bien différent des précédents, comme l'a montré *B. Riemann*[178]) (cf. nº **26**).

15. Développement de la théorie des parallèles. Nous allons chercher à préciser le fondement sur lequel repose la théorie générale des parallèles.

Convenons tout d'abord d'admettre les propositions fondamentales relatives à la droite et au plan ainsi qu'à la congruence et au mouvement, sur lesquelles s'appuient les 28 premières propositions d'*Euclide*. Considérons une droite a et un point extérieur A. Construisons le faisceau de droites projetant, depuis A, les points de a. Les *droites limites* de ce faisceau sont désignées sous le nom de *parallèles à a menées par A*. Dans l'hypothèse *euclidienne* il y a une parallèle à a menée par A, et une seule. Mais deux autres hypothèses sont compatibles avec les postulats déjà admis: dans l'une de ces hypothèses, qui est celle de *J. Bolyai* et *N. I. Lobačevskij*, on peut mener deux parallèles à a par A; dans l'autre, qui est celle de *B. Riemann*, on ne peut mener aucune parallèle à a par A.

Si, relativement à une droite a et à un point A, on admet une de ces trois hypothèses, cette même hypothèse se trouve vérifiée par rapport à toute autre droite b et à un point B quelconque extérieur à b. De toute façon, si b est une parallèle à a menée par un point A,

170) Cf. *P. Stäckel* et *F. Engel*, Parallellinien[148]), p. 243; *C. F. Gauss*, Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 178.

171) Theorie der Parallellinien, Cologne 1825; Geometriae prima elementa, Cologne 1826. Cf. *P. Stäckel* et *F. Engel*, Parallellinien[148]), p. 246; *P. Stäckel*, Abh. Gesch. Math. 9 (1899), p. 399/427; *C. F. Gauss*, Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 186.

172) *Cf. *P. Stäckel*, Math. Ann. 54 (1901), p. 49/85; *C. F. Gauss*, Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 175/6.*

173) Cf. *F. Engel*, N. I. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen 1, Über die Anfangsgründe der Geometrie, Leipzig 1898, p. 1 [1830]; 2, Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Leipzig 1899, p. 67 [1840].

174) Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, Leipzig 1903, [déjà publié une première fois en appendice (28 p.) à *W. Bolyai*, Tentamen[68]) 1, Maros Vásárhelyini 1832]. *J. Bolyai* possédait ces résultats dès 1823.

175) Cf. *P. Stäckel* et *F. Engel*, Math. Ann. 49 (1897), p. 149/206; Bull. sc. math. (2) 21 (1897), p. 206/28; *P. Stäckel*, Math.-Naturw. Ber. Ungarn 16 (1899), p. 263/97; 17 (1901), p. 1/19; 18 (1902), p. 280/307; 19 (1903), p. 1/12.

176) *Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 165/6, 200/1, 210/9.*

177) *Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 220.*

178) **B. Riemann*, Habilitationsschrift[12]); Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 133 et suiv.; Werke, (2e éd.) publ. par *H. Weber*, Leipzig 1892, p. 272 et suiv.; trad. *L. Laugel*, Paris 1898, p. 280 et suiv.*

b est aussi une parallèle à *a* pour un autre point *A'* fixé arbitrairement sur *b*; de plus *a* est parallèle à *b* en sorte que le parallélisme est une relation *réciproque* entre deux droites (dites parallèles) qui ne dépend que de ces deux droites.

Les trois systèmes de géométrie résultant, le premier de l'hypothèse d'*Euclide*, le second de celle de *J. Bolyai* et *N. I. Lobačevskij*, le troisième de celle de *B. Riemann*, ont été respectivement désignés par *F. Klein*[179]) sous le nom de „géométrie parabolique", „géométrie hyperbolique" et „géométrie elliptique" [cf. nº **30**]. On peut les caractériser par la valeur de la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque: dans la géométrie parabolique cette somme est égale à deux angles droits, dans la géométrie hyperbolique elle est inférieure à deux angles droits, et dans la géométrie elliptique elle est supérieure à deux angles droits.

Dans les géométries non-euclidiennes, le théorème de Pythagore est remplacé par une relation plus générale qui sert de base aux formules de la trigonométrie non-euclidienne (elliptique et hyperbolique). La trigonométrie euclidienne, ou parabolique, rentre dans cette trigonométrie comme cas limite[180]). Pour des triangles infiniment petits les formules de la trigonométrie non-euclidienne sont les mêmes[181]) que celles de la trigonométrie euclidienne[182]).

16. Nouveaux développements sur la théorie des parallèles. Deux questions concernant la théorie des parallèles et intéressant les fondements de la géométrie se posent encore et demandent à être examinées avec soin:

a) Comment arrive-t-on à établir la possibilité logique de la géométrie non-euclidienne et, par suite, l'indépendance du postulat d'Euclide à l'égard des postulats qui le précèdent.

b) Sous quelles formes simples, équivalant au postulat d'Euclide, peut-on énoncer l'hypothèse qui se trouve à la base de la théorie ordinaire des parallèles.

a) En ce qui concerne la première de ces deux questions, *N. I. Lobačevskij*[183]) a déjà observé que les formules de la trigonométrie hyperbolique peuvent être réalisées par un système analytique abstrait et il en a tiré la première démonstration de la possibilité logique de la géométrie non-euclidienne.

B. Riemann[184]) et *E. Beltrami*[185]) eurent ensuite l'idée de donner une interprétation effective de la géométrie non-euclidienne plane en utilisant la géométrie sur les surfaces à courbure constante (cf. nº **24**). Il en résulte une nouvelle preuve de la possibilité logique des systèmes non-euclidiens dans le plan. Mais une telle surface à courbure constante ne représente jamais qu'*une partie du plan.*

D'après *F. Klein*[186]) on a une représentation de la géométrie non-euclidienne qui répond mieux à une intuition d'ensemble, dans la détermination métrique que *A. Cayley*[187]) a appliquée à chaque conique. Tout le plan non-euclidien est ainsi mis en pleine lumière et non plus seulement une partie du plan. Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre consacré à la géométrie projective.

Par cette interprétation projective on a aussi envisagé un point qui mérite de fixer l'attention du lecteur.

Souvent, en suivant l'exemple de *J. H. Lambert*, on a pris pour modèle de la géométrie plane elliptique la géométrie sur la sphère; et comme, sur celle-ci, deux cercles très grands (figurant des droites)

179) *F. Klein*, Math. Ann. 4 (1871), p. 577, 606, 607, 611.*

180) Les formules de la trigonométrie hyperbolique ont été données par *J. Bolyai* et *N. I. Lobačevskij*. Celles du cas elliptique sont les formules de la trigonométrie sphérique dues pour la plupart à *J. H. Lambert*. Pour passer de ces formules de trigonométrie sphérique (dans lesquelles figure le rayon *R* de la sphère sur laquelle sont tracés les triangles sphériques) aux formules de la trigonométrie hyperbolique, il suffit d'ailleurs de remplacer dans les formules de trigonométrie sphérique le nombre réel *R* par le nombre purement imaginaire *iR*.

181) Cette remarque a servi de base à un procédé d'intégration par lequel on obtient les formules ordinaires de la trigonométrie en partant de celles qui concernent les triangles infiniment petits. *Ce procédé est dû à *L. Euler* [Hist. Acad. sc. Berlin 9 (1753), éd. 1755, p. 223/57].*

Voir à ce sujet *C. Flye Ste Marie*, Études analytiques sur la théorie des parallèles, Paris 1871, p. 70 et suiv.; *W. Killing*, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig 1885;* *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Mathesis (2) 5 (1895), supplément 5, p. 7/15; Ann. Soc. scient. Bruxelles 19[2] (1894/5), p. 17/26 et déjà *C. F. Gauss*, Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 255.

182) Pour ce qui concerne la possibilité de fonder la géométrie hyperbolique sans faire usage de la continuité, cf. *D. Hilbert*, Grundlagen[27]), (3e éd.) p. 156/76. *Pour ce qui, dans cet ordre d'idées, concerne la géométrie générale, voir *F. Schur*, Grundlagen[81]), p. 100/2.*

183) *N. J. Lobačevskij*[173]) 1, p. 65; 2, p. 60.*

184) *B. Riemann*, Habilitationsschrift[12]); Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 145; Werke, (2e éd.), publ. par *H. Weber*, Leipzig 1892, p. 282/3; trad. *L. Laugel*, Paris 1898, p. 293.*

185) *E. Beltrami*, Saggio d'una interpretazione della geometria non-euclidea [Giorn. mat. (1) 6 (1868), p. 284/312; trad. par *G. J. Hoüel*, Ann Ec. Norm. (1) 6 (1869), p. 251/88].*

186) *F. Klein*, Math. Ann. 6 (1873), p. 140.*

187) *A. Cayley*, Philos. Trans. London 149 (1859), p. 82; Papers 2, Cambridge 1889, p. 583.*

se coupent toujours en deux points, on a regardé cette propriété comme convenant à la géométrie analytique plane à laquelle ne saurait dès lors s'appliquer le postulat: „deux points déterminent une droite“.

Cette manière de voir a été rectifiée par *F. Klein*[188]) qui a montré que quand on reporte sur une surface donnée les constructions concernant la géométrie plane non euclidienne, ce n'est que ce qui concerne une *région limitée* du plan qui s'identifie avec ce qui concerne une *région limitée* de la surface et que, par suite, il n'est pas permis *a priori* d'appliquer au plan ce qui se dit de la surface considérée dans sa totalité (cf. nos **24** et **43**).

La géométrie plane non-euclidienne se reflète entièrement, non dans la géométrie sur la sphère, mais dans la géométrie ordinaire des *gerbes de droites,* ce qui signifie qu'en substituant aux „points“ du plan les „droites“ de la gerbe et aux expressions „droite“ et „distance“, celles de „faisceau“ et „angle“, toutes les propositions du plan elliptique qui constituent la géométrie elliptique se ramènent aux propositions ordinaires de la géométrie de la gerbe, et inversement.

On voit ainsi la parfaite compatibilité de l'hypothèse elliptique du plan avec les postulats de la droite et de la congruence dans le plan.

Toutefois les interprétations des géométries planes non-euclidiennes ne sauraient suffire pour établir l'indépendance du postulat d'Euclide à l'égard des premiers postulats de la géométrie dans l'*espace,* parce qu'elles n'excluent pas la possibilité de démontrer le postulat d'Euclide par des constructions dans l'espace (analogues à celles par lesquelles on démontre le théorème des triangles homologues situés dans un même plan sans s'astreindre à ne construire que des figures situées dans ce plan).

On se rend ainsi bien nettement compte de la nécessité de chercher *dans l'espace* la preuve de la possibilité logique de la géométrie non-euclidienne.

Cette preuve se tire de la théorie des variétés à trois dimensions ayant une courbure constante (n° **31 b**) ou encore, quand on se place au point de vue de *F. Klein,* elle se rattache à la détermination métrique que *A. Cayley* applique à chaque quadrique[189]).

188) **F. Klein,* Math. Ann. 6 (1873), p. 140. Voir aussi ce que dit ***F. Klein*** [Jahrb. Fortschr. Math. 8 (1876), éd. 1878, p. 313/4] à propos de ***J. Frischauf,*** Elemente der absoluten Geometrie, Leipzig 1876. Cf. *W. Killing*, Geometrie[77]) 1, p. 352, note 12.*

189) Cf. *A. Clebsch,* Vorlesungen über Geometrie publ. par *F. Lindemann* 2^1, Leipzig 1891, p. 540 (section 3, § 8).

Chacune de ces démonstrations fournit la preuve de l'indépendance du postulat d'Euclide par rapport aux postulats qui concernent les relations de droites et de plans, la congruence et la continuité; elle montre aussi la possibilité d'établir l'existence logique des procédés employés soit par les formules analytiques non contradictoires que l'on a établies, soit en supposant donnée comme possible, sur la base de l'intuition, la géométrie euclidienne ordinaire [voir à ce sujet n° **4**].

C'est ainsi que se pose, au point de vue philosophique, le problème de savoir si la géométrie non euclidienne peut représenter non seulement une *possibilité logique,* mais aussi une *possibilité physique.*

A cet égard on observera tout d'abord que l'expérience seule peut décider en dernier ressort. Mais une expérience ne saurait être effectuée qu'avec une certaine approximation. Il en résulte que si des expériences dans lesquelles on constaterait par exemple que la somme des angles d'un triangle est, au degré d'approximation avec lequel on opère, inférieure à deux angles droits, fourniraient une preuve certaine de la légitimité de la géométrie hyperbolique, il ne sera jamais possible, quelque loin que l'on pousse l'approximation des mesures, de conclure de mesures effectuées, concernant la somme des angles d'un triangle, la certitude physique de l'hypothèse euclidienne[190]).

En fait, les mesures géodésiques[191]) ou astronomiques[192]) d'angles de triangles physiques effectuées jusqu'ici n'ont jamais permis de reconnaître que la somme des angles de quelque triangle physique diffère effectivement de deux angles droits, soit en plus, soit en moins[193]).

b) Pour répondre à la seconde des deux questions posées, nous nous contenterons d'énumérer les principales hypothèses équivalentes au postulat d'Euclide, quand on admet toutes les hypothèses concernant la liaison (n° **9**, α), la disposition (n° **10**, β), la congruence (n° **11**, β) et la continuité, en modifiant toutefois les postulats β du n° **10** de façon qu'ils n'impliquent pas nécessairement l'idée de la droite.

1) Existence d'une seule parallèle menée par un point à une droite donnée.

2) Existence de deux droites d'un plan qui ne se coupent pas et sont équidistantes.

190) Cf. *F. Enriques,* Problemi della scienza[23]), p. 289.

191) *C. F. Gauss,* Disquisitiones circa superficies curvas [Commentat. Soc. Gott. recent. 6 (1823/7), éd Göttingen 1828, § 28]; Göttingische gelehrte Anzeigen 1827, p. 1767/8; Werke 4, Göttingue 1880, p. 257/8, 346/7; cf. Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 267/8.

192) *F. Engel,* N. I. Lobatschewskij[173]) 1, p. 22, 78.

193) Cf. *F. Zöllner,* Wiss. Abh. 1, Leipzig 1878, p. 229.

3) Existence de deux triangles semblables et non congruents[194]).

4) Existence d'*un* triangle où la somme des angles est égale à deux angles droits[195]).

5) Existence de triangles rectilignes ayant une aire aussi grande que l'on veut[196]).

Si l'on admet l'infinité de la droite, le postulat d'Euclide peut être remplacé par l'un ou l'autre des deux postulats suivants:

Par un point situé dans le plan d'un angle aigu et à l'intérieur de cet angle, on peut toujours mener une droite qui rencontre les deux côtés de l'angle[197]).

Trois points non en ligne droite se trouvent toujours sur la surface d'une sphère[198]).

Enfin on peut aussi caractériser, comme il suit, la géométrie euclidienne par rapport à la mécanique:

Le postulat d'Euclide se ramène au postulat mécanique d'Archimède[199]) suivant lequel, étant données deux forces égales et dirigées dans le même sens que l'on applique aux extrémités A et B d'un segment AB perpendiculairement à ce segment, la résultante des deux forces est une force appliquée au point C milieu du segment AB, parallèle aux deux forces données, de même sens que ces deux forces et d'intensité égale à la somme de leurs intensités[200]).

Dans les géométries non euclidiennes l'intensité de la résultante des deux forces envisagées serait non la somme[201]), mais une autre fonction déterminée[202]) des intensités des forces composantes[203]).

---

194) Voir les notes 151, 154, 155 et 156.

195) Cf. *A. M. Legendre,* Mém. Acad. sc. Institut France (2) 12 (1833), p. 375.

196) *C. F. Gauss*, lettre à *W. Bolyai* datée du 16 décembre 1799; Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 159. Cf. n° **18**.

197) *A. M. Legendre*, Eléments de géométrie, (9ᵉ éd.) Paris 1812, p. 280/2. Voir à ce sujet id. (12ᵉ éd.) Paris 1823, p. 278/80.

198) *W. Bolyai*, Kurzer Grundriss eines Versuches, Maros Vásárhelyini 1851, p. 46.

199) *Une partie de ce postulat est indiqué dans *Archimède* [ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α' (de l'équilibre des plans ou de leurs centres de gravité livre 1); trad. *F. Peyrard,* Paris 1807, p. 275; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1881, p. 142] mais le postulat tout entier ne semble pas contenu dans ses écrits (Note de *G. Eneström*).*

200) **A. Genocchi,* Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide [Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (3) 2 (1869/76), p. 153/89, en partic. p. 162] (Note de *G. Loria*).*

201) *A. Genocchi*, Atti Accad. Torino 12 (1876/7), p. 489; Memorie Accad. Torino (2) 29 (1878), p. 305 et suiv. [1877]. Cf. *J. Andrade*, Leçons de mécanique physique, Paris 1897, p. 355 et suiv.

17. Aire et volume[204]). *Euclide*[205]) traite les aires et volumes comme des *grandeurs sui generis* en prenant comme base les *axiomes* suivants où il voit des attributs du concept général de la grandeur:

1) *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.*

2) *Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.*

3) *Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.*

. . . .

7) *Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

8) *Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν* [*ἐστιν*].

c'est-à-dire:

1) Les quantités égales à une même quantité sont égales entre elles.

2) Si l'on ajoute des quantités égales à des quantités égales, les sommes sont égales.

3) Si de quantités égales on soustrait des quantités égales les restes sont égaux.

. . . .

7) Des quantités superposables sont égales entre elles.

8) Le tout est plus grand que la partie.

A. Bornons-nous d'abord au cas des figures planes.

Les quatre premiers de ces cinq axiomes établissent deux critères nettement distincts pour reconnaître l'équivalence des surfaces planes, c'est-à-dire l'égalité des aires des surfaces planes:

a) le partage de ces surfaces en parties congruentes [équivalence des surfaces par addition: axiomes 1, 2 et 7].

---

202) Les premiers travaux concernant la mécanique dans l'espace non euclidien sont ceux de *J. de Tilly*, Études de mécanique abstraite [Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 21 (1870), mém. n° 5, p. 3/98 [1868]]. Voir aussi *J. de Tilly,* Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 3 (1880), p. 1/190 [voir surtout p. 177 (chap. 5, n° 21)].

Après *J. de Tilly*, on peut citer *E. Schering*, Nachr. Ges. Gött. 1870, p. 311; 1873, p. 149; *R. Lipschitz*, J. reine angew. Math. 74 (1872), p. 116; *W. Killing*, id. 98 (1885), p. 1/49 (surtout p. 24 et suiv.).

203) Pour ce qui concerne le rapport du postulat des parallèles et du postulat d'Archimède, voir n° **52**.

204) Ces questions sont traitées d'une façon détaillée par *U. Amaldi*, dans *F. Enriques*, Questioni[29]), p. 103 et suiv., et par *O. Hölder*, Ber. Ges. Lpz. 53 (1901), math. p. 1 et suiv.

205) Elementa, livre 1, *κοιναὶ ἔννοιαι α', β', γ', ζ', η'* (Communes animi conceptiones); Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 10.

b) la possibilité de considérer deux figures comme différences entre figures congruentes [équivalence des surfaces, par soustraction: axiomes 3 et 7].

De ces deux critères, *Euclide* emploie tantôt l'un, tantôt l'autre, dans la théorie de l'équivalence (l'égalité des aires) des polygones plans.

C'est en se basant sur l'axiome 8 qu'il prouve les théorèmes inverses où de l'équivalence (égalité des aires) de certains polygones il conclut à l'égalité de certains segments déterminés.

Aux critères **a** et **b**, *Euclide* en ajoute un troisième dans lequel l'égalité des aires (l'équivalence des surfaces) est prouvée *indirectement*. C'est l'emploi de ce troisième critère qui constitue la *méthode d'exhaustion*[206]) [cf. I 3, **14**].

Ce critère se fonde sur la supposition implicite que „si deux surfaces sont inégales, il existe une surface qui, ajoutée à l'une des deux (à la plus petite), donne une somme égale à l'autre (à la plus grande)."

Cette supposition, et par suite la méthode d'exhaustion, s'applique d'ailleurs aussi bien aux surfaces gauches et aux volumes qu'aux surfaces planes.

En appliquant alternativement les critères **a** et **b** pour reconnaître l'équivalence des polygones plans, *Euclide* se trouve avoir fait quelque chose de superflu. *P. Gervien*[207]) a, en effet, prouvé que deux polygones plans [ou sphériques], d'aires égales, peuvent toujours être envisagés comme équivalents par addition, en sorte que le critère **b** est inutile et qu'il suffit d'appliquer le critère **a** seulement.

W. Bolyai[208]) avait déjà fait la même remarque. Il voulait, en outre, démontrer, pour des surfaces quelconques, le théorème que voici:

Lorsque deux figures congruentes ont une partie commune, les parties de ces deux figures qui ne sont pas superposées peuvent être divisées en parties congruentes.

Si cette proposition était démontrée, il en résulterait le théorème plus général:

Quand de deux surfaces congruentes on enlève des parties congruentes, ce qui reste des deux surfaces peut être divisé en parties respectivement congruentes.

Mais la proposition de *W. Bolyai* ne peut être actuellement en-

206) Elementa, livre 10 prop. 1; livre 12 prop. 2; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 3, Leipzig 1886, p. 4/7; 4, Leipzig 1885, p. 140/9.

207) J. reine angew. Math. 10 (1833), p. 228, 235.

208) Tentamen[68]) 1, Maros-Vásárhelyini 1832, p. 51 (§ 35).

visagée comme démontrée: en tous cas la démonstration qu'en a donnée *W. Bolyai* est tout à fait insuffisante.

J. M. C. Duhamel[209]), qui a étudié au point de vue critique la question qui nous préoccupe, a, le premier, montré la nécessité logique de définir à nouveau, pour toute classe de grandeurs géométriques, les concepts „somme", „partie", „plus grand" et „plus petit". Il a été ainsi amené, dans la théorie de l'équivalence des surfaces (l'égalité des aires), à suivre une nouvelle voie où le concept de l'équivalence (de l'égalité) n'apparaît plus comme une relation non définie vérifiant les conditions euclidiennes 1 à 5.

J. M. C. Duhamel définit, tout au contraire, l'équivalence des surfaces (l'égalité des aires) comme une équivalence ou une *égalité par addition* de parties congruentes et cette définition remplace complètement les axiomes 1 à 4 d'*Euclide*. Il développe ensuite quelques théorèmes concernant l'égalité des aires en cherchant à éviter systématiquement l'emploi de la soustraction et, par suite, de l'axiome 3 d'*Euclide*. Il a, en particulier, prouvé, par un procédé dans lequel apparaît l'axiome d'*Archimède*[210]), que deux parallélogrammes de base et de hauteur égales sont équivalents (c'est-à-dire décomposables en parties congruentes).

Ces développements ont été complétés par *A. Faifofer*[211]): la théorie ainsi construite ne repose que sur des définitions; elle ne fait appel à aucun nouveau concept primitif.

Mais *A. de Zolt*[212]) a remarqué que dans la démonstration des théorèmes inverses où, de l'égalité des aires, on conclut à celle de segments, apparaît toujours l'axiome 8 d'*Euclide* qui, si l'on définit l'égalité des aires par addition, se traduit par le *principe* que voici: si l'on partage un polygone d'une manière quelconque, il est impossible, après avoir supprimé une de ses parties, de disposer les autres de telle sorte qu'elles couvrent complètement le polygone.

Si l'on suppose que ce principe est évident, on doit l'envi-

209) Des méthodes dans les sciences de raisonnement (2e éd.) 2, Paris 1866, p. 445 en note; (3e éd.) 2, Paris 1896, p. 445 en note; voir aussi les chapitres 1 et 5.

210) *D. Hilbert* [Grundlagen[27]), (3e éd.), p. 60] a insisté sur l'impossibilité de se passer de cet axiome (voir no **50**).

211) Elementi di geometria ad uso degli istituti tecnici e dei licei, Venise 1895, p. 180.

212) Principii della eguaglianza di poligoni (equivalenza di poligoni) preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica, Milan 1881; Principii della eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici, Milan 1883.

sager comme un *postulat.* C'est ce qu'a fait effectivement *R. de Paolis*[213]). Les géomètres italiens désignent ordinairement ce postulat sous le nom de *postulat de A. de Zolt.*

Ce postulat est d'ailleurs tout à fait superflu. Son énoncé résulte de l'ensemble des suppositions énoncées dans les numéros précédents. Il est bien facile de le reconnaître en envisageant, conformément à notre façon de voir actuelle, une surface quelconque comme la limite vers laquelle tend une somme de carrés convenablement choisie et, par suite, l'aire de cette surface comme une *intégrale* déterminée; car alors le principe de *A. de Zolt* n'est plus qu'un corollaire du théorème fondamental sur l'existence de l'intégrale envisagée. Ce fait a été mis en pleine lumière par *W. Killing*[214]).

Une preuve directe et élémentaire du principe de Zolt a été donnée d'abord par *F. Schur*[215]), puis, de diverses manières, par *O. Rausenberger*[216]), par *G. Veronese*[217]), par *L. Gérard*[218]) et par *G. Lazzeri*[219]).

En résumé, on peut envisager comme démontré d'une façon élémentaire que si l'on définit l'égalité des aires de deux polygones par la distribution de leurs surfaces en parties respectivement congruentes, la théorie de l'égalité des aires des polygones plans peut être développée sans avoir à ajouter aux postulats d'appartenance, de congruence et de disposition [y compris le postulat de continuité ou celui d'Archimède] quelque autre postulat.

Si, au lieu de surfaces polygonales, on envisage des *surfaces planes* limitées par des *lignes courbes,* on ne peut plus faire usage du critère élémentaire à l'aide duquel on a comparé les surfaces des polygones; car, d'après un théorème de *M. Rethy*[220]), les conditions qui doivent être vérifiées pour que deux surfaces équivalentes puissent être divisées en un nombre fini de parties congruentes ne sont en général pas réalisées pour des surfaces planes limitées par des lignes courbes. Pour ne citer qu'un exemple, elles ne le sont *jamais* quand l'une des deux surfaces planes est un cercle et l'autre un carré.

213) Elementi di geometria, Turin 1884, p. 281.

214) Nichteuklidische Raumformen [180]), p. 49. Pour plus de détails, voir: Geometrie [77]) 2, p. 24 et suiv.

215) Sitzgsb. Naturf. Ges. Univ. Dorpat (Jurjev) 13 (1892), p. 2/6; *G. Biasi* [Periodico mat. (1) 9 (1893/4), p. 85/7] a complété ces recherches.

216) Math. Ann. 42 (1893), p. 275.

217) Atti Ist. Veneto (7) 6 (1894/5), p. 421/37.

218) Bull. Soc. math. France 23 (1895), p. 268.

219) Periodico mat. (1) 10 (1894/5), p. 77/93, 133/41.

220) Math.-Naturw. Ber. Ungarn 11 (1892/3), éd. 1894, p. 66/76; Math. Ann. 38 (1891), p. 145.

La théorie générale des aires exige donc que l'on ait recours, soit à la méthode d'exhaustion des anciens qui leur a permis de déterminer plusieurs aires comme celle de la surface du cercle et celle d'un secteur parabolique[221]), soit aux procédés du calcul intégral (cf. I 3, **14**).

On a pu ainsi démontrer que les résultats obtenus pour les polygones, s'appliquent aux surfaces planes limitées par des lignes courbes, en sorte que l'on sait actuellement que:

Les postulats de l'appartenance, de la congruence et de la disposition (y compris le postulat de la continuité ou celui d'Archimède) ont pour conséquence que les surfaces planes peuvent être considérées comme une classe bien déterminée de grandeurs si l'on définit l'équivalence de deux surfaces par la distribution des deux surfaces en un nombre fini ou infini de parties respectivement congruentes.

B. Nous envisagerons maintenant les volumes de parties limitées de l'espace.

Euclide[222]) traite les étendues limitées à trois dimensions comme des grandeurs analogues aux surfaces planes limitées. Cela implique une proposition que l'on peut exprimer par le principe de Zolt appliqué aux étendues à trois dimensions. On peut d'ailleurs, dans ce cas, démontrer encore ce principe par une extension à l'espace des preuves déjà mentionnées pour les surfaces planes. Cette extension a été brièvement indiquée par *O. Rausenberger*[223]) et *L. Gérard*[224]); elle est exposée en détail par *G. Veronese*[225]).

Il en résulte que la théorie de l'équivalence des figures dans l'espace peut, tout aussi bien que celle des figures planes, être basée sur les postulats et définitions ordinaires, sans qu'il soit nécessaire de leur adjoindre aucun postulat particulier[226]).

Mais quand on étudie l'équivalence des polyèdres, une nouvelle

221) Un développement critique de cette méthode d'exhaustion, appliqué exclusivement à la détermination des aires dans les cas les plus élémentaires, est contenu dans *F. Enriques* et *U. Amaldi*, Elementi di geometria, Bologne 1903, p. 354.

222) *Euclide*, Elementa, livre 12; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 4, Leipzig 1885, p. 138/247 [voir par ex. prop. 5 (p. 164/9)]. *Euclide* traite aussi de cette même manière des surfaces gauches limitées: voir par ex. prop. 10 (p. 186/97).

223) Math. Ann. 43 (1893), p. 601/4.

224) Bull. Soc. math. France 23 (1895), p. 268/9.

225) Atti Ist. Veneto (7) 6 (1894/5), p. 421/37.

226) Cf. *S. O. Šatunovskij* (*Schatunovsky*), Math. Ann. 57 (1903), p. 496.

question se pose: il s'agit de savoir si deux polyèdres de volumes égaux peuvent toujours être divisés en un nombre fini de parties congruentes. Les nombreuses tentatives inutiles que l'on avait faites pour obtenir une telle division du tétraèdre et une remarque de *G. Sforza*[227]) permettait de prévoir que la réponse à cette question serait, en général, négative; la démonstration en a été donnée par *M. Dehn*[228]).

Avant de passer à un autre ordre d'idées, nous envisagerons encore ici d'une part *le rapport de la théorie des aires* (ou des volumes) *avec le postulat des parallèles*, et le rapport de cette même théorie *avec le postulat d'Archimède*.

1) Le principe d'après lequel on peut considérer les surfaces et les étendues à trois dimensions comme des *grandeurs* est indépendant du postulat des parallèles: c'est un principe de géométrie générale; il peut aussi bien être établi dans la géométrie non euclidienne que dans la géométrie euclidienne. Mais tous les théorèmes sur l'équivalence des surfaces (égalité des aires), ou sur l'équivalence des étendues (limitées) à trois dimensions (égalité des volumes), dépendent complètement de la façon dont on énonce le postulat des parallèles.

La théorie non euclidienne de l'aire, développée par *C. F. Gauss, J. Bolyai, N. I. Lobačevskij*, permet de constater que l'aire d'un triangle est égale à la différence entre la somme de ses angles et deux angles droits; de là résulte par exemple l'existence d'une limite supérieure pour l'aire d'un triangle[229]). Dans la géométrie elliptique la somme des angles est plus grande que deux droits, dans la géométrie hyperbolique elle est plus petite que deux droits[230]).

2) Dans la théorie de l'égalité des aires (équivalence des surfaces), ainsi d'ailleurs que dans le développement des principes du calcul intégral, on applique ordinairement le postulat d'Archimède.

D. Hilbert[231]) a démontré que l'on peut obtenir une mesure des surfaces polygonales sans faire usage de ce postulat. Mais alors deux figures d'aires égales ne peuvent plus être toujours divisées en un nombre fini de parties respectivement congruentes [cf. n° **51**].

227) Periodico mat. (1) 12 (1896/7), p. 105/9. Voir aussi *R. Bricard*, Nouv. Ann. math. (3) 15 (1896), p. 331.

228) Math. Ann. 55 (1902), p. 465.

229) *C. F. Gauss*, lettre à *Ch. L. Gerling* datée du 16 mars 1819; Werke 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 181. Cf. n° **16**.

230) En ce qui concerne les „volumes" dans un espace non euclidien, voir *F. Engel*, N. I. Lobačevskij [173]) 1, p. 46/7; 2, p. 63.

231) Grundlagen [27]), (3e éd.), p. 62/8.

18. Nouveaux développements de la théorie des proportions au sens des anciens. Dans les Éléments d'*Euclide*[232]) on rencontre quelques propositions qui sont établies deux fois, une fois à l'aide de l'égalité des aires, une seconde fois à l'aide de la théorie arithmétique des proportions. *H. G. Zeuthen*[233]) suppose qu'il y a là comme le dernier reflet d'une ancienne divergence de vues sur la façon de traiter les problèmes, divergence naturelle reposant en dernière analyse sur les difficultés inhérentes à l'introduction des rapports incommensurables. Ces difficultés ayant été complètement surmontées par les géomètres qui ont fondé la théorie des proportions, vraisemblablement peu de temps seulement avant qu'*Euclide* n'ait rassemblé les matériaux à l'aide desquels il a composé ses „Eléments"[234]), il est fort compréhensible que, tout en cherchant dans son ouvrage à mettre en pleine lumière les procédés arithmétiques de la théorie des proportions, il ait aussi insisté sur les démonstrations usuelles faites à l'aide des méthodes purement géométriques.

Les développements qui visent à dégager la géométrie de toute considération relative au concept du *nombre* ont été reprises de nos jours et l'on est ainsi parvenu à édifier une théorie *purement géométrique des proportions* entre segments de droite. Cette théorie fournit une méthode directe d'investigation géométrique entièrement indépendante de l'arithmétique.

Les théorèmes qui peuvent servir de fondement à cette façon de procéder sont:

1) le théorème concernant la proportionalité des segments déterminés sur les côtés d'un angle par des droites parallèles entre elles[235]).

Ce théorème a été attribué par quelques auteurs[236]) à *Thalès* et, *pour abréger*, nous conserverons dans ce qui suit cette dénomination quoi qu'elle n'ait aucune raison d'être.

232) Par exemple, le problème résolu deux fois: Elementa, livre 2 prop. 11 et livre 6 prop. 30 [Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 152; 2, Leipzig 1884, p. 170].

233) *H. G. Zeuthen*, Forelaesning [46]), trad. *J. Mascart*, p. 90, lignes 5/8.

234) *On attribue ordinairement à *Eudoxe* la théorie des proportions formulée d'une façon rigoureuse. Voir à ce sujet *H. G. Zeuthen*, Forelaesning [46]), trad. *J. Mascart*, p. 89. Cette théorie était déjà familière à Aristote qui était de vingt ans plus jeune qu'*Eudoxe* [cf. *J. L. Heiberg*, Abh. Gesch. Math. 18 (1904), p. 11/2] (Note de *G. Eneström*).*

235) Cf. *Euclide*, Elementa, livre 6, prop. 2; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1884, p. 76/81.

236) *Pour ce qui concerne les raisons peu concluantes de cette attribution, voir *P. Tannery*, La géométrie grecque, Paris 1887, p. 91 (Note de *G. Eneström*).*

2) l'égalité des aires de deux triangles (ou parallélogrammes) qui ont un angle commun et dans lesquels les côtés adjacents à cet angle sont inversement proportionnels[237]).

Suivant que l'on s'appuie sur l'un ou l'autre de ces deux théorèmes pour formuler une *définition* de la proportion entre segments, les attributs fondamentaux des proportions s'expriment en *suppositions sur le parallélisme* ou sur l'*égalité des aires.* Ces suppositions doivent nécessairement être prouvées directement sans avoir recours au concept du *rapport* qui revient à celui du *nombre.*

Chacun des deux procédés 1 et 2 peuvent être rattachés à la *théorie de l'extension* de *H. Grassmann*[238]) dans laquelle les segments ne sont pas seulement considérés au point de vue de leur grandeur, mais aussi à celui de leur direction. La propriété distributive de la multiplication dans le calcul de Grassmann s'exprime tout de suite ici par l'identité des deux définitions de la proportion fondées l'une sur le théorème de Thalès, l'autre sur le théorème de l'égalité des aires.

*D'après *H. Grassmann,* deux paires de segments

$$a,\ a_1;\quad b,\ b_1$$

sont dites proportionnelles et l'on écrit

$$a : a_1 = b : b_1$$

quand, en portant ces segments sur deux demi-droites concourantes à partir de leur point d'intersection, a et b sur l'une d'elles, a_1 et b_1 sur l'autre, la droite qui joint les extrémités des segments a, a_1 et la droite qui joint les extrémités des segments b, b_1 sont parallèles. En s'appuyant sur le théorème de Desargues (démontré à l'aide de considérations de géométrie à trois dimensions) *H. Grassmann* montre que

1°) cette notion de proportion est indépendante de l'angle d'inclinaison des deux demi-droites envisagées;

2°) que si l'on a simultanément

$$a : a_1 = b : b_1 \quad \text{et} \quad a : a_1 = c : c_1$$

on a aussi

$$b : b_1 = c : c_1.$$

Pour démontrer que dans une proportion ainsi définie on peut intervertir les termes extrêmes, ou les termes moyens, *H. Grassmann* a dû faire appel aux théorèmes d'Euclide concernant la mesure des

237) *Euclide,* Elementa, livre 6, prop. 14; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1884, p. 110/5.

238) Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, p. 118 (n^{os} 75 à 78); (2^e éd.) Leipzig 1878, p. 118; Werke[58]) 1^1, p. 138/40.

aires planes, théorèmes qui supposent le postulat d'après lequel l'aire d'une surface ne peut être égale à celle d'une partie de cette surface.*

Rajola-Pescarini[239]) définit la proportion entre des segments à l'aide du théorème de Thalès relativement à un angle donné arbitrairement fixé et il en déduit géométriquement le théorème sur l'égalité des aires en s'appuyant sur le 35$^{\text{ième}}$ théorème du livre 3 des Éléments d'*Euclide*[240]) concernant les arcs de cercle; dans les Éléments d'*Euclide,* ce théorème 35 est d'ailleurs établi à l'aide du théorème de Pythagore. *Rajola-Pescarini* réussit de cette façon à étendre à *tous* les angles la définition des proportions donnée d'abord pour l'angle arbitrairement fixé dont il est parti. Il développe ensuite une démonstration du théorème d'après lequel „deux paires de segments proportionnels à une troisième paire sont proportionnels entre eux“. C'est en cela que consiste la propriété dite *transitive* de l'égalité des rapports. Il ne démontre d'ailleurs ce théorème que sous une restriction facilement évitable si l'on emploie un procédé de démonstration indiqué par *G. Vailati*[241]).

E. R. E. Hoppe[242]) a imaginé un développement géométrique de la théorie des proportions en prenant aussi comme point de départ le théorème de Thalès, du moins en tant que la définition des proportions coïncide avec celle donnée par *H. Grassmann.* Ses développements ne diffèrent d'ailleurs de ceux de *H. Grassmann* que par l'introduction d'éléments d'ordre infinitésimal[243]).

E. R. E. Hoppe démontre aussi le théorème suivant plus général que la proposition (2°) de *H. Grassmann*

„si $a : b = e : f$ et si $b : c = d : e$, alors $a : c = d : f$“

qu'il appelle „le théorème du rapport *troublé*“. Mais ici encore intervient le concept de l'égalité des aires.

Ce théorème revient au suivant:

Si sur les deux côtés d'un angle on marque un triple couple de points, les points (1, 3, 5) sur l'un des côtés, les points (2, 4, 6) sur l'autre

239) Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e alla omotetia, Naples 1876.

240) Elementa, livre 1, prop. 35; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 84/7.

241) Atti del 2° Congresso tenuto ad iniziativa dell'Associazione Mathesis, Livourne 1902, p. 176.

242) Archiv Math. Phys. (1) 62 (1878), p. 153.

243) *E. R. E. Hoppe* se place encore à un autre point de vue consistant essentiellement à prendre comme point de départ le théorème 2.

Voir aussi *G. Biasi,* Corso di lezioni sulla teoria delle proporzioni (autographié), Sassari 1882.

côté, de façon que les paires de droites (12, 45) et (23, 56) soient parallèles, alors les droites (34, 61) seront aussi nécessairement parallèles.

Ce théorème et sa démonstration, basée sur des réflexions touchant l'égalité des aires (l'équivalence des surfaces), sont contenus dans la „Collection" de *Pappus*[244]): c'est pourquoi, afin d'abréger, nous désignerons ce théorème sous le nom de *théorème de Pappus*[245]).

Une démonstration fort simple du théorème de Pappus, due vraisemblablement à *K. Kupffer*[246]), est fondée sur l'égalité des angles périphériques dans le cercle; elle est indépendante du concept de l'aire.

Une démonstration dans laquelle intervient un hyperboloïde de révolution a été indiquée par *F. Schur*[247]). D'autres démonstrations, conservant le caractère de *géométrie plane* ont été données par *D. Hilbert*[248]).

D. Hilbert a d'ailleurs construit à nouveau toute la théorie géométrique des proportions entre segments.

De ce qui précède on conclut que le théorème de géométrie plane de *G. Desargues* (n° **27**, a) qui, comme on sait, ne peut être démontré, à l'aide des postulats de la dépendance mutuelle, de la disposition, et des parallèles, qu'en effectuant des constructions dans l'espace, peut être démontré, en se plaçant au point de vue qui nous occupe, sans quitter le plan. Si, en effet, la possibilité de l'interversion des termes moyens d'une proportion fait partie des données, la propriété transitive de l'égalité des rapports et le théorème du rapport composé se ramènent l'un à l'autre, en sorte que le théorème de Desargues conduit au caractère transitif du parallélisme (postulat des parallèles).

Des recherches de *F. Schur* et de *D. Hilbert* découle encore un autre résultat important:

Dans le plan, *la propriété géométrique des proportions entre segments, basée sur les propriétés des parallèles et de la congruence, est indépendante du postulat d'Archimède.*

Le développement de cette théorie géométrique des proportions a encore été quelque peu simplifié par plusieurs recherches que nous allons énumérer:

244) Συναγωγὴ μαθηματική (écrit vers + 295) livre 7, prop. 134; éd. *F. Hultsch*, Pappi Alexandrini math. collectiones 2, Berlin 1877, p. 878/9.

245) Ce théorème de *Pappus* (et plus généralement celui qui en découle par projection et se rapporte à l'hexagone inscrit dans une paire de droites) rentre comme cas particulier dans celui de *B. Pascal* sur l'hexagone inscrit dans une conique [cf. III 15].

246) Sitzgsb. Naturf. Ges. Univ. Dorpat (Jurgev) 14 (1893), p. 373 et suiv.

247) Math. Ann. 51 (1899), p. 401.

248) Grundlagen [27]), (3ᵉ éd.), p. 38/45, 97/106.

F. Schur[249]) a remarqué qu'il suffit de prouver le théorème de *Pappus* dans un seul cas particulier, par exemple quand l'angle sur les côtés duquel sont les deux triples de points envisagés est un angle droit. Dans ce cas particulier, il a démontré fort simplement le théorème en s'appuyant seulement sur ce que les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point.

J. Mollerup[250]) a donné une démonstration fort simple du même théorème dans le cas général, mais cette démonstration ne contient au fond rien qui la distingue essentiellement des précédentes.

B. Levi[251]) a donné une forme élémentaire aux développements qui sont nécessaires à l'établissement du cas particulier du théorème de Pappus correspondant à la possibilité de l'interversion des termes moyens d'une proportion. La théorie des proportions est d'ailleurs intimement liée aux questions qui se rapportent au théorème fondamental de la géométrie projective (cf. n° **27**).

En ce qui concerne le théorème de Pappus dans la géométrie non archimédienne, voir n° **50**.

19. Conclusion. Ce qui précède permet de reconnaître trois groupes distincts de propriétés géométriques:

1) Les propriétés qui se rapportent aux concepts *situé entre, côtés d'un plan, segment, angle*, . . . (propriétés linéaires des droites qui comprennent aussi la continuité, et propriétés des surfaces planes).

2) Les propriétés qui se rapportent au concept d'*appartenance* (de points, de droites et de plans).

3) Les propriétés qui se rapportent au concept de *congruence*.

En géométrie élémentaire, ces trois sortes de propriétés sont intimement liées entre elles. Elles y sont dans un rapport de subordination réciproque tel qu'on ne peut énoncer les propriétés d'un groupe sans se reporter, au moins en partie, à des propriétés d'un autre groupe. Mais le développement de la géométrie a précisément conduit à les distinguer les unes des autres.

On comprend bien comment cette distinction s'est produite si l'on caractérise, comme l'a fait *F. Klein*[252]) pour la première fois dans son programme d'Erlangen, les divers ordres de recherches de la géométrie par les groupes de transformation qui leur correspondent.

249) Math. Ann. 57 (1903), p. 205.

250) Math. Ann. 58 (1904), p. 479.

251) Supplemento al periodico mat. 6 (1903/4), p. 114/7.

252) *F. Klein*, Progr. Erlangen 1872; Math. Ann. 43 (1893), p. 63/100.

A la *géométrie élémentaire* correspond un groupe de transformations, le groupe des *mouvements* et *renversements*, y compris les transformations de similitude. Ce groupe, nommé par *F. Klein* *groupe principal* (*Hauptgruppe*), laisse *invariantes* toutes les propriétés énumérées 1, 2 et 3.

Au lieu de mouvements, on peut d'ailleurs considérer des transformations plus générales qui ne laissent invariantes qu'une partie de ces propriétés 1, 2 ou 3, et modifient les autres. On obtient ainsi plusieurs espèces de géométries dans chacune desquelles on ne s'occupe que de celles de ces propriétés que l'on y considère comme invariantes. Nous ne mentionnerons ici que les deux principales d'entre elles:

a. C'est d'abord la *géométrie projective* où l'on étudie les propriétés qui sont invariantes relativement au groupe des collinéations, c'est-à-dire les propriétés résultant de l'ensemble des postulats α et β des numéros **9** et **10** auxquels on a adjoint le postulat (ordinaire) de la continuité.

b. C'est ensuite la *théorie du continuum* [ou *Analysis situs*] où l'on considère les propriétés qui sont invariantes relativement à des transformations continues quelconques. Ce sont les propriétés correspondant à l'ensemble des postulats α du n° **9** détachées, par le procédé employé, des propriétés particulières des droites et du plan.

A cette façon de voir ajoutons encore une autre considération[253]). Si l'on examine un groupe de transformations relativement à une figure particulière (en faisant abstraction de ce qui est hors de cette figure), celles des propriétés géométriques qui sont invariantes relativement au groupe prennent une signification nouvelle et conduisent ainsi à une géométrie sur la figure envisagée.

Si, par exemple, on examine, relativement à une surface quelconque, le groupe des mouvements qui forme la base de la géométrie élémentaire, on est amené à des considérations générales sur les rapports métriques des figures situées sur une surface, considérations dont l'ensemble constitue la *géométrie sur les surfaces* (géométrie différentielle de mesure dans laquelle on considère les propriétés invariantes relatives à l'applicabilité des surfaces).

En généralisant ensuite cette géométrie sur les surfaces on aboutit à la géométrie métrique sur les variétés à plusieurs dimensions, et, en particulier, sur les variétés à *trois* dimensions. Cette géométrie

253) Cf. *F. Enriques*, Conferenze di geometria [cours autographié], Bologne 1894/5, p. 124 (n° 28).

comprend les propriétés 3 de la congruence qui sont définies relativement aux propriétés 1 de l'Analysis situs, mais indépendamment des concepts de la droite et du plan.

Un même procédé d'abstraction consistant essentiellement dans l'élargissement du groupe de transformations qui correspond à la géométrie élémentaire, mène ainsi à trois ordres de recherches géométriques plus générales que celles de la géométrie élémentaire.

On peut représenter ces trois ordres de recherches, dans leur rapport de dépendance mutuelle, et dans leur dépendance de la géométrie élémentaire, par le schéma suivant:

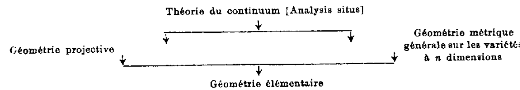


Fig. 2.

Les propriétés contenues dans les trois ordres de recherches générales dont on vient de parler pourraient être rattachées à trois groupes de sensations distinctes de la façon suivante[254]):

les propriétés qui se rapportent au sens général du toucher et du muscle;

les propriétés optiques (descriptives);

les propriétés mécaniques (métriques) relatives à un organe tactile différencié, muni de mobilité.

On peut parcourir dans deux sens opposés le système de la Géométrie que l'on vient d'ébaucher.

Ou bien on étudie d'abord la *géométrie élémentaire*, pour s'élever ensuite d'une part à la *géométrie projective*, de l'autre à la *géométrie métrique* sur les variétés à n dimensions et l'on finit par aborder l'étude de l'*Analysis situs*.

Ou bien l'on commence par envisager la *théorie du continuum*;

254) *F. Klein* [Math. Ann. 37 (1890), p. 544] a le premier remarqué cette différence entre les propriétés descriptives et les propriétés métriques.

F. Enriques [Questioni[20]), p. 16, 18; Rivista filosofica (Pavie) 4 (1901), p. 76; Problemi della scienza[25]), p. 300 (chap. 4); la trad. française de *J. Dubois*, Problèmes de la science, Paris 1908, ne contient pas ce chapitre 4] a essayé d'en prouver la nécessité en examinant minutieusement les faits à la lumière de la psychologie physiologique. Il a été ainsi amené à rattacher les propriétés de la théorie du continuum au sens général du toucher et du muscle, base commune de nos sensations spatiales.

on passe ensuite aux recherches de caractère plus restreint de *géométrie projective* d'une part, de *géométrie métrique* sur les variétés à un nombre quelconque de dimensions d'autre part, pour aboutir à l'étude plus restreinte encore de la géométrie élémentaire.

Le passage de l'*Analysis situs* à la géométrie projective se fait en imaginant un système particulier de courbes et de surfaces données (jouissant de propriétés convenablement choisies) que l'on appelle lignes droites et plans[255]).

Le passage de l'*Analysis situs* à la géométrie métrique générale sur les variétés à n dimensions se fait, soit avec *B. Riemann*[256]) en imaginant comme donnée une certaine opération métrique (telle que la mesure d'une ligne ou de la distance de deux points par exemple) jouissant de propriétés déterminées, soit en supposant donné un certain système de lignes et de surfaces (telle que des lignes géodésiques par exemple) relativement à l'opération métrique envisagée.

On passe de la géométrie projective à la géométrie métrique élémentaire en distinguant dans la détermination métrique une courbe (ou surface) du second degré[257]). Si l'on veut, en particulier, parvenir à la détermination métrique ordinaire envisagée par Euclide, on peut le faire en envisageant la *géométrie de l'affinité* comme une étape intermédiaire[258]).

On passe de la géométrie métrique générale des variétés à n dimensions à la géométrie élémentaire d'Euclide, ou aussi à la géométrie élémentaire non euclidienne, en imposant à l'opération métrique adoptée des conditions particulières, par exemple l'homogénéité et l'isotropie de l'espace, ou encore un caractère particulier du groupe des mouvements[259]).

255) Cf. *F. Klein* (qui ici se rattache à *K. G. Chr. von Staudt*), Math. Ann. 6 (1873), p. 112; Progr. Erlangen 1872, p. 32; Math. Ann. 43 (1893), p. 63/100.

256) *B. Riemann*, Habilitationsschrift[12]); Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 138; Werke (2e éd.) publ. par *H. Weber*, Leipzig 1892, p. 277; trad. *L. Laugel*, Paris 1898, p. 286.

257) Cf. *A. Cayley*, Philos. Trans. London 149 (1859), p. 82; Papers 2, Cambridge 1889, p. 583; *F. Klein*, Math. Ann. 6 (1873), p. 127.

258) Cf. *A. F. Möbius*, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, § 161/2; Werke 1, Leipzig 1885, p. 194/5; *H. Grassmann*, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, Section II chap. 4; Werke[58]) 1^1, p. 249/81.

259) Cf. *B. Riemann*, Habilitationsschrift[12]), Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 134; Werke (2e éd.), publ. par *H. Weber*, Leipzig 1892, p. 273; trad. *L. Laugel*, Paris 1898, p. 282; *E. Beltrami*, Teoria degli spazi di curvatura costante [Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 232; *L. Schläfli*, id. (2) 5 (1871/3), p. 178 [1872]; *S. Lie* et *F. Engel*, Theorie der Transformationsgruppen 3, Leipzig 1893, p. 393; *F. Schur*, Math. Ann. 27 (1886), p. 537 et suiv. Cf. nos **39** à **42**.

Dans les chapitres suivants nous adopterons la seconde façon de procéder. Nous exposerons d'abord les fondements de l'Analysis situs, pour envisager ensuite, d'une part la géométrie projective, d'autre part la géométrie métrique générale, et aboutir enfin, aussi bien par l'intermédiaire de la géométrie projective que par celui de la géométrie métrique générale, à la géométrie élémentaire.

Principes de la théorie du continuum.

20. Préliminaires. Il conviendrait sans aucun doute de chercher à établir les principes de la théorie du continuum sans faire appel à des considérations étrangères à la géométrie[260]), mais jusqu'ici on a plutôt essayé de rattacher ces principes à des notions analytiques comme celle de la représentation des lignes et des surfaces [cf. III 2] ou à la théorie des ensembles [cf. II 2].

Cependant, dans quelques-unes de ses recherches, *G. Cantor*[261]) a abordé *directement* l'étude de quelques questions concernant le continuum[262]).

Quoi qu'il en soit, pour édifier *actuellement* une théorie du continuum il est indispensable de rappeler un certain nombre de résultats empruntés à d'autres théories:

1°) C'est d'abord la possibilité, démontrée par *G. Cantor*, de faire correspondre d'une façon *biunivoque* [que nous avons nommée *parfaite* (I 1, **2**)] les points d'un segment de droite donné (u) aux points d'un carré donné (x, y), et cela, comme l'a montré *G. Peano*, aussi bien à l'aide de fonctions continues non univoquement réversibles qu'à l'aide de fonctions continues univoquement réversibles

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u).$$

2°) C'est ensuite l'impossibilité d'établir entre deux variétés

$$(x_1, x_2, \ldots . x_m), \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

d'ordres m et n, où m et n sont plus grands que un et où m est différent de n, une correspondance biunivoque et continue[263]).

3°) C'est aussi le théorème de *C. Jordan*[264]): Toute courbe plane fermée

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

260) *F. Enriques*, Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 222.

261) Math. Ann. 46 (1895), p. 481.

262) *Depuis la constitution de la géométrie non-archimédienne [nos **46** à **52**], une orientation différente a été imprimée à ces recherches.*

263) Pour ce qui concerne les résultats (1°) et (2°) voir I 7, **2**.

264) Cf. III 2, **8**.

sans point double (ou multiple), où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions finies et continues de t, partage le plan en deux régions telles que, si l'on joint par un trait continu un point fixé arbitrairement dans l'une des deux régions à un point fixé arbitrairement dans l'autre région, ce trait continu rencontre la courbe en un point au moins. On donne à l'une de ces régions le nom de *région intérieure*, à l'autre le nom de *région extérieure* à la courbe fermée.

4°) C'est enfin le fait que la distinction entre courbes planes analytiques et courbes planes non-analytiques n'est possible, en général, que si l'on tient compte, non seulement de la courbe envisagée elle-même, mais encore du système de coordonnées auquel on rapporte la courbe dans le plan.

Si l'on exclut les *points singuliers* et si l'on ne considère qu'une région *finie* du plan, l'ensemble des courbes analytiques satisfait à la condition fondamentale qui nous est donnée par l'intuition que nous avons des courbes (que l'on imagine entièrement tracées):

α. Deux courbes ne se coupent qu'en un nombre fini de points.

Si l'on considère inversement comme donnés tous les segments de droite et tous les arcs de parabole d'ordres quelconques $2, 3, \ldots$ que l'on peut concevoir à l'intérieur d'une région finie, arbitrairement fixée dans le plan, on peut démontrer[265]) que toute ligne (l) devant satisfaire, relativement à ces segments de droite et à ces arcs de parabole, à la condition α a en chacun de ses points une tangente, ou tout au moins une tangente à droite et une tangente à gauche; et l'on peut aussi démontrer que la ligne (l) a, par suite aussi, en chacun de ses points une parabole osculatrice d'ordre 2, d'ordre $3, \ldots$ et en général d'ordre entier quelconque n. La ligne (l) peut donc être représentée en coordonnées cartésiennes par trois fonctions F admettant des dérivées de tous les ordres ou, tout au moins, des dérivées à droite de tous les ordres et des dérivées à gauche de tous les ordres. Si l'on admet que, dans une région du plan convenablement limitée, la ligne (l) ne coupe qu'en un nombre *fini* de points chaque ligne analytique sans points singuliers dans cette région, il est d'ailleurs fort vraisemblable que, dans cette région du plan, les trois fonctions F sont des fonctions analytiques.

21. La notion de ligne. Dans la théorie du continuum le premier concept que l'on rencontre est celui de la *variété continue à une dimension.*

On peut, par abstraction, identifier ce concept à celui de la

265) „Cette démonstration, due à *F. Enriques*, n'a pas encore été publiée.*

ligne, à condition de prendre le *point* de la ligne comme *élément* de la variété continue à une dimension et de faire, en outre, abstraction des relations de la ligne avec l'espace dans lequel elle est située ainsi que de toute notion métrique (notion de longueur) concernant ses segments s'il s'agit d'une ligne droite, ses arcs s'il s'agit d'une ligne courbe. Les seules propriétés de la ligne que l'on doive prendre en considération sont celles qui se rattachent à sa détermination génétique par le mouvement d'un point, comme, par exemple, les propriétés concernant la suite naturelle des points d'une ligne, ou la continuité de la ligne, ou encore la notion de segment sur une droite, ou d'arc sur une courbe.

Pour formuler dans un système logique, en se plaçant uniquement au point de vue de la théorie du continuum, les propriétés qui caractérisent une variété à une dimension, ou une ligne envisagée comme on vient de le dire, il convient d'envisager d'abord un type déterminé de ligne, suffisamment simple, auquel on cherchera ensuite à ramener tous les autres.

Nous prendrons pour ce type la ligne (sans point double) que nous appellerons *ligne ouverte*, c'est-à-dire ligne *non limitée*. Nous appellerons *variété élémentaire* et nous représenterons par le symbole v_1 chaque variété à une dimension que l'on peut identifier à une ligne ouverte.

On peut caractériser les propriétés fondamentales des variétés élémentaires v_1 soit en se plaçant au point de vue *génétique*, soit en se plaçant au point de vue *actuel*.

Suivant que l'on se place à l'un ou à l'autre de ces deux points de vue on devra d'ailleurs appliquer sous la forme de *K. Weierstrass* ou sous celle de *R. Dedekind* [n° **13**] les postulats de la droite et le postulat de la continuité [n° **10**].

Pour abréger, on convient de *dire* que chacun de ces deux points de vue implique *deux ordres continus opposés* sur v_1[266]).

Celà posé, il s'agit de savoir si les hypothèses faites suffisent pour permettre la représentation des points de v_1 sur le continuum *analytique* d'une variable réelle x, ou, ce qui est identique, sur un segment rectiligne dont les points extrêmes sont exclus. En d'autres termes, il s'agit de savoir si les hypothèses faites suffisent à l'*introduction des coordonnées.*

B. Riemann[267]), qui, le premier, a envisagé dans toute sa généra-

266) „Un *ordre continu* sur une ligne *fermée* s'appelle une *disposition.**

267) Habilitationsschrift[12]); Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math.

lité le concept du continuum à une dimension, considérait comme évident que ces hypothèses sont suffisantes. Il rattachait la variation continuelle de l'élément générateur de v_1 à la notion de la durée écoulée pendant cette génération. On n'a pas tardé toutefois à faire ressortir que cette supposition contenait implicitement un postulat[268].

Il est facile de formuler ce postulat si l'on admet que dans la variété élémentaire v_1 on peut comparer entre elles deux parties limitées quelconques d'après le critère de la *congruence*, tout au moins quand ces parties limitées de v_1 ont une extrémité commune.

Mais même si l'on fait abrtraction de tels rapports de congruence, il suffit d'admettre comme postulat que, par un procédé quelconque, on puisse construire dans v_1 un ensemble dénombrable E de points de façon que tout point de v_1 soit un point-limite de l'ensemble E.

En s'appuyant sur ce postulat, *G. Cantor*[269] définit le concept de v_1 de façon que cette variété à une dimension puisse être représentée sur le continuum analytique de la variable réelle x, que l'on envisage dans la théorie analytique des ensembles.

Il importe de remarquer que si ce postulat introduit à l'intérieur de v_1 un ensemble particulier E, l'intuition que nous pouvons avoir de la variété v_1 considérée en elle-même, indépendamment du concept de la congruence, ne nous renseigne en rien sur la construction de cet ensemble. C'est pourquoi nous tenons *le concept de la variété élémentaire v_1 comme plus général que celui du continuum analytique.* Voir à ce sujet les théories non-archimédiennes [n^os **46** à **52**].

La question de l'introduction des coordonnées dans la variété élémentaire v_1 se présente sous un nouveau jour quand on envisage v_1 comme contenue dans une variété à deux dimensions; aussi ne traiterons-nous cette question que plus loin.

Une fois en possession du concept de la variété élémentaire v_1 on parvient aisément à celui d'une variété *quelconque* à une dimension et, en particulier, à celui d'une *variété limitée* à une dimension.

Convenons tout d'abord de désigner, pour abréger, sous le nom de *segment linéaire* soit un segment rectiligne soit un arc de courbe. On démontre qu'une variété *limitée* quelconque à une dimension peut être représentée d'une façon biunivoque [ou *parfaite* (I 1, **1**)] sur un segment linéaire. Or par la seule suppression de son origine et de

p. 136; Werke (2^e éd.) publ. par *H. Weber,* Leipzig 1892, p. 275; trad. *L. Laugel,* Paris 1898, p. 283.

268) Voir *F. Klein,* Math. Ann. 6 (1873), p. 132, 143, 144.

269) Math. Ann. 46 (1895), p. 481.

son extrémité un segment linéaire devient une ligne ouverte comme celles que nous avons envisagées plus haut. Il suffit donc de modifier quelque peu les propositions précédentes pour qu'elles s'appliquent au concept d'une variété *limitée* quelconque à une dimension ou, si l'on veut, du *segment linéaire considéré en soi.*

On observe ensuite que *le concept le plus général d'une variété à une dimension,* ou d'une ligne, se rattache aux précédents, puisqu'on peut considérer une ligne quelconque comme formée par une juxtaposition de plusieurs segments linéaires soudés les uns aux autres de façon que l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre d'une façon convenable.

Si, en particulier, on juxtapose deux segments linéaires AB et CD de façon que A et D d'une part, B et C d'autre part, coïncident, on obtient une ligne *fermée.* Nous représenterons les lignes fermées ou plutôt les variétés à une dimension correspondantes par le symbole V_1.

En se plaçant au point de vue *génétique,* les postulats qui, dans la théorie du continuum, caractérisent les propriétés de la variété V_1 peuvent être établis *directement* si l'on admet deux *ordres cycliques opposés* sur V_1, en d'autres termes si l'on admet que les *éléments* de V_1 (qu'on identifie aux *points* de la ligne fermée correspondante) puissent être *disposés*[270] dans l'un et l'autre sens sur V_1 *d'une façon cyclique* c'est-à-dire telle que les trois conditions que voici soient vérifiées:

1°) Si un élément quelconque de V_1 est donné il existe *un seul ordre* sur V_1, ayant un sens déterminé avec cet élément comme *premier élément,* et dans lequel:

a) de deux éléments B et C, toujours l'un *précède* l'autre; si B précède C, C *suit* B;

b) si B précède C et si C précède D, alors B précède D;

c) entre deux éléments quelconques B et C il y a une infinité d'éléments;

d) il n'y a aucun *dernier* élément.

On appelle cette disposition des éléments de V_1 la *disposition naturelle* de V_1. Par rapport à cette disposition naturelle:

2°) Les deux ordres de V_1 correspondant au même élément mais aux deux sens opposés sont des inversions l'un de l'autre.

3°) Si, dans l'un des ordres naturels correspondant à un premier

270) *On entend par *disposition* d'éléments donnés sur une ligne formée la règle suivant laquelle on fixe une infinité d'*ordres possibles* de ces éléments. Pour fixer *un* de ces ordres, il suffit de fixer d'une part un des deux sens appartenant à la disposition et d'autre part celui des éléments qui doit être le premier.*

élément A, trois éléments P_1, P_2, P_3 se suivent dans l'ordre indiqué par leur indice, dans tout autre ordre naturel de même sens que le premier, mais ayant un autre premier élément A', les trois éléments envisagés se suivent, soit dans l'ordre

$$P_1,\ P_2,\ P_3,$$

soit dans l'ordre

$$P_2,\ P_3,\ P_1,$$

soit enfin dans l'ordre

$$P_3,\ P_1,\ P_2$$ [271]).

A ces postulats il faut encore adjoindre le postulat de la continuité dans le sens restreint de *G. Cantor* [n° **13**].

En se plaçant au point de vue *actuel*, les postulats qui, dans la théorie du continuum, caractérisent les propriétés de la variété V_1 (correspondant à une ligne *fermée*) peuvent être établis si l'on suppose comme concept primitif le concept des *paires d'éléments qui se séparent*[272]).

On postule alors:

Quatre éléments de V_1 ne peuvent être groupés que d'une seule manière en paires qui se séparent.

Si les paires AB, CD et AC, BE se séparent, alors les paires CD, BE et AC, ED se séparent aussi:

Ces postulats admis, on peut *définir* la disposition naturelle de V_1 correspondant à un premier élément donné et dans laquelle deux éléments B et C se suivent dans un ordre déterminé.

Aux postulats concernant les paires qui se séparent il faut encore adjoindre le postulat de la continuité sous une forme convenable.

On remarquera que, sans le postulat de la continuité, les postulats précédents s'appliquent aussi bien à une ligne ouverte qu'à une ligne fermée.

22. Surfaces. Variétés à n dimensions. De même que la *ligne* sert de type aux variétés à une dimension [n° **22**], de même la *surface* envisagée en soi ou l'*espace* peuvent servir à fixer les notions de variété

271) *F. Enriques*, Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 27 (1894), p. 550; Lezioni geom. proiettiva[27]), (1re éd.), p. 9 et suiv.; éd. allemande par *H. Fleischer*, Vorlesungen über projektivische Geometrie, Leipzig 1903, p. 23.

272) *G. Vailati*, Rivista mat. 5 (1895), p. 75/8. Cf. *M. Pieri*, Atti Accad. Torino 30 (1894/5), p. 607; 31 (1895/6), p. 381, 457; *G. Vailati*, Rivista mat. 5 (1895), p. 183/5; *A. Padoa*, Revue math. [Rivista] 6 (1899), p. 35/41 [1896]; *M. Pasch*, Math. Ann. 48 (1897), p. 111.

à deux ou à trois dimensions. Ces notions correspondent à des types plus ou moins intuitifs. On généralise ensuite, à un nombre quelconque de dimensions, les notions ainsi acquises de variété à une, deux ou trois dimensions.

Il semble difficile de dire qui a, le premier, tenté cette généralisation. C'est qu'en réalité elle a été d'abord réalisée dans un but tout différent. Ainsi *J. L. Lagrange*[273]) assimile la Mécanique à une Géométrie à quatre dimensions.

Dans les recherches de Géométrie pure, il s'agit essentiellement de généraliser le concept de la disposition des points d'une surface suivant deux directions ou dans un ordre double, et celui de la disposition des points de l'espace suivant trois directions ou dans un ordre triple.

Cette généralisation est analogue à celle qui permet de passer du concept d'une ligne mobile, formée de points disposés convenablement, à celui d'une surface, puis du concept de la surface supposée à son tour mobile, au concept d'une étendue déterminée ou à celui de l'espace tout entier. En continuant ainsi on parvient à la notion de variété à 4, 5, ... et, en général, à un nombre quelconque n de dimensions. Les éléments de la variété à n dimensions ainsi engendrée sont dit *disposés en ordre multiple n*.

La possibilité de cette généralisation a déjá été connue par *J. F. Herbart*[274]) dont le système philosophique a exercé dans cet ordre d'idées une grande influence sur le développement des idées de *H. Grassmann* et de *B. Riemann*.

En se plaçant à un point de vue exclusivement mathématique, *A. Cayley*[275]) a d'ailleurs développé, dès 1843, le concept de variété à un nombre quelconque de dimensions.

En 1844, *H. Grassmann*[276]) a, de son côté, formulé explicitement la possibilité de soumettre au calcul l'étude de variétés plus générales que l'espace à trois dimensions qu'elles sont supposé contenir. Il a recours, à cet effet, à une analyse vectorielle généralisée dans laquelle, en particulier, l'addition jouit encore de propriétés commutatives. Le concept de *grandeur extensive*, auquel il parvient dans cette analyse vectorielle, embrasse celui de variété à n dimensions dont

273) *Théorie des fonctions analytiques, Paris an V, p. 223; Œuvres 9, Paris 1881, p. 337.*

274) *Werke[86]) 3, p. 59.*

275) Cambr. math. J. 4 (1843/5), p. 119; Papers 1, Cambridge 1889, p. 55.

276) Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, préface p. IX, X; (2e éd.), Leipzig 1878, préface p. VII; Werke[58]) 1[1], p. 10/1.

l'étude fait l'objet de la théorie du continuum; il contient d'ailleurs quelque chose de plus.

Le concept de variété à n dimensions a été posé par *B. Riemann*[277]) d'une façon tout à fait générale à l'aide d'une *définition génétique récurrente.*

B. Riemann considère une variété à n dimensions comme une juxtaposition d'éléments pouvant être distribués en une infinité de variétés à $n-1$ dimensions, l'ensemble de ces variétés à $n-1$ dimensions formant une variété à *une* dimension, et cela de façon que chaque élément de la variété à n dimensions appartienne à l'une des variétés à $n-1$ dimensions.

Une variété à *deux* dimensions apparaît ainsi comme une juxtaposition d'éléments pouvant être distribués en une infinité de variétés à une dimension, l'ensemble de ces dernières variétés formant lui-même une variété à une dimension. Cette distribution des éléments de la variété à deux dimensions correspond à la génération d'une surface par le mouvement d'une ligne, mouvement dans lequel la suite des lignes génératrices forme une variété à une dimension. On peut dire que les points de la surface sont disposés en quelque sorte suivant *deux directions,* ou dans un *ordre double.*

Comme type de variété à deux dimensions on peut prendre une surface simplement connexe, *ouverte*, c'est-à-dire *non-limitée.* Nous appellerons *variété élémentaire à deux dimensions* et nous représenterons par le symbole v_2, toute variété à deux dimensions dont les éléments correspondent aux points de cette surface ouverte et sont conçus suivant les mêmes relations d'ordre.

Le mode de génération des surfaces dont *B. Riemann* a fait usage amène tout naturellement à considérer sur une surface quelconque donnée un faisceau de *lignes génératrices* et un faisceau de *lignes directrices*; ces dernières sont décrites par les différents points de la ligne génératrice mobile. On peut alors définir la variété élémentaire v_2 relativement à *deux faisceaux de variétés élémentaires* v_1 *à une dimension* de façon que

1°) un élément de v_2 appartienne à une variété v_1 de chacun des deux faisceaux [c'est là la *propriété fondamentale* des faisceaux envisagés],

2°) une variété élémentaire quelconque v_1 de l'un des deux faisceaux et une variété élémentaire quelconque v_1' de l'autre faisceau aient en commun un et un seul élément de v_2.

277) Habilitationsschrift[12]); Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 134; Werke (2e éd.), publ. par *H. Weber*, Leipzig 1892, p. 273; trad. *L. Laugel*, Paris 1898, p. 281.

3°) étant données plusieurs variétés v_1 de l'un des deux faisceaux, ceux de leurs éléments qui appartiennent à deux variétés v_1' de l'autre faisceau sont disposés dans le même ordre sur l'une et l'autre de ces deux variétés v_1'.

L'ensemble des deux faisceaux qui satisfont aux conditions (1°), (2°) et (3°) constitue un *réseau* dont les sommets sont les éléments de v_2. La dispositions en réseau de ces éléments de v_2 permet de définir le concept du voisinage (ou entourage) d'un point d'une surface, le concept de point-limite sur une surface, le concept de correspondance biunivoque et *continue* entre deux variétés élémentaires v_2, le concept de correspondance biunivoque entre un faisceau continu de variétés v_1 et une variété v_2 *sur laquelle il est situé*, et d'autres concepts encore dont l'importance est moindre [cf. n° **21**].

En s'appuyant sur ce mode de génération de la variété élémentaire v_2 et sur les concepts qui s'y rapportent, on peut développer une théorie des variétés v_2 dans laquelle on démontre aisément les propriétés concernant la distribution de v_2 en parties limitées par des variétés v_1 faisant partie du faisceau des variétés v_1 situées sur v_2.

Toutefois la théorie des variétés élémentaires v_2 que l'on édifie ainsi ne saurait avoir qu'un simple caractère hypothétique, car on n'aperçoit aucun moyen de construire effectivement sur v_2 un faisceau de variétés élémentaires à une dimension v_1'' distinct des deux faisceaux v_1 et v_1' constituant le réseau dont on a parlé, sans faire appel au postulat de Cantor sur l'existence de l'ensemble spécial g du n° **21** [cf. III 2, **8** et **9**].

En faisant appel à ce postulat on supprime la difficulté par l'introduction sur v_2 d'un système de coordonnées, autrement dit par une représentation biunivoque de v_2 sur une variété analytique (x, y) ce qui permet d'obtenir une représentation sur le continuum analytique du faisceau v_1''.

On peut toutefois éviter l'emploi de ce postulat de Cantor en introduisant, outre les conditions (1), (2) et (3), le postulat que voici:

4°) Outre les deux faisceaux v_1 et v_1' constituant sur v_2 le réseau dont on a parlé, il existe sur v_2 un troisième faisceau de variétés v_1'' qui sont continues sur v_2 et coupent chacune une et une seule fois chacune des variétés v_1 et chacune des variétés v_1' des deux premiers faisceaux.

On démontre en effet[278]) que, une fois admise l'existence de deux modes distincts de génération d'une variété v_2 par deux faisceaux de

278) *F. Enriques,* Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 222.

variétés à une dimension formant réseau conformément aux conditions (1), (2) et (3), il y a une infinité de modes semblables de génération de v_2.

En s'appuyant sur (1), (2), (3) et (4) on peut *représenter d'une façon biunivoque la variété élémentaire v_2 sur la variété analytique (x, y).*

Ceci fait, on obtient aisément une définition de v_2 convenant à une étude systématique et complète de toutes les variétés à deux dimensions. Il suffit pour cela d'observer tout d'abord que le concept de voisinage d'un point et, par suite celui de point-limite sur une surface sont indépendants de la notion des réseaux de cette surface qu'on a utilisée pour définir ces concepts; ils appartiennent au concept de la variété v_2 elle-même. De là résulte que si l'on se donne un premier réseau sur v_2, on peut définir tout autre réseau sur v_2 en le rapportant au premier. Mais si l'on se donne seulement la variété v_2 elle-même, cette indépendance du concept de point-limite apparaît comme exprimant une relation entre deux distributions quelconques des éléments de v_2 en réseaux, et cette relation constitue une partie des conditions permettant d'obtenir la définition complète cherchée des variétés v_2.

La *définition génétique* de v_2 résulte des postulats suivants qui *caractérisent* v_2:

a) Les éléments de v_2 peuvent être disposés en réseaux conformément aux conditions (1), (2) et (3).

b) S'il y a deux distributions en réseaux des éléments de v_2 et si pour la première de ces deux distributions σ représente le voisinage d'un élément S, il existe nécessairement, pour la seconde de ces deux distributions, un voisinage σ_1 de l'élément S contenu dans le voisinage σ de cet élément S.

c) Sur v_2 il y a *deux* réseaux R_1, R_2 tels que l'un des faisceaux générateurs de R_1 coïncide avec l'un des faisceaux générateurs de R_2 et que chaque variété c_1 du second faisceau générateur de R_1 et chaque variété v_1' du second faisceau générateur de R_2 se coupent en un et un seul élément.

Ces considérations s'étendent aisément aux variétés à un nombre quelconque n de dimensions. Pour chaque indice n, toute variété élémentaire v_n est engendrée par n faisceaux générateurs de variétés élémentaires v_{n-1}.

On peut essayer de définir le concept de la variété élémentaire v_2 en se plaçant au point de vue *actuel*.

Il suffit pour celà de caractériser les propriétés qui se rattachent au concept des environs d'un élément de v_2 sans recourir au concept

des environs fondé sur la distribution en réseau des éléments de v_2 dont il a été rendu indépendant par le postulat (4). Dans ce but on peut s'appuyer sur les postulats suivants à l'aide desquels *D. Hilbert*[279]) a *défini* la variété v_2 en la rapportant au plan abstrait:

Le plan est un système d'éléments auxquels on donne le nom de *points*. Chaque point A du plan détermine certains systèmes partiels de points auxquels il appartient lui-même et qu'on appelle le *voisinage* de A ou l'*entourage* de A.

Les points du voisinage σ d'un point A peuvent être représentés d'une façon biunivoque par les points d'un certain *domaine de Jordan* dans le plan analytique (x, y). On dit de ce domaine de Jordan qu'il est une *image* des environs σ de A.

Chaque domaine de Jordan contenu dans une image de σ, et comprenant à son intérieur l'image du point A, est une image du voisinage déterminé σ_1 du point A.

Si l'on envisage diverses images des mêmes environs σ de A, la correspondance de ces diverses images est biunivoque et continue.

Si B est un point déterminé des environs σ de A, σ peut aussi être envisagé comme formant les environs de B.

Étant donnés un voisinage σ_1 et un voisinage σ_2 d'un même point A, on peut toujours envisager un voisinage σ de A commun à σ_1 et à σ_2.

Si A et B sont deux points quelconques du plan abstrait, on peut envisager un voisinage σ de A qui contienne B.

Il y a lieu de remarquer qu'en formulant ainsi ces postulats on envisage comme concept primitif non défini, non seulement le concept du *voisinage* d'un point, mais aussi celui d'une *certaine représentation* de ce voisinage sur un domaine de Jordan. Ceci suppose qu'entre toutes les correspondances (continues ou discontinues) pouvant être établies entre les deux variétés à deux dimensions envisagées (le voisinage de A et son image) on ait fait un choix. Il faudrait donc formuler expressément une règle déterminée précisant ce choix. Cette règle ne se trouve pas, du moins explicitement, formulée dans le système de *D. Hilbert*; mais *D. Hilbert* y supplée en supposant que la correspondance biunivoque entre deux domaines de Jordan, images du même voisinage, est *continue*. Une telle hypothèse ne permet pas toutefois de reconnaître si un domaine donné de Jordan correspondant biunivoquement à un voisinage σ d'un point A est, ou non, une image de ce voisinage, à moins qu'on ne suppose déjà connue a priori de

279) Nachr. Ges. Gött. 1902, p. 233, Grundlagen[27]), (3e éd.) p. 122 en note.

quelque façon *une* image, au moins, de σ; or cette dernière hypothèse revient à se donner dans le voisinage du point A la distribution en réseau

$$x = \text{constante}, \quad y = \text{constante}$$

et nous ramène donc, en réalité, à la définition *génétique* de v_2.

Au concept de variété élémentaire ouverte v_2 se rattachent les concepts de toutes les variétés connexes à deux dimensions.

Pour passer du concept de v_2 au concept de surface ou de variété élémentaire à deux dimensions *limitée par une ligne* il suffit de modifier le concept de v_2 d'une façon entièrement analogue à celle qui nous a permis de passer du concept de v_1 à celui de V_1. Cette analogie parfaite nous dispense d'insister ici sur ces modifications. Nous désignerons, dans ce qui suit, par V_2 les variétés à deux dimensions correspondant aux surfaces limitées par des lignes.

On parvient au concept plus général des variétés à deux dimensions correspondant aux surfaces *fermées sans bords*, et finalement au concept le plus général d'une variété quelconque à deux dimensions par simple juxtaposition d'un nombre fini de variétés V_2 dont les lignes limites sont soudées convenablement.

Après avoir effectué ces soudures il faut toutefois faire abstraction de la façon particulière dont les variétés V_2 envisagées ont été engendrées et, à cet effet, exprimer par un postulat les relations existant entre deux formations distinctes d'une même variété V_2.

Cela n'a pas encore été fait jusqu'ici en se plaçant, comme il convient, au seul point de vue des principes de la géométrie. On s'est contenté d'effectuer à cet égard quelques recherches d'un caractère plus particulier, comme celles ayant pour objet de définir le *genre* de la variété envisagée ou encore sa *connexion*.

Nous nous contenterons ici de faire remarquer que, à ce point de vue, la propriété qui, pour les surfaces de l'espace ordinaire à trois dimensions, se traduit par le mot „unilatéral" et la propriété contraire qui se traduit par le mot „bilatéral" apparaissent comme des propriétés intrinsèques des variétés à deux dimensions. A ces deux propriétés contraires correspondent respectivement[280]) l'inversibilité du sens de rotation autour d'un point et la non-inversibilité de ce sens de rotation[281]).

23. Lignes tracées sur une surface. Les recherches concernant le concept de la ligne tracée sur une surface ou sur une variété à

280) Cf. *F. Klein*, Math. Ann. 9 (1876), p. 479.

281) Au sujet de ces considérations et de leur extension a des variétés à un nombre quelconque de dimensions, voir l'article III 6.

plus de deux dimensions et, plus généralement, les recherches concernant le concept de la variété continue à m dimensions faisant partie d'une variété continue à $m+n$ dimensions se rattachent tout naturellement aux recherches sur les ensembles continus que *G. Cantor* définit comme des ensembles à la fois parfaits et connexes[282]).

On formule une définition complète d'une ligne [variété élémentaire v_1 (n° **21**)] tracée sur une surface, en postulant[283]):

1°) l'existence d'une disposition continue [et, par suite aussi, de la disposition contraire] à l'*intérieur* de la ligne;

2°) que, si l'on se donne un point A de la ligne et un voisinage σ de A sur la surface, il existe toujours sur la ligne un segment [n° **21**] contenant le point A et entièrement situé dans σ.

De ces deux conditions, la première se rapporte aux propriétés *intérieures* de la ligne en tant que variété élémentaire continue v_1, la seconde à sa propriété *extérieure* (c'est-à-dire relative à la surface) par laquelle la continuité intérieure de la ligne prend le sens de continuité de cette ligne *sur* la surface.

L'ensemble des points rationnels d'un segment *rectiligne* dans le plan et des points irrationnels d'un segment rectiligne parallèle au premier peut d'ailleurs être disposé de façon que la condition (1) soit remplie sans que, dans le plan de ces deux segments, la condition (2) le soit.

On remarquera que la proposition (2) indique que la ligne est un ensemble dense dans un intervalle[284]) et que la condition de continuité intérieure (1) y ajoute que cet ensemble est *clos* ou *fermé* (abgeschlossen) en sorte que les conditions (1) et (2) réunies indiquent que l'ensemble est *parfait* au sens de *G. Cantor* [cf. II 1, **21** note 288].

De plus, d'après la condition (1), la disposition intérieure est telle qu'il y a toujours, entre deux points quelconques de la ligne, une suite de points intermédiaires, ce qui exclut les ensembles formés de plusieurs parties continues séparées les unes des autres.

La définition de la ligne continue *fermée* (sans point double) *tracée sur une surface* est entièrement analogue à celle de la ligne (variété élémentaire continue v_1) donnée au n° **21**. Le théorème de

282) Voir les articles I 7 et II 2.

283) Voir *F. Enriques*, Conferenze di geometria (cours autographié) Bologne 1894/5, p. 45; Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 222.

284) *G. Cantor* [Math. Ann. 21 (1883), p. 545; Acta math. 7 (1885/6) p. 105] dit qu'un ensemble est *dense dans un intervalle* (*in sich dicht*) lorsque chaque point de l'ensemble situé dans cet intervalle est un point-limite de points de cet ensemble.

C. Jordan [nº **20**] s'applique[285]) à ces lignes et la réciproque de ce théorème s'y applique aussi comme l'a montré *A. Schoenflies*[286]).

Dans des recherches plus profondes concernant la décomposition d'une surface par des lignes tracées sur cette surface, on est amené à étudier le rapport de ces lignes avec les lignes coordonnées tracées sur la surface. Nous nous contenterons ici de renvoyer à cet égard à ce qui a été dit [nº **22**] sur les lignes tracées dans un plan.

Lorsque, dans ce qui suit, on aura occasion de parler d'une *ligne analytique* tracée sur une surface (ou sur une variété quelconque) on supposera toujours qu'une double *famille de lignes* est donnée sur la surface et y détermine un *système de coordonnées curvilignes.* C'est seulement relativement à cette double famille de lignes que le fait pour une ligne donnée d'avoir le caractère d'une *ligne analytique* acquiert un sens déterminé.

Principes de la géométrie projective.

24. Postulats concernant une région de l'espace. En étudiant systématiquement les propriétés graphiques des figures sans faire intervenir de notion métrique, *K. G. Chr. von Staudt*[287]) a posé les fondements de la géométrie projective.

Dans une analyse critique de principes sur lesquels repose cette science, *F. Klein*[288]) a surtout insisté sur ce que la géométrie projective est entièrement indépendante du postulat des parallèles: cela résulte déjà de ce qu'on peut y effectuer toutes les constructions dans une région *limitée* de l'espace, convenablement choisie.

Les postulats de la géométrie projective dans une région limitée de l'espace ont été analysés et formulés en toute rigueur par *M. Pasch*[289]).

Si la région de l'espace que l'on envisage est limitée par un tétraèdre, ou par une surface convexe, il suffit de prolonger dans les deux sens, à l'intérieur de cette région, chacun des segments rectilignes qu'on y peut concevoir, pour parvenir à la notion générale de *ligne droite* (en tant que définie à l'intérieur de cette région).

Les propriétés caractéristiques des segments rectilignes énoncées au point de vue actuel [nº **10**], à l'exclusion toutefois de la continuité, et la propriété que „deux points déterminent un segment rectiligne“ forment le contenu des huit premières propositions fondamentales de *M. Pasch*: ce sont, si l'on veut, les *postulats de la droite.*

Viennent ensuite les *postulats du plan*, ou plutôt de la surface plane dans la région limitée envisagée. Ils sont au nombre de quatre et concernent la détermination du plan par trois points non en ligne droite, la propriété du plan de contenir le segment rectiligne déterminé par deux points arbitrairement fixés dans le plan, la propriété de deux plans quelconques ayant un point commun d'avoir nécessairement un second point commun, enfin la propriété d'une droite quelconque située dans le plan d'un triangle ABC et rencontrant un des côtés de ce triangle (c'est-à-dire un des trois segments rectilignes AB, BC ou CA) de rencontrer nécessairement un de ses deux autres côtés[290]). Cette dernière propriété exprime, au fond que „la droite

285) *F. Enriques* estime que ce théorème pourrait être démontré en s'appuyant seulement sur la définition de ces lignes continues fermées. Il serait alors démontré que le théorème de *C. Jordan* ne dépend aucunément du choix que l'on fait du système de coordonnées dans le plan.

286) Cf. III 2, nº 8.

287) Geometrie der Lage, Nuremberg 1847; Beiträge zur Geometrie der Lage (en 3 fascicules), Nuremberg 1856/60.

288) Nachr. Ges. Gött. 1871, p. 419; Math. Ann. 4 (1871), p. 573; 6 (1873), p. 112; 7 (1874), p. 531; 17 (1880), p. 52.

289) Neuere Geom.[24]); cf. *G. Peano*, Principii[25]).

290) Ces postulats sont d'ailleurs équivalents aux postulats I du nº **9** et II du nº **10**. Si on leur adjoint le postulat de *R. Dedekind* sous la forme descriptive du nº **13**, on a un *système complet de postulats descriptifs* pour une région limitée de l'espace.

La réduction du concept du plan proposée par *G. Peano* [Rivista mat. 4 (1894), p. 51] une fois admise, les postulats descriptifs dans une région limitée de l'espace, abstraction faite du postulat de la continuité, peuvent être formulés de la façon suivante:

1º) Il y a une infinité d'éléments à chacun desquels on donne le nom de *point.*

2º) Deux points distincts quelconques A, B déterminent univoquement une classe de points, renfermant une infinité de points, classe à laquelle ils appartiennent eux-mêmes et à laquelle on donne le nom de *segment* joignant les deux points A et B, qu'on désigne par AB. Deux points quelconques C et D du segment AB déterminent un segment CD dont chacun des points appartient au segment AB. Si C est un point du segment AB tout point D (autre que C) de ce segment AB appartient soit au segment AC soit au segment CB mais ne peut appartenir à la fois à AC et à CB.

3º) Tout segment AB détermine deux autres classes de points auxquelles on donne respectivement le nom de prolongement de AB au delà de A et de prolongement de AB au delà de B.

Le prolongement de AB au delà de B, par exemple, est une classe de points tels:

α) que tout point de ce prolongement détermine avec B un segment auquel appartient B,

β) que si C est un point quelconque de AB, le prolongement de CB au delà de B coïncide avec le prolongement de AB au delà de A, divise le plan en *deux* parties" et elle postule, par suite, que le plan est une surface dont la droite est une ligne [cf. n° **21**].

Dans ces postulats, les concepts de segment rectiligne et de surface plane apparaissent comme primitifs (donnés empiriquement).

γ) que le prolongement de AC au delà de C est composé du segment CB et de son prolongement au delà de B.

La définition du prolongement de AB au delà de A est identique, à l'ordre des deux points A, B près.

4°) Il n'y a pas de point appartenant à la fois à l'un et à l'autre des deux prolongements d'un segment.

*La définition 3°) du *prolongement* d'un segment AB (au delà de B par ex.) peut aussi être formulée de la façon suivante [cf. *F. Schur*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909, p. 1] après avoir formulé (1°) et (2°) comme plus haut:

3') Si C est un point de segment AB distinct de B et si B appartient à un segment CD, le point C, donc aussi B, appartient au segment AD.

Définition du prolongement. Les postulats 1°), 2°), 3') étant posés, on appelle *prolongement* du segment AB au delà de B l'ensemble des point D tels que le point B appartienne à chacun des segments AD.

A cette définition on joint encore le postulat:

3'') Si C appartient simultanément aux deux segments AB et AD, ou bien le point B est sur AD, ou bien le point D est sur AB.*

Définition de la droite. Une droite AB se compose des points du segment AB et de ceux des deux prolongements de ce segment AB au delà de A et au delà de B.

5°) A l'extérieur de chaque droite il y a des points.

6°) Soient A, B, C trois points non en ligne droite; désignons par D un quelconque des points du segment BC et par D un quelconque des points du segment AD. Il y a sur AB un point F tel que E soit un des points du segment CF.

7°) Soient A, B, C trois points non en ligne droite. Désignons par D un quelconque des points du segment BC et par F un quelconque des points du segment AB. Les deux segments AD et CF ont un point en commun.

Définition du triangle. Un *triangle* est formé par l'ensemble des points des segments obtenus en joignant successivement trois points A, B, C, non en ligne droite, à tous les points des segments BC, AC, AB.

Définition du plan. Un *plan* est formé par l'ensemble des points des droites obtenues en joignant successivement trois points A, B, C, non en ligne droite, à tous les points des droites BC, CA, AB.

**F. Schur* [Grundlagen [81]), p. 7] ajoute encore:

8°) A l'extérieur de chaque plan il y a des points.

Définition de l'espace. L'*espace* est formé par l'ensemble des points des droites obtenues en joignant d'une part successivement quatre points A, B, C, D, non situés dans un plan, respectivement à tous les points des triangles BCD, CDA, DAB, ABC, et d'autre part successivement les points de segments AB, AC, AD, BC, BD, CD à tous les points des segments CD, BD, BC, AD, AC, AB.

A cette définition on joint encore le postulat: A l'extérieur de l'espace il n'y a aucun point.*

Pour passer de la notion d'un espace limité à celle de l'espace projectif il suffit d'adjoindre aux points qui composent l'espace limité de nouveaux éléments convenablement définis auxquels on a donné le nom de *points idéaux.*

Ces éléments sont idéaux au même titre que les points que l'on suppose communs à l'infini à deux droites parallèles [291]). On les définit en généralisant le concept de „gerbe de droites" qui, au sens primitif du mot, représente l'ensemble des droites passant par un même point donné de la région limitée de l'espace que l'on envisage.

Soient a et b deux droites situées dans un même plan. Si chacune des deux droites c et d est située dans un même plan avec a et dans un même plan avec b, les deux droites c et d seront aussi situées dans un même plan. Cette proposition, démontrée par *M. Pasch* [292]) sans supposer que les deux droites a et b aient un point en commun, permet de généraliser le concept de la gerbe de droites.

On appellera *gerbe de droites* l'ensemble des droites, deux à deux situées dans un même plan, sans être toutes dans un même plan. Lorsque les droites de la gerbe ne se rencontrent pas toutes en un même point de la région limitée de l'espace envisagée, on dira que la gerbe est *impropre* pour cette région et que ses droites ont en commun un *point idéal.*

De là les concepts de *point idéal,* de *droite idéale,* de *plan idéal,* relativement à la région limitée de l'espace envisagée [293]).

L'introduction des éléments idéaux permet d'énoncer les propriétés concernant la détermination des droites et des plans au moyen d'ensembles de points, et les propositions concernant les intersections des droites et des plans, sans avoir besoin de modifier ces énoncés dans certains cas particuliers.

---

291) *G. Battaglini* [Rendic. Accad. Napoli (1) 6 (1867), p. 163; Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 202, 265] a déjà observé que, dans la géométrie de Lobačevskij, les points à l'infini de la droite sont considérés comme reliés *idéalement* entre eux; *F. Klein* [Math. Ann. 6 (1873), p. 130] remarque que les points idéaux sont, comme les points à l'infini, donnés par des gerbes de droites et cette remarque est faite à nouveau par *G. Battaglini* [Giorn. mat. (1) 12 (1874), p. 300].

La théorie complète des points idéaux a été développée par *M. Pasch* [Neuere Geom. [24]), p. 40]. Voir aussi *V. Reyes y Prosper* [Math. Ann. 32 (1888), p. 157], *M. Pasch* [id. p. 159], *F. Schur* [id. 39 (1891), p. 113], *R. Bonola* [Giorn. mat. (2) 7 (1900), p. 105].

292) Math. Ann. 32 (1888), p. 159.

293) *Le fait que ces éléments idéaux peuvent être introduits sans faire usage du postulat sur lequel on s'appuie pour énoncer le théorème fondamental de la projectivité [n° **27** γ] est important (Note de *F. Schur*).*

Mais cette introduction d'éléments idéaux nous oblige à modifier la notion intuitive que nous avons de la *droite*: par adjonction des points *idéaux* cette ligne apparaît plutôt comme une ligne *fermée* que comme une ligne *ouverte*.

Notre intuition journalière de l'espace se trouve ainsi modifiée; le concept de l'*espace ordinaire* est remplacé par celui de l'*espace projectif*.

25. Postulats de l'espace projectif complet. On peut aussi parvenir au concept de l'espace projectif par une voie entièrement distincte de la précédente.

L'intuition visuelle peut, en effet, par simple abstraction, nous amener à ce concept. Nous n'examinerons pas ici les difficultés que cette façon de procéder présente au point de vue psychologique. Notre but sera plutôt de montrer comment, en supposant le concept de l'espace entièrement acquis, le géomètre peut développer un système de postulats élémentaires caractérisant l'espace projectif[294]).

Les postulats caractérisant l'espace projectif appartiennent à deux groupes bien distincts:

a) *Les postulats relatifs à la détermination de droites et de plans et aux intersections des droites entre elles, des plans entre eux ou des droites et des plans.*

Parmi ces postulats il faut signaler tout d'abord celui d'après lequel „deux points déterminent *une droite*", c'est-à-dire un ensemble de points d'ailleurs tout aussi bien déterminé par deux quelconques de ses points.

Le *plan* (complet) peut être *engendré* en projetant d'un point extérieur l'ensemble des points d'une droite.

Le postulat fondamental du plan peut être énoncé de diverses manières. *M. Pieri*[295]) l'a énoncé sous la forme très simple que voici:

„Soient A, B, C trois points non en ligne droite. La droite déterminée par A et par un point fixé arbitrairement sur la droite BC et la droite déterminée par B et par un point fixé arbitrairement sur la droite CA, ont un point commun[296])."

294) A cet ordre d'idées appartiennent les recherches de *F. Amodeo* [Atti Accad. Torino 26 (1890/1), p. 741], *G. Fano* [Giorn. mat. (1) 30 (1892), p. 106], *F. Enriques* [Conferenze di geometria (cours autographié) Bologne 1894/5, p. 5 (nº 3)], *M. Pieri* [Atti Accad. Torino 30 (1894/5), p. 607; **31** (1895/6), p. 381, 457; **32** (1896/7), p. 343; Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 31 (1898), p. 780; Memorie Accad. Torino (2) 48 (1898), p. 1]; *B. Levi* [id. (2) 54 (1904), p. 278]. On peut aussi consulter *H. Thieme*, Progr. Posen 1900.

295) Memorie Accad. Torino (2) 48 (1898), p. 16.

296) L'énoncé que *F. Schur* [Grundlagen[81]), p. 7/9] donne d'après *E. H. Moore* [Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 147] postule *moins* que l'énoncé de *M. Pieri*.

De là résulte la propriété du plan complet dans l'espace projectif de contenir la droite complète déterminée par deux quelconques des points de ce plan et aussi la propriété, pour deux droites d'un même plan, d'avoir toujours un point commun.

De même que le plan peut être engendré par projection centrale d'une droite, de même l'espace projectif peut être engendré par projection centrale d'un plan. Pour parvenir ainsi au concept de l'espace projectif ordinaire il faut alors postuler que par projection on épuise l'ensemble de *tous* les points et admettre, à cet effet, qu'une droite et un plan ont toujours un point commun. Ce dernier postulat équivaut à celui d'après lequel, dans la région limitée de l'espace envisagée au nº **24**, deux plans qui ont un point commun ont nécessairement un second point commun. Son rôle est de limiter à *trois* le nombre des dimensions de l'espace projectif.

En faisant abstraction de ce postulat, on engendre encore, en effet, par projection centrale d'un plan, un espace projectif S_3 à trois dimensions, mais rien n'empêche d'admettre qu'il existe un point au moins hors de S_3. Si de ce point on projette S_3 on engendre un espace projectif S_4 à quatre dimensions, hors duquel on peut encore admettre qu'il existe un point au moins, et en continuant ainsi on parvient à un espace projectif S_n à un nombre quelconque n de dimensions.

Cette génération récurrente d'espaces projectifs à n dimensions a été exposée par *G. Veronese*[297]). En y adjoignant les postulats **b** dont il va être question, relatifs au caractère linéaire de la droite et au caractère superficiel du plan, l'espace S_n apparaît comme une variété particulière à n dimensions dont la propriété caractéristique est exprimée par le postulat du plan convenablement modifié pour $n > 2$.

b) *Les postulats relatifs aux propriétés linéaires de la droite et aux propriétés superficielles du plan.*

La droite de l'espace projectif est une ligne fermée; ses points sont rangés en un ordre cyclique [nº **22**].

La propriété du plan d'être une surface dans laquelle les droites sont des lignes peut être énoncée au point de vue génétique en postulant le *caractère projectif* de la disposition cyclique des points de la droite[298]).

297) Il en sera question dans l'article III 26.

298) Voir *F. Enriques*, Lezioni geom. proiettiva[27]), p. 27; éd. allemande par *H. Fleischer*, Vorlesungen über projektivische Geometrie, Leipzig 1903, p. 24.

De ce postulat et de celui d'après lequel „deux droites d'un même plan ont toujours un point commun", il résulte que le plan projectif est une surface *à un sens*[299]).

On peut remarquer, à ce propos, que la différence qui se manifeste à cet égard entre le plan métrique ordinaire euclidien et le plan projectif ne se retrouve pas quand on passe des variétés à deux dimensions aux variétés à trois dimensions.

Dans l'espace projectif aussi bien que dans l'espace métrique ordinaire euclidien il y a toujours deux sens hélicoïdaux non réductibles l'un à l'autre.

26. Coordonnées projectives. Les postulats du n° **24** ou les postulats équivalents du n° **25** permettent de représenter les points de l'espace projectif au moyen des rapports de quatre coordonnées homogènes et cela de façon que chaque plan soit représenté par une équation du *premier* degré. On a donné à ces coordonnées homogènes le nom de *coordonnées projectives.*

Dans l'espace ordinaire (euclidien ou non euclidien) on obtient un système de coordonnées projectives en fixant un tétraèdre fondamental et un point-unité E. Pour obtenir les coordonnées projectives d'un point P on mène un plan par ce point P et chacune des six arêtes d_{hi} du tétraèdre fondamental et l'on détermine l'intersection P_{jk} de ce plan et de l'arête d_{jk} du tétraèdre opposée à d_{hi}; on dit de ce point P_{jk} qu'il est la *projection* de P sur l'arête d_{jk}. On projette de même le point-unité E sur les six arêtes du tétraèdre. On obtient ainsi sur chacune de ces six arêtes d_{jk} quatre points: les deux sommets A_j, A_k du tétraèdre et les projections P_{jk} et E_{jk} de P et de E. Ces quatre points rangés dans l'ordre indiqué déterminent un rapport anharmonique.

$$(A_j,\ A_k,\ P_{jk},\ E_{jk});$$

on appelle coordonnées projectives x_h, x_i, x_j, x_k du point P quatre nombres dont les rapports sont précisément égaux aux six rapports projectifs ainsi définis sur les six arêtes du tétraèdre, en sorte que, pour j différent de k, on a

$$\frac{x_j}{x_k} = (A_j,\ A_k,\ P_{jk},\ E_{jk}), \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4);$$

les propriétés fondamentales des rapports projectifs montrent aisément

299) *L. Schläfli* dans *F. Klein*, Math. Ann. 7 (1874), p. 550; *W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, (2^e éd.) Leipzig 1875, p. 549, 739; (3^e éd.) 3, Leipzig 1888, p. 62, 75, 102/9. Cf. n^{os} **22**, **30**.

que ces relations concordent et définissent les quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 à un même coefficient de proportionnalité près[300]).

Dans l'espace projectif la même construction permet encore de définir les coordonnées projectives d'un point quelconque P, pourvu que l'on ait soin de définir le rapport anharmonique, ou comme dit *K. G. Chr. von Staudt*, le *quaterne* (*Wurf*) de quatre points d'une droite, rangés dans un ordre déterminé, comme un *nombre*, sans que dans cette définition intervienne la notion de longueur d'un segment, notion qui n'a aucun sens en géométrie projective.

La définition graphique du rapport projectif se rattache, comme l'a montré *K. G. Chr. von Staudt*[301]) au calcul des quaternes qui lui est dû et que *J. Lüroth*[302]) a complété et systématisé.

La définition graphique du rapport anharmonique s'étend d'ailleurs aux points imaginaires pourvu que l'on tienne compte du concept d'*involution.*

Dans le cas de points réels on peut définir graphiquement le rapport projectif

$$(A,\ B,\ C,\ P)$$

de quatre points d'une droite donnée pris dans un ordre déterminé, de façon à ramener cette définition à la mesure ordinaire des longueurs. Il suffit, pour cela, d'envisager C comme s'il était le point à l'infini de la droite donnée. Les points P pour lesquels le rapport projectif (A, B, C, P) a une valeur rationnelle r appartiennent alors nécessairement à la *suite harmonique* déterminée par A, B et C comme on l'explique au n° **27**; les constructions répétées du quatrième harmonique à trois points donnés à l'aide desquelles on les obtient dépendent de la valeur de r. Les points P pour lesquels le rapport an-

300) *A. F. Möbius* [Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, chap. 3; Werke 1, Leipzig 1885, p. 54] a été amené à introduire ce système de coordonnées projectives (le plus général que l'on puisse concevoir) en remarquant que les rapports de ses coordonnées barycentriques aux coordonnées respectives d'un point fixe (le point-unité) s'expriment au moyen de rapports anharmoniques.

On peut consulter, au sujet de ces coordonnées, *W. Fiedler*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 15 (1870), p. 152/82; Darstellende Geom.[299]), (2^e éd.) p. 549, 739; (3^e éd.) 3, p. 69, 75, 102/9.

Au sujet de l'introduction des rapports anharmoniques en géométrie non-euclidienne, voir *F. Klein*, Math. Ann. 6 (1873), p. 129.

301) Beiträge zur Geometrie der Lage 2, Nuremberg 1857, p. 261. Cf. *W. R. Hamilton*, Elements of quaternions, Londres 1866, p. 24, 62; *W. Fiedler*, Darstellende Geom.[299]), (3^e éd.) 3, p. 31.

302) Math. Ann. 8 (1875), p. 145.

harmonique (A, B, C, P) a une valeur irrationnelle s'obtiennent ensuite par un passage à la limite[303]).

K. G. Chr. von Staudt a étendu ses résultats au cas où les éléments envisagés sont imaginaires [cf. III 8].

27. Remarques concernant les propositions fondamentales de la géométrie projective. Du système de postulats du nº **24** et aussi de celui du nº **25**, on peut déduire toute la géométrie projective[304]). Nous nous contenterons de faire ici quelques remarques concernant la dépendance dans laquelle se trouvent les principaux théorèmes de cette géométrie avec les postulats en question.

α. *Théorème de Desargues*[305]): Si deux triangles ABC, $A'B'C'$ sont tels que les trois paires de côtés

$$AB, A'B';\ BC, B'C';\ CA, C'A'$$

se coupent en trois points en ligne droite, les trois droites

$$AA', BB', CC'$$

sont concourantes. Et réciproquement.

K. G. Chr. von Staudt[306]) a démontré ce théorème en effectuant des constructions dans l'espace et en ne s'appuyant que sur les postulats de l'appartenance.

F. Klein[307]) a appelé l'attention sur ce que le théorème de Desargues ne peut être démontré, en s'appuyant sur les postulats de la géométrie projective, qu'à l'aide de constructions effectuées dans l'espace. Si, en effet, on pouvait le démontrer en s'appuyant uniquement sur les postulats de la géométrie plane, sans quitter une région *limitée* du plan, il en résulterait qu'étant donnée sur une surface quelconque une famille de lignes dont *une* et *une seule* passe par deux points arbitrairement fixés sur la surface, il suffirait de choisir convenablement sur cette surface un système de coordonnées curvilignes (u, v) pour obtenir une représentation de la famille de lignes envisagées par des équations du premier degré en u, v. Or il n'en est pas ainsi, comme on le voit immédiatement en envisageant la famille des lignes géodésiques d'une surface à courbure variable; comme l'a montré *E. Beltrami*[308]) ces lignes ne peuvent être représentées par des équations du premier degré quel que soit le système de coordonnées curvilignes fixées sur la surface.

D. Hilbert[309]) a constitué par des procédés élémentaires une géométrie conventionnelle du plan complet dans laquelle le théorème de Desargues ne s'applique pas, bien que tous les postulats projectifs y soient satisfaits. On voit donc qu'en géométrie projective pure le théorème de Desargues ne découle pas des postulats du plan; il ne découle que des postulats de l'espace à trois dimensions.

Il n'en est d'ailleurs plus ainsi lorsqu'on introduit en géométrie projective les concepts métriques en posant les postulats de la congruence. On peut alors en effet démontrer le théorème de Desargues dans le plan (sans effectuer de constructions dans l'espace [cf. nº **18**]).

D. Hilbert a aussi remarqué qu'inversement le théorème de Desargues dans le plan permet de se passer complètement des postulats de l'espace dans la démonstration des propriétés des figures du plan projectif[310]).

β. *Sur la séparation des points conjugués d'une division harmonique*: Le fait de cette séparation des points conjugués par l'un ou l'autre des deux autres points de la division harmonique est établi par *K. G. Chr. von Staudt* en faisant appel à une notion qui n'est pas purement graphique, la notion d'un angle solide (ayant pour arêtes des demi-droites concourantes) considéré au point de vue métrique.

La démonstration que *M. Pasch*[311]) a donnée du même théorème présente une lacune; elle n'exclut pas, en effet, la possibilité pour le

303) Voir par ex. *R. de Paolis,* Atti R. Accad. Lincei, *Memorie mat.* (3) 11 (1881), p. 491; *F. Enriques* [Lezioni geom. proiettiva[27]), (1re éd.) p. 348 (appendice); éd. allemande[298]) Anhang; Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 222] met en évidence la façon dont l'introduction des coordonnées projectives dépend de la considération de la projectivité de deux espaces projectifs abstraits.

304) Voir l'article III 8.

305) *Le théorème a été publié pour la première fois par *A. Bosse* [Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective, Paris 1648, p. 340]. L'exposé de *A. Bosse* a été réimprimée par *N. G. Poudra*, dans les Œuvres de Desargues 1, Paris 1864, p. 413/5. *G. Desargues* démontre le théorème d'abord pour deux triangles situés dans l'espace (à peu près comme on le fait dans les traités contemporains) puis pour deux triangles situés dans le même plan en s'appuyant sur le théorème des transversales auquel on donne parfois le nom de *théorème de Ménélas* (Note de *G. Eneström*).*

306) Geometrie der Lage, Nuremberg 1847, p. 52. *G. Desargues* lui-même[305]) en avait donné une démonstration métrique.

307) Math. Ann. 6 (1873), p. 112/45.

308) Ann. mat. pura appl. (1) 7 (1865), p. 185 [cf. III 33 et 34].

309) Grundlagen[27]), (2e éd.) p. 49 (§ 23).

Au sujet de la géométrie non désarguienne, voir aussi *F. R. Moulton*, Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 192.

310) L'emploi d'espaces projectifs S_n à un nombre de dimensions $n > 3$, dans le but de démontrer les propositions concernant l'espace projectif S_3 à trois dimensions, n'aboutit à aucun résultat qu'on ne pourrait déduire directement des postulats de la géométrie projective de l'espace S_3 lui-même. Cf. *C. Segre*, Rivista mat. 1 (1891), p. 42/66.

311) Neuere Geom.[24]), p. 85.

quatrième harmonique à trois points donnés, de coïncider avec l'un de ces trois points. *G. Fano*[312]) en a conclu qu'il y avait lieu d'introduire ici un nouveau postulat. Il n'en est rien cependant comme il résulte nettement de la démonstration du même théorème donnée par *F. Enriques*[313]): cette démonstration repose essentiellement sur la disposition des points sur la droite et sur le caractère projectif de cette disposition sans que la continuité intervienne en aucune façon, en sorte que le théorème dépend uniquement des postulats projectifs que l'on vient d'énoncer.

γ. Sur le théorème fondamental de la projectivité, ou théorème de Staudt:

„La projectivité de deux droites est entièrement déterminée par trois paires de points homologues".

L'étude de la correspondance particulière entre les points de deux plans à laquelle on a donné le nom d'*homographie* (plane) [*collinéation* (plane)], correspondance dans laquelle à chaque droite du premier plan correspond une droite du second plan et inversement, a amené *K. G. Chr. von Staudt*[314]) à *définir la projectivité* entre droites, ou plus généralement entre formes *de rang un*, comme *une correspondance biunivoque dans laquelle à toute division harmonique correspond une division harmonique.*

La construction de figures projectives à l'aide de projections et de sections repose alors sur le théorème fondamental cité au début de ce numéro. *K. G. Chr. von Staudt* en ramène d'ailleurs la démonstration dans tous les cas à sa démonstration dans le cas où les deux formes envisagées sont deux ponctuelles projectives ayant même support. Dans ce cas particulier, le théorème se ramène à celui-ci:

„Toute projectivité de deux ponctuelles sur une même droite ayant trois points doubles revient à l'*identité* de ces deux ponctuelles (en un point double les deux points correspondants des deux ponctuelles sont confondus)."

Il est essentiel d'observer que le rôle fondamental joué par ce théorème dans l'étude de la projectivité des figures repose sur la façon dont *K. G. Chr. von Staudt* définit la projectivité.

Si, au lieu de cette définition on adopte celle de *J. V. Poncelet*[315]), d'après laquelle:

312) Giorn. mat. (1) 30 (1892), p. 106.

313) Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 27 (1894), p. 560; Lezioni geom. proiettiva[27]), (1re éd.) p. 58.

314) Geometrie der Lage, Nuremberg 1847, p. 49 (§ 9).

315) Cette définition a été reprise par *L. Cremona* [Elementi di geometria proiettiva ad uso degli istituti tecnici, Turin 1873, p. 20] et par *J. Thomae* [Ebene geometrische Gebilde, Halle 1873, p. 12].

Même dans les meilleurs des traités plus anciens, on confond souvent les relations projectives entre figures élémentaires de rang un avec les correspondances biunivoques de ces figures entre elles, ce qui n'est permis que lorsqu'il s'agit de correspondances établies par une construction donnant lieu à des fonctions algébriques ou tout au moins analytiques.

„deux droites sont dites projectives lorsqu'elles se correspondent par projections ou sections",

le fait que la détermination de la projectivité de deux figures ne dépend que de trois paires d'éléments homologues a moins de portée, en ce qu'il ne permet pas, à lui tout seul, d'édifier la théorie de l'homographie entre plans et espaces. Ce n'est donc plus qu'une partie du „théorème fondamental de la géométrie projective". Quand nous envisagerons cette proposition, en nous plaçant au point de vue de *J. V. Poncelet*, nous la désignerons sous le nom de théorème fondamental de la géométrie projective entendu *au sens restreint.*

La démonstration graphique que *K. G. Chr. von Staudt* a donnée de son théorème présente une lacune qui a été signalée par *K. Weierstrass*[316]) dans son cours professé à l'Université de Berlin. Cette lacune a été comblée de diverses façons en faisant appel à la continuité des droites envisagées ou à quelque autre notion qui en dépend.

F. Klein[317]) ainsi que *J. Lüroth* et *H. G. Zeuthen*[318]), abandonnant la voie suivie par *K. G. Chr. von Staudt* qui suppose *donnée* la correspondance projective, ont montré comment cette correspondance s'obtient, quand on se donne trois paires (A, A'), (B, B'), (C, C') de points homologues, en construisant les deux ponctuelles engendrées par les deux suites de points harmoniques déterminées l'une par les trois points A, B, C, l'autre par les trois points homologues A', B', C'.

Pour construire la suite de points harmoniques déterminée par A, B, C par exemple, on construit d'abord les quatrièmes harmoniques D à A, B, C, rangés de toutes les manières possibles, puis les quatrièmes harmoniques à trois quelconques des points A, B, C, D, et ainsi de suite indéfiniment.

La démonstration de *F. Klein* repose sur une répétition de la

316) *K. Weierstrass* a aussi donné une démonstration génétique, mais non descriptive, du même théorème de *K. G. Chr. von Staudt* envisagé au sens restreint. Cette démonstration a été publiée par *E. Kötter* et *H. A. Schwarz* dans *K. Weierstrass*, Werke 3, Berlin 1903, p. 161.

317) *F. Klein*, Math. Ann. 7 (1874), p. 531.

318) Pour ces recherches de *J. Lüroth* et *H. G. Zeuthen*, voir *F. Klein*, Math. Ann. 7 (1874), p. 535/6. Voir aussi les recherches de *F. Klein*, Math Ann. 37 (1890), p. 544/72, en partic. p. 565 et suiv.

construction du quatrième harmonique pour les points-limites de chacune des deux ponctuelles ainsi formées.

J. Lüroth et *H. G. Zeuthen* évitent, au moins au début, de faire usage de la continuité de la droite en montrant de quelle façon figurent dans tout segment de la droite des points de chacune des deux suites de points harmoniques ainsi formées. La construction qu'ils indiquent est très facile à réaliser quand on rejette à l'infini un des trois points fondamentaux A, B, C. Les abscisses des points de *chacune* des deux suites de points harmoniques qu'ils envisagent sont alors représentées par une suite de fractions ayant pour dénominateurs les puissances successives de 2 et il est aisé de voir que chaque segment de la droite contient des points ayant pour abscisses des termes ou des sommes de termes de *chacune* de ces deux suites, pourvu qu'on suppose le postulat d'Archimède. A l'époque où ces recherches ont eu lieu, on admettait d'ailleurs ce postulat comme évident; ce n'est qu'un peu plus tard[319]) qu'on a commencé à en discuter le caractère[320]). Finalement on a ainsi une démonstration, métrique à certains égards, du théorème fondamental qui ne diffère pas essentiellement de celle donnée par *M. Pasch*[321]).

G. Darboux[322]), tout en se rapprochant du concept de *K. G. Chr. von Staudt*, a ramené la question à un point de vue analytique. Il suppose donnée la correspondance projective entre deux droites, au sens de *K. G. Chr. von Staudt*, et il montre que cette correspondance est ordonnée (donc continue). Ceci posé il ramène la question à l'étude de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dont la solution continue est[323])

$$f(x) = ax.$$

319) *O. Stolz*, Ber. naturw.-mediz. Ver. Innsbruck 12 (1881/2), p. 75; Math. Ann. 22 (1883), p. 104.

320) *F. Klein* [Nicht-Euklidische Geometrie (cours autographié Göttingue) 1 (1889/90), p. 315 et suiv.; Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen 1, Leipzig 1890, p. 239 et suiv.] remarque que la suite des quatrièmes harmoniques définie dans le texte au moyen de trois points en ligne droite, si on la définit de même sur une conique au moyen de trois points de cette conique, est intimement liée aux triangles mixtilignes que l'on rencontre dans l'étude des fonctions modulaires elliptiques. De ce que, parmi ces triangles, il y en a d'aussi petits que l'on veut [cf. II 12] on peut conclure intuitivement à la continuité de la suite des quatrièmes harmoniques envisagée.

321) Neuere Geom.[24]), p. 129.

322) Math. Ann. 17 (1880), p. 155.

323) Cf. II 26, **42**.

F. Schur[324]), qui évite d'introduire ici le concept de nombre, surmonte la principale difficulté de la démonstration du théorème de *K. G. Chr. von Staudt* en postulant que si deux points se meuvent sur la droite en sens contraires l'un de l'autre, ils se rencontrent nécessairement en un point déterminé de la droite.

F. Enriques[325]) déduit le théorème de *K. G. Chr. von Staudt* du postulat de la continuité énoncé sous la forme (graphique) de *R. Dedekind.*

En résumé, toutes les démonstrations indiquées s'appuient sur la continuité des droites, énoncée soit sous une forme métrique, soit sous une forme graphique, ou tout au moins sur la possibilité de considérer la droite comme contenue dans une variété continue d'éléments pour laquelle le postulat d'Archimède a lieu.

On s'est demandé s'il ne serait pas possible de faire abstraction de cette hypothèse en envisageant la projectivité comme résultant d'une suite de projections successives. L'étude à laquelle on a été ainsi amené a permis de développer quelques points de la géométrie projective non archimédienne à l'aide desquels la question des relations entre les divers théorèmes fondamentaux de la géométrie projective a pu être envisagée sous un jour tout nouveau [cf. n° **50**].

δ. *Relation entre le théorème fondamental et le réseau de Möbius.* On a vu que la définition de la projectivité de deux droites résulte de la considération de l'homographie entre plans et de l'homographie entre espaces. Il résulte du théorème fondamental de l'espace projectif que cette homographie est déterminée dans le plan par quatre paires de points homologues et dans l'espace par cinq paires de points homologues.

Cette conséquence du théorème fondamental est d'ailleurs entièrement équivalente au théorème fondamental lui-même. Il est remarquable qu'elle puisse être établie directement en utilisant seulement les procédés de construction de ce qu'on appelle les *réseaux de Möbius.*

Dans le plan, par exemple, on définit ces réseaux de la façon que voici:

Soient A, B, C, D quatre points donnés dans le plan, entièrement indépendants les uns des autres. On peut, par des constructions

324) Math. Ann. 18 (1881), p. 252. Cf. *J. Thomae*, Grundriss einer analytischen Geometrie der Ebene, Leipzig 1906, p. 10 et suiv.; *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, (4e éd.) Leipzig 1899, p. 58.

325) Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 27 (1894), p. 565; Lezioni geom proiettiva[27]), (1re éd.) p. 88 et suiv.

Cf. *L. Balser*, Math. Ann. 55 (1902), p. 293/300.

linéaires seulement, obtenir un ensemble de points comprenant *tous* les points dont les coordonnées s'expriment rationnellement au moyen de celles de A, B, C, D, donc par tous les nombres rationnels si l'on prend pour coordonnées de A, B, C, D respectivement

$$(0, 0, 1), \quad (0, 1, 0), \quad (1, 0, 0), \quad (1, 1, 1).$$

A cause du postulat de la continuité on peut dire que cet ensemble de points couvre tout le plan. Chaque point du plan qui n'appartient pas à cet ensemble peut, en effet, être envisagé comme un point-limite déterminé de l'ensemble, en sorte qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les points du plan d'une part et leurs coordonnées (rationnelles ou irrationnelles) d'autre part. C'est à cet ensemble que l'on donne le nom de *réseau de Möbius.*

De la construction des points de ce réseau *A. F. Möbius* déduit la possibilité de déterminer l'homographie dans le plan, pourvu qu'on la suppose définie par une correspondance *continue.*

Si, dans une homographie entre deux plans, on fait se correspondre entre eux quatre paires de points indépendants, les points homologues des réseaux de Möbius construits dans les deux plans, ainsi que leurs points-limites, se correspondent d'une façon biunivoque en sorte que l'homographie est entièrement déterminée.

On remarquera que l'hypothèse de la continuité de la correspondance homographique dans laquelle à chaque droite d'un plan correspond une droite n'est pas une condition qu'il faut adjoindre à la définition. On peut, en effet, *démontrer* cette continuité en supposant seulement la continuité de la droite, comme il résulte de la marche suivie par *K. G. Chr. von Staudt* lui-même.

ε. *Relations entre le théorème fondamental et la théorie des proportions.* Ces relations résultent des deux remarques suivantes:

1) En s'appuyant sur les résultats obtenus dans la théorie arithmétique ordinaire des proportions entre segments de droites que l'on donne dans les éléments, on peut introduire un système de coordonnées projectives quelconques, donc, en particulier, un système de coordonnées cartésiennes [cf. nº **26**].

2) Le théorème fondamental de l'espace projectif entendu au sens restreint, peut être démontré en s'appuyant sur ce que le rapport anharmonique ne change pas quand on effectue une projection de la figure envisagée; cette invariance du rapport anharmonique résulte d'ailleurs, si l'on veut, de la théorie arithmétique ordinaire des proportions.

Quand on fait abstraction de la continuité toutes ces questions se présentent sous un jour entièrement nouveau. Elles ressortent alors du domaine de la géométrie non-archimédienne [cf. nºˢ **46** à **52**].

28. Sur le rôle du concept de la disposition dans l'étude des principes de la géométrie projective. On peut se demander s'il est possible d'établir les principes de la géométrie projective sans faire appel à d'autres données qu'aux concepts fondamentaux du *point* et de la *ligne joignant deux points,* auxquels on adjoint les postulats du groupe (**a**) du nº **25** qui les concernent.

A cette question se rattache un ordre de recherches dans lequel on n'envisage comme données *a priori* qu'un nombre déterminé de points, et dans lequel on n'envisage que les points qui se déduisent de ces points donnés par des constructions rectilignes.

Ces recherches concernent ainsi une *géométrie projective de systèmes remarquables de points.* Elles supposent que l'on se donne au moins quatre points de l'espace [ou du système fondamental envisagé] non situés dans un même plan et, en outre, un point non situé dans l'un des quatre plans déterminés par trois de ces quatre points fondamentaux, de façon que sur chaque droite joignant deux points quelconques on puisse construire, en utilisant les quatre points fondamentaux et le cinquième point envisagé, par projections et sections, *au moins un* nouveau point. Jusqu'ici tout se passe comme dans l'espace projectif ordinaire. Mais des hypothèses faites il ne résulte pas que le quatrième harmonique de trois points A, B, C d'une ligne droite[326]) soit distinct du point C; il n'en est ainsi pour trois points quelconques A, B, C qui si l'on *postule* qu'il en est ainsi pour *un* système de trois points déterminés A, B, C. D'ailleurs, si même on postulait qu'il en est ainsi, on ne pourrait pas pour cela reconnaître si, en partant de trois points A, B, C de la droite et construisant la suite de quatrièmes harmoniques qui s'en déduit comme il a été expliqué au nº **27**, on obtient une *infinité* de points sur la droite. Il existe, en effet, des configurations formées par un nombre *fini* de points qui satisfont, à elles seules, au postulats **a** [nº **25**] de la géométrie projective[327]).

Mais si l'on postule que les points de la droite sont disposés dans un ordre cyclique de caractère projectif, on peut *démontrer* que la droite, et même chacun des segments de la droite, contient une in-

326) Cf. *M. Pasch,* nº **27** β.

327) *G. Fano,* Giorn. mat. (1) 30 (1892), p. 123; *E. H. Moore* [Amer. J. math. 18 (1896), p. 264] a, lui aussi, envisagé des configurations analogues. Voir aussi *G. Hessenberg,* Archiv Math. Phys. (3) 6 (1904), p. 123/7.

finité de points[328]). Toutes les propriétés des divisions harmoniques relatives à la séparation des éléments conjugués s'appliquent et il en est de même des propriétés concernant la suite des quatrièmes harmoniques[329]).

M. Pieri[330]) a mis en pleine lumière le rôle que joue l'hypothèse de la disposition cyclique à caractère projectif dans la théorie des divisions harmoniques et des suites de quatrièmes harmoniques. Dans des recherches [n° **12**] concernant la possibilité de restreindre le nombre des concepts primitifs il montre que l'on peut se passer du concept de la disposition naturelle si l'on postule:

1°) Le quatrième harmonique à trois points en ligne droite est distinct de ces trois points [postulat de Fano, n° **27**].

2°) Si l'on envisage quatre points A, B, C, D sur une droite et qu'on les groupe en couples de trois façon distinctes

$$(AB,\ CD), \quad (AC,\ BD), \quad (AD,\ BC),$$

pour *deux* de ces trois groupes, les deux premiers par exemple, il existe un couple de points harmonique conjugué à la fois à chacun des deux couples du groupe, en sorte qu'un couple de points est harmonique conjugué à la fois au couple AB et au couple CD et qu'un couple de points est harmonique conjugué à la fois au couple AC et au couple BD; mais il n'en est alors pas de même pour le troisième groupe, en sorte qu'aucun couple de points n'est harmonique conjugué à la fois au couple AD et au couple BC.

3°) Si A, B, C, D, E sont cinq points situés sur une même droite et s'il existe un couple de points harmoniques conjugués à la fois au couple AC et au couple BD, et un couple de points harmoniques conjugués à la fois au couple AC et au couple DE, alors il existe aussi un couple de points harmoniques conjugués à la fois au couple AC et au couple BE.

328) Voir *G. Fano* et *F. Enriques*, Rend. Circ. mat. Palermo 9 (1895), p. 79.

329) Le procédé de construction graphique, qui consiste à effectuer toutes les projections et sections possibles à partir de cinq points donnés, conduit au réseau de Möbius, lorsqu'on n'effectue que des constructions rectilignes en partant de cinq points de l'espace convenablement choisis.

En se bornant à ce réseau, le théorème γ de Staudt peut être déduit de celui de Desargues. Le théorème γ de Staudt s'étend ensuite à tout l'espace si l'on suppose (ce qu'on peut d'ailleurs n'envisager que comme une conséquence du postulat de la continuité) que tout point de l'espace est un point-limite du réseau de Möbius construit dans l'espace.

330) Mem. Accad. Torino (2) 48 (1898), p. 1. Voir en partic. Atti Accad. Torino 39 (1903/4), p. 313.

4°) Si A, B, C, D, E sont cinq points situés sur une même droite et appartenant à la suite infinie des quatrièmes harmoniques obtenue en partant de A, B, C et appliquant le procédé indiqué au n° **27**, on peut déterminer un point X tel qu'il n'existe pas de couple de points harmoniques conjugués à la fois au couple AX et au couple DE.

La continuité conduit ensuite à une nouvelle propriété que *M. Pieri*, se plaçant exclusivement au point de vue de l'étude des propriétés projectives des formes de rang *un*, postule en introduisant seulement les irrationalités quadratiques dont il a besoin pour cette étude élémentaire.

Métrique projective.

29. La géométrie métrique ordinaire rattachée à la géométrie projective[331]). Si l'on adjoint aux points de l'espace ordinaire euclidien les points impropres que l'on suppose former un plan (impropre) à l'infini [n° **9**], on peut envisager l'espace euclidien comme un espace projectif particulier dans lequel l'*ombilicale* (cercle imaginaire de l'infini) serait donné dans le plan impropre à l'infini comme intersection (imaginaire) de toutes les sphères de l'espace. Les propriétés métriques de l'espace peuvent alors être envisagées comme propriétés projectives dans l'espace ainsi complété.

C'est ainsi déjà que procède *J. V. Poncelet*[332]) en envisageant les relations métriques des figures planes comme des relations projectives des points de l'espace auxquels on a adjoint les points cycliques (imaginaires à l'infini) communs à tous les cercles du plan, et les relations métriques des figures dans l'espace comme des relations projectives des points de l'espace par rapport au cercle imaginaire de l'infini appartenant à toutes les sphères. De cette façon de présenter les principes de la géométrie métrique il n'a cependant pas déduit l'expression de la distance de deux points métriques ou de l'angle de deux droites. Après lui, *M. Chasles* ainsi que plusieurs autres géomètres français ont, dans les démonstrations de divers théorèmes, fait usage des ombilics (points cycliques) du plan[333]) ou de l'ombilicale dans l'espace; ils ont en particulier envisagé deux droites d'un même plan comme perpendiculaires entre elles lorsque les points à

331) Cf. III 3.

332) Traité des propriétés projectives des figures, (1re éd.) Paris 1822.

333) Traité de géométrie supérieure, (1re éd.) Paris 1852 p. 447/53, 461/2, 502; (2e éd.) Paris 1880, p. 411/6, 424/5, 462

l'infini de ces deux droites et les deux ombilics (points cycliques) du plan forment une division harmonique.

E. N. Laguerre[334]) a observé que, si un système d'angles $A_1, A_2, A_3, \ldots$ d'une figure F est lié par une relation

$$f(A_1, A_2, A_3, \ldots) = 0$$

et qu'on transforme homographiquement la figure F, les angles $A_1', A_2', A_3', \ldots$ en lesquels se transforment $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont liés par la relation

$$f\left(\frac{1}{2i}\log_e a_1,\ \frac{1}{2i}\log_e a_2,\ \frac{1}{2i}\log_e a_3,\ \ldots\right) = 0,$$

où, pour $h = 1, 2, 3, \ldots$, a_h désigne le rapport projectif des deux côtés de l'angle A_h et des deux droites A_hP, A_hQ qui sont les droites transformées des deux droites joignant le point A_h aux deux points cycliques du plan de F.

Il convient toutefois d'observer que *E. N. Laguerre* n'a pas envisagé cette expression comme une *définition* de la mesure de l'angle[335]). La définition graphique du rapport anharmonique due à *K. G. Chr. von Staudt* au moyen d'un nombre fourni par une construction projective lui était étrangère.

A. Cayley[336]) a envisagé les expressions les plus générales de la distance de deux points et de l'angle de deux plans comme des invariants par rapport au cercle des sphères (imaginaire dans le plan à l'infini), et il a étudié les mêmes invariants par rapport à une conique quelconque arbitrairement fixée. Il appelle cette conique la *conique absolue* ou simplement *l'absolu* du plan. C'est à cette conique absolue qu'il rapporte toutes ses recherches sur la mesure des distances et des angles; il n'entre d'ailleurs dans aucun détail et ne distingue en particulier aucunement le cas où la conique absolue est réelle de celui où elle est imaginaire. Ses recherches ont un caractère essentiellement analytique; il envisage les invariants de formes données lorsqu'on effectue des substitutions linéaires homogènes sur les variables homogènes figurant dans ces formes, et insiste sur le rôle que jouent ces invariants dans l'étude des relations projectives en géométrie euclidienne; il interprète ensuite les formules générales ainsi obtenues dans le cas où la conique absolue est le cercle des sphères (imaginaire dans le plan de l'infini). Il envisage aussi le

334) Nouv. Ann. math. (1) 12 (1853), p. 64 (probl. 4); Œuvres 2, Paris 1905, p. 12.

335) Cf. *H. Faure,* Nouv. Ann. math. (1) 18 (1859), p. 381.

336) Philos. Trans. London 149 (1859), p. 61 et suiv., en partic. p. 82/90; Papers 2, Cambridge 1889, p. 561, en partic. p. 583/92; Philos. Trans. London 160 (1870), p. 51; Papers 6, Cambridge 1893, p. 456.

cas où la conique absolue dégénère en un couple de points; c'est à ce cas qu'il ramène celui de la géométrie métrique euclidienne des figures situées dans un plan ordinaire.

Les recherches précédentes ont un caractère analytique. Mais il convient aussi de rechercher comment on peut parvenir *géométriquement* à faire rentrer la géométrie métrique ordinaire dans la géométrie projective.

On s'appuie pour cela sur les faits suivants qui concernent les formes de rang un, deux ou trois[337]):

a. *Formes de rang un.* La congruence entre segments situés sur une même droite peut être envisagée comme une correspondance par rapport à une projectivité parabolique ayant son point double à l'infini.

Dans un faisceau quelconque de droites concourantes dans le plan, la *congruence* d'angles peut être envisagée comme une correspondance des droites du faisceau considéré par rapport à une projectivité ayant deux droites doubles imaginaires qui vont du centre du faisceau aux deux points cycliques du plan de ce faisceau. Cette projectivité transforme donc en elle-même l'involution des angles droits du faisceau envisagé. De même dans l'espace, pour les faisceaux de plans se coupant suivant une droite ordinaire (et non suivant une droite à l'infini).

b. *Formes de rang deux.* La similitude de deux figures dans le plan [égalité (congruence) des angles correspondants et proportionnalité des segments correspondants de ces figures] peut être envisagée comme une correspondance projective des éléments d'un plan dans laquelle chacun des deux points cycliques du plan se correspond à lui-même. [Les deux points cycliques sont les points doubles de l'involution (absolue) formée par les couples de points à l'infini des droites orthogonales deux à deux dans le plan.]

La congruence de deux segments quelconques du plan peut donc être définie graphiquement au moyen des concepts du parallélisme et de l'orthogonalité, dont la dépendance avec la droite de l'infini et les deux points cycliques situés sur cette droite a déjà été établie. Il suffit pour cela d'appliquer les deux définitions que voici:

α) Deux segments congruents ayant en commun une de leurs extrémités sont deux côtés adjacents d'un *losange* (parallélogramme à diagonales orthogonales).

337) *F. Klein,* Nicht-Euklidische Geom.[320]) 1, p. 1 et suiv.; *F. Enriques,* Lezioni geom. proiettiva[27]), (1re éd.) p. 113, 177, 356.

β) Deux segments parallèles congruents sont deux côtés opposés d'un parallélogramme.

Ces deux définitions permettent de comparer entre eux deux segments quelconques du plan.

Dans une gerbe quelconque (à centre fini) de l'espace, la congruence peut être envisagée comme une correspondance projective qui transforme en elle même la polarité orthogonale existant entre droites et plans perpendiculaires.

c. *Formes de rang trois.* La similitude de deux figures dans l'espace [égalité (congruence) des angles correspondants, et proportionnalité des segments correspondants de ces figures] peut être envisagée comme une correspondance projective des éléments de l'espace dans laquelle le cercle des sphères se correspond à lui-même. [Le cercle des sphères est la conique fondamentale de la polarité absolue dans le plan de l'infini: c'est l'intersection par ce plan de l'infini de la polarité orthogonale d'une gerbe quelconque dans l'espace].

La congruence de deux segments quelconque de l'espace peut être définie graphiquement comme dans le plan en ramenant tous les cas à celui de deux segments parallèles et à celui de deux segments ayant une de leurs extrémités commune. Mais on peut aussi envisager la congruence dans l'espace comme une similitude n'ayant en général aucun point double effectif (c'est-à-dire situé hors du plan à l'infini).

Tous les théorèmes sur l'égalité (congruence) des figures dans l'espace contenus dans la géométrie métrique ordinaire apparaissent ainsi comme des corollaires de théorèmes de géométrie projective.

Pour parvenir à la représentation analytique de ces diverses relations métriques, prenons pour tétraèdre de référence un tétraèdre dont les trois sommets situés dans le plan de l'infini $x_4 = 0$ soient les sommets d'un triangle conjugué par rapport à la conique absolue. Dans le plan $x_4 = 0$ déterminons le quadrangle dont les points diagonaux ont pour coordonnées, par rapport au tétraèdre de référence,

$$(0,\ 0,\ 1,\ 0),\quad (0,\ 1,\ 0,\ 0),\quad (1,\ 0,\ 0,\ 0)$$

et dont les côtés opposés sont conjugués par rapport à la conique absolue. On peut toujours prendre un des sommets de ce quadrangle au point de coordonnées

$$(1,\ 1,\ 1,\ 0).$$

Ce sommet du quadrangle, le point-unité et le sommet fini du tétraèdre de référence sont alors en ligne droite; et les équations

de la conique absolue sont

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Cela fixé, il suffit, pour déterminer l'angle de deux droites, de connaître les directions de ces deux droites, c'est-à-dire leurs points à l'infini. Si

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0), \quad (y_1,\ y_2,\ y_3,\ 0)$$

sont les coordonnées de ces points, l'angle des deux droites est mesuré par l'expression

$$\alpha_{xy} = \frac{i}{2} \log_e \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{B - \sqrt{B^2 - AC}},$$

où l'on a posé pour abréger l'écriture

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$B = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$
$$C = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

La distance de deux points x, y de coordonnées

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4), \quad (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$$

est de même mesurée par l'expression

$$d_{xy} = k \sqrt{\left(\frac{x_1}{x_4} - \frac{y_1}{y_4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_4} - \frac{y_2}{y_4}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_4} - \frac{y_3}{y_4}\right)^2},$$

où le radical a sa détermination positive et où k est une constante positive dont la valeur dépend du choix que l'on a fait du point-unité sur la droite

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Ces deux expressions de α_{xy} et de d_{xy} sont des invariants par rapport aux équations précédentes de la conique absolue.

30. Détermination métrique générale de Cayley et son interprétation non-euclidienne par Klein. Il résulte de ce qui précède que l'on peut établir dans tout espace projectif une géométrie *métrique conventionnelle*, analogue à la géométrie métrique ordinaire, en regardant un plan de l'espace comme plan idéal (à l'infini) et une conique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0$$

située dans ce plan, comme conique absolue. On a tout naturellement l'idée de généraliser ces conventions, de façon à rattacher aussi à la géométrie projective une géométrie métrique conventionnelle dans laquelle, au lieu d'une conique absolue, on envisage comme forme absolue une quadrique quelconque arbitrairement fixée. On est ainsi conduit à la détermination métrique projective la plus générale de *A. Cayley*[338]).

Cette géométrie métrique projective comprend les différentes géométries non-euclidiennes et se ramène en particulier à la géométrie euclidienne ordinaire que nous venons d'envisager ci-dessus. Ce fait important apparaît déjà en partie dans les travaux de *E. Beltrami*[339]). Il est mis en pleine lumière dans ceux de *F. Klein*[340]). Il fallait pour le montrer discuter les différents cas de réalité de la forme absolue et aussi introduire dans l'expression de la distance des deux points un facteur constant k, ayant, suivant le cas, une valeur réelle ou purement imaginaire. En même temps, *F. Klein* faisait ressortir l'importance capitale de ces recherches en reprenant les recherches purement géométriques de *Chr. von Staudt* sur les fondements de la géométrie projective et en les affranchissant du postulat d'Euclide sur les parallèles. Il aboutit finalement à une construction dans laquelle les différentes géométries non-euclidiennes sont, comme la géométrie euclidienne [n° **27**], fondées sur une base purement projective.

Voici comment *F. Klein* définit la détermination métrique de *A. Cayley* dans le cas des diverses formes géométriques que l'on est amené à envisager.

a. *Formes de rang un.* Fixons arbitrairement, comme couple absolu, deux éléments P et Q, réels ou imaginaires conjugués, et soit

$$\Omega_{zz} = az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2 = 0$$

l'équation en coordonnées projectives de ce couple absolu.

L'intervalle de deux éléments

$$A \equiv (x), \quad B \equiv (y)$$

ayant respectivement pour coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2) est défini par la formule

$$(1) \quad AB = k \log_e (ABPQ) = k\,xy = k \log_e \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

338) Philos. Trans. London 149 (1859), p. 61; 160 (1870), p. 51; Papers 2, Cambridge 1889, p. 561; 6, Cambridge 1893, p. 456.

Voir aussi *G. Battaglini,* Rendic. Accad. Napoli (1) 6 (1867), p. 157; Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 209, 265; *G. Salmon,* A treatise on conic sections; trad. allemande par *W. Fiedler,* (2e éd.) Leipzig 1867, et toutes les éditions suivantes; (6e éd.) 2, Leipzig 1903, p. 560.

F. Lindemann, dans *A. Clebsch,* Vorlesungen über Geometrie 2[1], Leipzig 1891, p. 540 (section 3, § 8).

339) Giorn. mat. (1) 6 (1868), p. 285; Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 232; Opere 1, Milan 1902, p. 375, 406.

340) Nachr. Ges. Gött. 1871, p. 419; Math. Ann. 4 (1871), p. 573.

où Ω_{xy} désigne la forme polaire

$$\Omega_{xy} = a x_1 y_1 + b(x_1 y_2 + x_2 y_1) + c x_2 y_2$$

et où k désigne une constante arbitrairement fixée.

Quand les éléments envisagés sont des points, cet intervalle représente une distance. Quand les éléments envisagés sont des droites dans un plan ou des plans dans l'espace, cet intervalle représente la mesure d'un angle.

On obtient deux déterminations métriques générales distinctes suivant le signe du discriminant de Ω_{zz}. On dit qu'on est dans le cas *elliptique* lorsque les deux éléments P et Q du couple absolu sont imaginaires; on dit qu'on est dans le cas *hyperbolique* lorsque ces deux éléments P et Q sont réels et distincts. Dans le cas limite où ils sont confondus, on dit qu'on est dans le cas *parabolique.*

Dans le cas elliptique, on prend pour k un nombre purement imaginaire. L'intervalle de deux éléments est alors toujours réel. Pour $k = \frac{1}{2i}$, cet intervalle est donné par la formule

$$(2) \qquad \cos \overline{AB} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

On obtient ainsi une géométrie métrique qui n'est autre que celle du faisceau de droites dans le plan ou celle du faisceau de plans dans l'espace, et cela aussi bien dans le plan ou l'espace euclidien que dans le plan ou l'espace non-euclidien. La forme de rang un, envisagée tout entière, a une longueur finie; en prenant pour unité de mesure l'unité ordinaire, auquel cas $k = \frac{1}{2i}$, cette longueur finie est égale à π[341]).

Dans le cas hyperbolique, on prend pour k un nombre réel; l'intervalle de deux éléments n'est alors réel que quand ces deux éléments ne sont pas séparés par le couple absolu P, Q. L'intervalle qui sépare chacun des deux éléments P et Q de tout autre élément est infini. Si donc on considère un seul des deux segments PQ (joignant les points P et Q, ou intersection de deux plans P et Q) comme

341) Dans *A. Cayley* on ne rencontre que cette formule (2). La formule (1) de *F. Klein* est une formule intermédiaire permettant de passer de cette formule (1) à la propriété projective concernant l'angle ordinaire signalée par *E. N. Laguerre* [n° **29**]; mais les recherches de *F. Klein* se différencient surtout des précédentes par l'introduction de la constante arbitraire k à laquelle on peut donner une infinité de valeurs au lieu de la valeur particulière $\frac{1}{2i}$ qui figure explicitement dans les expressions envisagées par *E. N. Laguerre* et implicitement dans la formule de *A. Cayley.*

constitué par des éléments effectifs, points ou plans, en excluant l'autre segment PQ supposé constitué par des éléments idéaux par rapport à l'intuition métrique, on obtient une géométrie métrique qui coïncide avec celle de la géométrie ponctuelle dans la géométrie non-euclidienne de *N. I. Lobačevskij.*

Dans le cas parabolique, la formule qui a servi de définition à l'intervalle $\overline{AB}$ n'a plus aucun sens. On peut alors définir cet intervalle comme cas limite de sa valeur dans le cas hyperbolique. A cet effet, on prendra k inversement proportionnel à la racine carrée du nombre positif $b^2 - 4ac$ et l'on appellera intervalle $\overline{AB}$ la limite vers laquelle tend l'intervalle hyperbolique AB quand $b^2 - 4ac$ tend vers zéro. Cette limite peut être mise sous la forme de la différence de deux rapports projectifs où figurent deux éléments auxiliaires C, D, en sorte que

$$AB = (CDBP) - (CDAP).$$

L'intervalle $\overline{AB}$ n'est déterminé qu'à un facteur numérique constant près, dont le choix dépend de celui de l'unité de mesure.

On obtient ainsi une géométrie métrique qui n'est autre que celle des ponctuelles dans l'espace euclidien.

Les trois cas envisagés ont été désignés sous le nom d'elliptique, d'hyperbolique ou de parabolique, parce que, dans ces trois cas, les deux points absolus sont imaginaires, réels et distincts ou réels et confondus, tout comme les intersections respectives dans ces trois cas de l'ellipse, de l'hyperbole ou de la parabole par la droite de l'infini.

Les *mouvements* des formes fondamentales de rang un en elles-mêmes apparaissent, dans le cas elliptique et dans le cas hyperbolique, comme identiques aux transformations projectives laissant invariables les deux éléments absolus.

Ajoutons que, en ce qui concerne les formes de rang un, la détermination métrique de *A. Cayley* peut être regardée comme fournissant l'extension la plus générale possible de la détermination métrique ordinaire des ponctuelles et des faisceaux, si l'on n'envisage que des extensions telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

1°) l'intervalle de deux éléments reste fixe pour tous les mouvements (c'est-à-dire pour ∞^1 projectivités réelles des formes fondamentales en elles-mêmes),

2°) les intervalles de deux éléments jouissent de la propriété additive

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

b. *Formes de rang deux.* Pour énoncer plus simplement les résultats, bornons-nous au cas où la forme fondamentale de rang deux envisagée est un plan envisagé comme un ensemble de points.

Si

$$\Omega_{xx} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

est l'équation en coordonnées ponctuelles de la conique absolue et si

$$\Phi_{uu} = \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0$$

est l'équation de cette même conique en coordonnées tangentielles, on définit la distance de deux points (x) et (y) du plan par la formule

$$D_{xy} = k \log_e \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

et la mesure de l'angle de deux droites du plan par la formule

$$A_{uv} = k' \log_e \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

où

$$\Omega_{xy} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{23}(x_2y_3 + y_2x_3),$$

$$\Phi_{uv} = \alpha_{11}u_1v_1 + \alpha_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + \alpha_{22}u_2v_2 + \alpha_{33}u_3v_3$$

et où k et k' désignent deux constantes fixées à volonté.

On se borne généralement au cas où la détermination métrique dans le faisceau de droites est toujours elliptique; et pour que cette détermination soit identique à la mesure ordinaire des angles il suffit de prendre $k' = \frac{i}{2}$. Il y a alors lieu de distinguer trois cas:

1°) le cas *elliptique* où la conique absolue est imaginaire;

2°) le cas *hyperbolique* où la conique absolue est réelle, mais où l'on n'envisage (pour les déterminations métriques) que les points situés à l'intérieur de cette conique;

3°) le cas *parabolique* où la conique absolue dégénère en une paire de points imaginaires; dans ce cas la droite réelle qui joint ces deux points imaginaires apparaît comme droite de l'infini relativement à l'ensemble des points propres qui restent en dehors d'elle.

Dans le cas elliptique, on prend pour k un nombre purement imaginaire, dans le cas hyperbolique on prend pour k un nombre réel, dans le cas parabolique on prend k infiniment grand.

La quantité que l'on désigne dans l'étude de l'élément de courbe sous le nom de courbure d'une *détermination métrique* [n° **31**] est dans les trois cas envisagés égale à

$$-\frac{1}{4k^2};$$

elle est donc positive dans le cas elliptique, négative dans le cas hyperbolique, nulle dans le cas parabolique.

Dans le cas elliptique toutes les droites apparaissent comme fermées et de longueur finie; de même les faisceaux de droites; l'aire du plan est, elle aussi, finie. A ce cas correspond le postulat de *B. Riemann*: que par un point on ne peut mener de parallèle à une droite [n° **14**]. Pour $k = \frac{i}{2}$ la détermination métrique coïncide avec la détermination métrique ordinaire de la gerbe.

Dans le cas hyperbolique toutes les droites sont ouvertes et de longueur infinie. Par chaque point on peut mener *deux* parallèles à une droite donnée. *La courbure est négative.* Cette hypothèse correspond à la géométrie de Lobačefskij-Bolyai.

Le cas parabolique peut être envisagé comme un cas limite commun aux deux précédents; on y retrouve les relations métriques euclidiennes ordinaires. En particulier la droite joignant les deux points absolus est la droite de l'infini de la géométrie projective ordinaire.

Pour simplifier les calculs, il convient de prendre pour Ω_{xx} et Φ_{uu} des formes très simples, comme par exemple

$$\Omega_{xx} = x_3^2 - a(x_1^2 + x_2^2),$$
$$\Phi(u,v) = a u_3^2 - (u_1^2 + u_2^2),$$

où a est un nombre réel. Suivant que a est négatif, positif ou nul, on se trouve dans le cas elliptique, dans le cas hyperbolique ou dans le cas parabolique. Dans le cas parabolique, il faut, avant de passer à la limite $a = 0$, prendre

$$k = \frac{c}{\sqrt{a}},$$

c désignant un nombre fini arbitrairement fixé.

c. *Formes de rang trois.* Quand on convient de ne pas envisager de variétés à plus de trois dimensions, on donne à la forme de rang trois le nom d'*espace.*

On distingue d'ailleurs *l'espace ponctuel* et *l'espace tangentiel.* Si l'on envisageait des variétés de plus de trois dimensions, l'étude des formes de rang trois serait d'ailleurs toute semblable à celle dont nous allons nous occuper.

Dans l'espace (ponctuel ou tangentiel) l'absolu est constitué par une quadrique arbitrairement fixée.

Si l'on se borne au cas où la détermination métrique, dans le faisceau de plans, est elliptique, les formules et la discussion de tous les cas qui peuvent se présenter sont entièrement semblables aux formules et à la discussion convenant aux formes de rang deux.

Dans l'espace (ponctuel ou tangentiel) on distingue encore trois cas: le cas *elliptique* qui correspond aux hypothèses de *B. Riemann*, le cas *hyperbolique* qui correspond aux hypothèses de *Bolyai-Lobačefskij*, et le cas *parabolique* qui correspond au postulat d'Euclide.

Dans le cas elliptique, la surface absolue est une quadrique imaginaire fixée arbitrairement.

Dans le cas hyperbolique, la surface absolue est une quadrique réelle autre qu'une surface réglée; pour les relations métriques, on n'envisage que les points intérieurs à cette quadrique.

Dans le cas parabolique, la surface absolue dégénère en une conique imaginaire dont le plan joue le rôle que joue le plan de l'infini dans la géométrie projective ordinaire.

Dans le cas elliptique il n'y a naturellement pas de parallèles au sens ordinaire du mot. Mais il convient de faire ressortir que *W. K. Clifford* a élargi la définition ordinaire des parallèles et que, si l'on prend ce mot dans le sens qu'il lui a attribué, on peut, par chaque point de l'espace, mener deux parallèles à une droite donnée; chacune de ces deux parallèles et la droite donnée ne sont toutefois pas dans un plan: elles forment une paire de droites gauches. De ce fait on déduit diverses conséquences remarquables[342]).

Dans les cas non-euclidiens, aux mouvements dans le plan et dans l'espace correspondent des homographies laissant invariable la forme absolue.

Au lieu de déduire de la géométrie projective les diverses géométries métriques des formes de rang un, deux ou trois, en choisissant dans chaque cas un „absolu“ convenable (qui se trouve être toujours du second degré), on peut se proposer de construire tout au contraire la géométrie projective des formes de rang un, deux ou trois en partant de la géométrie métrique des formes de mêmes rangs.

Pour la géométrie elliptique, il n'y a aucune difficulté. Pour la géométrie parabolique, il suffit d'adjoindre aux points effectifs les points à l'infini constituant un plan, le plan de l'infini, et de faire au sujet de ce plan de l'infini les conventions usuelles. Pour la géomé-

342) Voir *W. K. Clifford* [Proc. London math. Soc. (1) 4 (1871/3), p. 381/95; (1) 7 (1875/6), p. 67/70; Papers, Londres 1882, p. 181, 236; voir aussi Papers, p. 378, 385, 402] et *F. Klein* [Math. Ann. 37 (1890), p. 544].

trie hyperbolique, il faut adjoindre aux points effectifs non seulement les points à l'infini constituant ici une quadrique, mais encore les points *idéaux* que l'on peut déterminer par l'intersection de droites qui ne se coupent pas en un point effectif et ne sont cependant pas parallèles.

Si l'on envisage une quadrique *absolue* tout à fait quelconque, en faisant abstraction de la condition restrictive d'après laquelle la géométrie métrique du faisceau doit être nécessairement elliptique, on obtient naturellement des résultats d'un caractère plus général encore. Les géométries[343]) auxquelles on parvient alors en partant de la détermination métrique projective conduisent à des droites réelles de longueur nulle, à des angles infiniment grands, à des droites non superposables, et autres concepts en contradiction avec ceux de la géométrie métrique générale ordinaire.

31. Remarques diverses sur les déterminations métriques projectives. **a.** *Sur la détermination métrique parabolique tangente à une détermination métrique hyperbolique ou elliptique.* Soit A un point d'un espace hyperbolique. On peut envisager une détermination métrique parabolique qui, aux environs infiniment voisins de A, fournit des résultats ne différant de ceux de la détermination métrique hyperbolique que par des infiniment petits d'ordre supérieur au premier. On donne à cette détermination métrique le nom de détermination métrique parabolique tangente à la détermination métrique hyperbolique. On l'obtient en prenant pour conique absolue la section de la quadrique absolue de l'espace hyperbolique par le plan polaire de A par rapport à cette quadrique, et en choisissant convenablement l'unité de longueur[344]).

Il en est de même si A est un point d'un espace elliptique.

Si l'on prend pour mesure de la différence entre la détermination parabolique tangente à la détermination hyperbolique ou elliptique donnée et cette détermination hyperbolique ou elliptique elle-même l'expression $-\frac{1}{4k^2}$, c'est-à-dire la mesure de la courbure [nº **30**] de l'espace hyperbolique ou elliptique en A, on a, dans la construction de la détermination parabolique tangente, une interprétation intuitive de cette courbure.

b. *Sur la connexion de l'espace métrique.* Dans les cas hyperbolique et parabolique, la droite est une ligne ouverte. Le plan est

343) Voir *H. Poincaré,* Bull. Soc. math. France 15 (1886/7), p. 203

344) *F. Klein,* Math. Ann. 4 (1871), p. 573

une surface *simplement connexe* (c'est-à-dire telle que chaque ligne fermée la partage en deux parties) et *bilatérale,* c'est-à-dire telle que en chaque point A on puisse distinguer deux sens de rotation ne pouvant être ramenés l'un à l'autre par translation du point A le long de cette surface; ces deux sens de rotation sont identiques aux deux sens suivant lesquels on peut disposer, conformément aux fondements de la géométrie projective, les points de la conique ou de la droite limitée qui constituent l'*absolu.*

Dans le cas elliptique, la droite est une ligne fermée. Le plan (il s'agit du plan projectif dans sa totalité) n'est divisé en parties distinctes que si l'on effectue une *coupure* le long de deux droites illimitées. Le plan est une surface *unilatérale,* c'est-à-dire telle qu'on n'y distingue plus autour d'un point A deux sens de rotation; ces deux sens peuvent en effet être ramenés l'un à l'autre par un mouvement du point A le long de la surface. On peut le vérifier[345]) en se reportant à la gerbe qui fournit une image précise du plan elliptique.

Il est d'ailleurs très difficile de se figurer intuitivement un plan elliptique.

Les différences de connexion du plan que nous venons de signaler apparaissent clairement si l'on envisage l'image d'une quadrique non réglée Q obtenue en projetant d'un centre A la quadrique Q sur un plan P ne contenant pas A. Le contour de l'image de Q sur P est une conique C qui est réelle, imaginaire ou dégénérée en un couple de points imaginaires situés sur une droite réelle, suivant que A a été choisi extérieur à Q, intérieur à Q ou sur la surface Q. Si l'on fixe dans le plan P à l'intérieur de la conique C une détermination métrique de Cayley en prenant pour absolu la conique C elle-même, et si, en projetant du même centre A les points du plan, on reporte ensuite cette géométrie métrique sur la quadrique Q, on obtient une géométrie métrique déterminée sur cette quadrique Q.

La section S de la quadrique Q et du plan polaire α du point A est l'image de C et joue le rôle du lieu des points à l'infini dans le plan ordinaire.

Si le point A est extérieur à la quadrique Q, la section S est une conique réelle; si le point A est intérieur à la quadrique Q, la section S est une courbe imaginaire. Si A est sur la quadrique Q, la section S se réduit à un point.

Comme image du plan hyperbolique, on obtient ainsi une calotte simplement connexe de la quadrique Q; comme image du plan para-

345) Voir *F. Klein,* Nicht-Euklidische Geom.[320]) 1, p. 98 et suiv.

bolique, on obtient la surface de la quadrique à l'exception d'un point de cette surface supposé enlevé [au sens de l'analysis situs (III 6), cette surface est simplement connexe]. Comme image du plan elliptique, on obtient la surface totale de la quadrique; toutefois la correspondance entre le plan elliptique et la surface de la quadrique n'est pas biunivoque: elle n'est univoque que dans un sens, car, si à chaque point de la surface de la quadrique correspond un point du plan, à chaque point B du plan correspondent deux points de la surface de la quadrique situés en ligne droite avec le centre de projection A (du plan elliptique).

Cette image du plan elliptique est particulièrement suggestive quand on prend pour quadrique une sphère et pour centre de projection A le centre de cette sphère. La géométrie métrique elliptique que l'on transporte par projection du plan sur la sphère n'est alors que la géométrie métrique ordinaire de la sphère[346]). Deux lignes géodésiques (c'est-à-dire deux grands cercles) se coupent ici en deux antipodes; par deux antipodes passent une infinité de lignes géodésiques de la sphère [n° **16**].

Indépendamment de son importance comme image des diverses géométries planes, la détermination métrique ainsi obtenue par projection sur la quadrique envisagée est d'ailleurs fort remarquable en elle-même.

Prenons, pour simplifier, comme quadrique la sphère, comme plan α de la conique absolue, le plan de l'un des grands cercles de la sphère (nous le désignerons sous le nom de plan équatorial) et pour centre de projection A le point à l'infini du diamètre prolongé de la sphère perpendiculaire à α.

La géométrie hyperbolique que l'on peut fonder dans le plan équatorial α en prenant la circonférence (α) du cercle équatorial comme conique absolue a pour image sur la sphère une géométrie dans laquelle les lignes droites (d) de la géométrie hyperbolique sont remplacées par des demi-circonférences de cercle (c) perpendiculaires au plan équatorial α et les angles non-euclidiens formés par les droites (d) par les angles sphériques ordinaires que font entre eux ces demi-cercles (c).

D'un point P de (α) comme centre projetons ensuite stéréographiquement [par exemple sur le plan du grand cercle ayant P pour pôle] la sphère et la détermination métrique qu'on vient d'obtenir sur elle; l'image de la circonférence de l'équateur support des

346) Voir *F. Klein,* Progr. Erlangen 1872, p. 46 (note VI); réimpr. Math. Ann. 43 (1893), p. 63/100.

éléments infinis de la détermination métrique hyperbolique est la ligne droite (a) intersection du nouveau plan de projection et de α.

Les demi-cercles (c) se projettent suivant des demi-cercles, images des droites (d): ces demi-cercles sont orthogonaux à la droite (a); les angles formés par les droites (d) dans le plan α sont représentés dans le nouveau plan de projection par les angles ordinaires sous lesquels ces demi-cercles se coupent dans le sens de la géométrie euclidienne.

C'est cette image de la géométrie hyperbolique que *H. Poincaré* a utilisée systématiquement dans ses recherches fondamentales sur la théorie des fonctions.

On peut d'ailleurs construire d'une façon analogue une image toute semblable dans l'espace à trois dimensions[347]).

c. *Sur le principe de dualité.* Le principe de dualité de la géométrie projective s'applique aussi aux propositions de la géométrie métrique elliptique où l'absolu [n° **29**] a été fixé d'une façon symétrique par rapport aux points et aux plans. A cet égard, la géométrie elliptique est la plus belle de toutes les géométries métriques.

En géométrie hyperbolique ou parabolique, au contraire, le principe de dualité ne s'applique pas. Il ne saurait s'appliquer en géométrie hyperbolique, car dans cette géométrie l'espace métrique se déduit de l'espace projectif en excluant les points extérieurs à la quadrique absolue, et à cette exclusion correspond celle des plans extérieurs à la quadrique, au lieu de celle des plans qui rencontrent la quadrique comme il le faudrait pour satisfaire au principe de dualité.

En géométrie parabolique l'*absolu* envisagé comme courbe ponctuelle ou surface ponctuelle n'est pas corrélatif à lui-même, envisagé comme courbe tangentielle ou surface tangentielle, en sorte qu'il ne saurait être question d'appliquer à cette géométrie le principe de dualité.

d. *Sur les postulats de la géométrie métrico-projective.* On peut se demander quels concepts métriques et quels postulats relatifs à ces concepts il faut ajouter aux concepts et aux postulats de la géométrie projective pour poser les fondements de la géométrie métrique générale.

Ce qui a été dit au n° **29** permet de répondre fort simplement à cette question.

Pour fonder la géométrie métrique générale il suffit d'adjoindre aux concepts graphiques (descriptifs) de la géométrie projective le

347) *H. Poincaré,* Acta math. 1 (1882/3), p. 1 [1882]. Voir aussi *R. Fricke* et *F. Klein,* Vorles. über automorphe Funktionen 1, Leipzig 1897; *F. Klein,* Ellipt. Modulfunct.[320]) 1, p. 196.

concept d'orthogonalité entre plans, envisagé comme concept métrique primitif, et de postuler les propriétés fondamentales de ce concept. Ces propriétés permettent en effet d'envisager les plans orthogonaux comme des plans conjugués dans une correspondance polaire des éléments de l'espace qui définit l'absolu de la géométrie métrique[348]).

Pour distinguer les trois cas (elliptique, hyperbolique, parabolique) de la métrique générale, il faut encore préciser la forme sous laquelle on convient d'énoncer le postulat des parallèles.

On répond non moins simplement à la question posée de la façon suivante:

Pour fonder la géométrie métrique générale il suffit d'adjoindre aux concepts et aux postulats graphiques (descriptifs) de la géométrie projective, le concept métrique primitif du mouvement en considérant les mouvements comme formant un groupe de transformations projectives dont les propriétés fondamentales doivent être postulées [nº **30**].

Les propriétés qui caractérisent le groupe des mouvements comme groupe projectif d'une quadrique peuvent s'énoncer de différentes façons: par exemple en tenant compte de ce que le groupe indiqué est le plus petit groupe projectif qui opère d'une façon *transitive* sur les points, les droites et les plans, de façon qu'il y ait toujours une transformation du groupe amenant un élément (point, droite ou plan) en un autre élément de même espèce donné[349]).

Principes de la métrique générale.

32. Avant-propos. Les concepts de *distance* et de *mouvement* sont à la base des recherches générales sur la métrique des variétés à un nombre quelconque de dimensions. A chacun de ces deux concepts correspond un ordre particulier de recherches. L'un, qui se rapporte à l'étude du concept de distance, se rattache généralement à l'expression linéaire, en d'autres termes à l'expression de la distance de deux points infiniments voisins; mais il existe aussi des travaux fondés sur la formule relative à la distance finie de deux points. Dans toutes ces recherches on admet naturellement que les points de la variété sont représentés par des nombres (les coordonnées de ces points).

Un autre ordre de recherches se rattache d'une façon particulière au point de vue auquel on se place dans la théorie des groupes. Nous envisagerons successivement ces deux ordres de recherches.

348) Voir l'exposé d'ensemble de ces questions dans *F. Enriques,* Lezioni di geom. proiettiva[27]); éd. allemande[298]), p. 179 et suiv.

349) *W. Killing,* J. reine angew. Math. 109 (1892), p. 176.

A. Élément linéaire. Distance finie de deux points.

33. Géométrie sur une surface courbe. Pour étudier les propriétés des figures tracées sur une surface courbe, on commence par étendre aux lignes courbes le concept de la distance de deux points et l'on parvient ainsi au concept de la longueur d'un arc de courbe.

Sous certaines restrictions, toujours supposées vérifiées, concernant la continuité et la dérivabilité des expressions envisagées, cette longueur dépend des extrémités de l'arc de courbe et de la forme de la ligne courbe envisagée; et elle jouit de la *propriété additive,* en vertu de laquelle elle est définie par l'expression de l'élément linéaire

$$(1)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

de la ligne courbe envisagée:

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t).$$

De cette expression générale on déduit immédiatement que l'*élément linéaire sur une surface* [cf. III 29 et III 32]

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v),$$

c'est-à-dire la distance de deux points infiniment voisins

$$(u, v),\quad (u + du,\ v + dv)$$

situés tous deux sur cette surface, est donné par la formule

$$(2)\qquad ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

où

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

En se limitant sur la surface envisagée à des régions telles que par deux points quelconques situés dans une même région ne passe qu'une seule ligne géodésique, on rattache immédiatement à la formule (2) la définition de la distance (curviligne) de deux points quelconques

$$(u_1 v_1),\quad (u_2 v_2)$$

sur la surface; cette distance est la longueur de l'arc de la ligne géodésique de la surface passant par les deux points.

La géométrie que l'on obtient ainsi est généralement désignée sous le nom de *géométrie métrique différentielle.* Le mot différentiel est pris ici dans le sens de „restreint en général à une partie de la surface". Dans cette géométrie les propositions sont en effet essentiellement restreintes à des régions limitées de la surface auxquelles correspondent des parties limitées du plan des (u, v).

Dans la géométrie métrique différentielle, le concept de surfaces mutuellement applicables, ou plutôt celui de surfaces *isométriques* (c'est-à-dire telles que leurs éléments linéaires soient donnés par les mêmes formules), est fondamental. Deux surfaces isométriques ont en effet *même géométrie différentielle*[350]).

La géométrie plane métrique différentielle ordinaire se reflète ainsi dans les géométries métriques différentielles des diverses surfaces développables. Toutefois les géométries métriques sur diverses surfaces ayant même géométrie métrique différentielle ne sont pas en général identiques.

Si même deux surfaces analytiquement définies ont même géométrie métrique différentielle, la géométrie métrique sur l'une d'elles considérée comme *entière* ne trouve pas nécessairement sa représentation dans la géométrie métrique sur l'autre. Les rapports de connexion des deux surfaces [n° **43**] jouent ici un rôle important.

Ainsi quoique le *cylindre* soit une surface développable et ait donc même géométrie métrique différentielle que le plan, la géométrie métrique pour le cylindre *entier* diffère de celle du plan *complet* euclidien [n° **44**].

B. Riemann a envisagé la géométrie métrique sur une surface S correspondant à un élément linéaire tel que dans l'expression (2) du carré ds^2 de sa longueur on ait

$$(2) \qquad ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2.$$

La *courbure* K d'une surface en un point de cette surface a été définie par *C. F. Gauss* [III 29] comme étant la valeur réciproque du produit des rayons de courbure principaux de la surface en ce point. Cette courbure K est, comme on sait, un invariant par rapport à une déformation quelconque, sans *extension* ni *déchirement* de la surface. Elle s'exprime donc à l'aide des coefficients $E, F, G,$ qui apparaissent dans l'expression (2) de ds^2 et de leurs dérivées prises par rapport

350) Voir à ce sujet l'article III 34.

à u et à v; sans que la forme concrète de la surface joue aucun rôle. Dans la variété abstraite (u, v) l'expression „courbure" perd la signification intuitive qui résulterait pour une surface de la définition même que *C. F. Gauss* donnait à k; la quantité k n'est plus qu'un invariant différentiel formé par E, F, G et les dérivées de $E, F, G,$ prises par rapport à u et v. Cet invariant ne change pas si, dans l'expression de ds^2, on remplace u et v par deux autres variables quelconques. Quand on se place à ce point de vue de *B. Riemann*, on donne encore à l'invariant k le nom de courbure; mais pour éviter tout malentendu, on ne dit plus „la courbure de la surface ou de la variété abstraite (u, v)"; on dit plutôt la *courbure de la détermination métrique* de cette variété abstraite (u, v).

Les locutions „courbure du plan hyperbolique", „courbure du plan elliptique", ou „courbure du plan parabolique", dont nous avons déjà fait usage au n° **31**, doivent être entendues ainsi dans ce sens conforme au point de vue de *B. Riemann.*

On peut aussi se demander s'il est possible d'obtenir, dans la géométrie métrique différentielle d'une surface de l'espace ordinaire, l'exacte représentation de la géométrie métrique *générale* du plan et plus particulièrement de la géométrie non-euclidienne du plan [cf. n° **15**].

A cet effet, il faut tout d'abord envisager les surfaces qui, comme le plan, peuvent se mouvoir librement sur elles-mêmes, de façon qu'un point quelconque de la surface vienne en un autre point de cette surface arbitrairement fixé à l'avance. Ces surfaces sont nécessairement à courbure constante; et inversement il résulte d'un théorème de *E. F. A. Minding*[351]) que toute surface à courbure constante peut se mouvoir librement par applicabilité sur elle-même, et cela d'une ∞^3 de manières [III 32].

En distinguant les surfaces à courbure constante d'après la valeur k de leur courbure, on obtient

a. pour $k = 0$ les surfaces développables, dont la géométrie métrique différentielle équivaut à la géométrie plane euclidienne;

b. pour $k > 0$ les surfaces applicables sur une sphère, dont la géométrie métrique différentielle équivaut à la géometrie plane elliptique de courbure k [voir n° **23** a, en particulier la note 183];

c. pour $k < 0$ les surfaces auxquelles on a donné le nom de *pseudosphériques* dont la géométrie métrique différentielle équivaut à la géométrie plane hyperbolique de courbure k.

351) J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 378; 20 (1840), p. 324.

Cette dernière équivalence qui correspond au cas où $k<0$ résulte, en fait, des formules trigonométriques établies par *E. F. A. Minding* pour les triangles géodésiques tracés sur une surface à courbure $k<0$.

E. F. A. Minding lui-même n'a toutefois tiré de ses formules aucune déduction relative à la géométrie non-euclidienne, ce qui s'explique d'ailleurs par ce fait que, à l'époque où il les a obtenues, il n'avait sans doute pas connaissance des recherches de *N. I. Lobačevskij* publiées depuis peu.

L'équivalence concernant le cas **c** où $k<0$, a été indiquée dans la thèse de *B. Riemann*[352]); peu après la publication de cette thèse, en 1866 elle a été mise en pleine lumière par *E. Beltrami*[353]) dont les recherches sont d'ailleurs entièrement indépendantes de celles de *B. Riemann.*

E. Beltrami[354]) avait observé que pour les surfaces à courbure constante, et pour elles seulement, on peut choisir les coordonnées u, v de façon que les lignes géodésiques soient représentées par des équations linéaires [cf. n° **27**]. Cette remarque l'a naturellement conduit à établir une correspondance biunivoque entre les points d'une surface abstraite [ou variété élémentaire] (u, v) à courbure constante négative et la région d'un plan ordinaire intérieure à un cercle limite. On obtient ainsi une représentation de chaque surface à courbure constante négative dans laquelle aux lignes géodésiques de la surface correspondent les cordes du cercle limite. *E. Beltrami* ne manque d'ailleurs pas d'observer que la métrique sur la surface est alors identique à la détermination métrique plane de *A. Cayley* correspondant au cas où le cercle limite est pris comme conique absolue dans le plan.

Une autre représentation de la géométrie hyperbolique plane sur un plan ordinaire dans lequel on suppose tracés deux axes rectangulaires Ox, Oy est la représentation *conforme* dont il a été parlé au n° **31**, et que l'on obtient en projetant d'abord le plan hyperbolique sur une demi-sphère limitée par ce plan et ensuite cette demi-sphère stéréographiquement à partir d'un point de son équateur.

Si, pour obtenir cette représentation conforme, on prend comme centre de projection le centre de la sphère, on obtient pour le carré

352) Habilitationsschrift[12]); Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 133; Werke, (2e éd.), publ. par *H. Weber*, Leipzig 1892, p. 272; trad. *L. Laugel*, Paris 1898, p. 280.

353) Giorn. mat. (1) 4 (1866), p. 76/92; Opere 1, Milan 1902, p. 281/96.

354) Ann. mat. pura appl. (1) 7 (1865), p. 185; Opere 1, Milan 1902, p. 262.

de l'élément linéaire dans l'expression déjà indiquée par *B. Riemann* [cf. n° **34**]

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{1+\frac{k}{4}(x^2+y^2)},$$

où k mesure la courbure de la surface.

Si, au contraire, on choisit comme au n° **31** le centre de projection sur l'équateur même de la sphère, on a

$$ds^2 = k^2\frac{dx^2+dy^2}{y^2};$$

si, en particulier, on prend [III 32 et III 33]

$$k = -\frac{1}{R^2},$$

on a ainsi, en choisissant

$$x = v,$$

$$y = Re^{-\frac{u}{R}},$$

la formule

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}dv^2.$$

Si, dans ces formules, on envisage (x, y) ou (u, v) comme les coordonnées ordinaires cartésiennes de points situés dans un plan auxiliaire, la géométrie métrique du plan hyperbolique *total* trouvera dans ce plan auxiliaire une interprétation abstraite.

Il n'en est pas de même pour les surfaces à courbure constante négative qu'on a jusqu'ici construites dans l'espace ordinaire. Ces surfaces sont toutes, en effet, limitées par des courbes ou des points singuliers. De là résulte qu'une portion seulement du plan hyperbolique trouve en elles sa représentation. C'est ce qu'on peut vérifier en se rapportant, par exemple, aux surfaces de révolution déterminées par *E. F. A. Minding.* Ce qui précède ne peut donc s'appliquer à ces surfaces particulières à courbure constante négative.

Dès lors la question se pose de savoir *s'il est possible de construire une surface pseudosphérique offrant l'image complète de la variété abstraite (u, v), donc aussi du plan hyperbolique entier.*

D. Hilbert[355]) a démontré qu'il n'existe aucune surface *analytique* régulière satisfaisant à la question. Il a montré, en effet, que sur toute surface analytique régulière apparaissent des courbes singulières ou des points singuliers. La même conclusion s'applique aux surfaces

355) Trans. Amer. math. Soc. 2 (1901), p. 87; Grundlagen[37]), (2e éd.) **p. 162**, Anhang V.

non-analytiques ainsi que l'ont montré *G. Lütkemeyer*[356]) et *E. Holmgren*[357]).

Aucune surface ne peut donc offrir l'image complète du plan hyperbolique entier.

Des remarques analogues aux précédentes s'appliquent à la géométrie des surfaces à courbure constante positive, lorsqu'on envisage ces surfaces dans leur totalité. On a déjà remarqué [n° **31**] que la géométrie sphérique donne, pour ainsi dire, une représentation surabondante de la géométrie du plan elliptique. C'est la *gerbe de droites* et non la sphère qui définit une variété abstraite à deux dimensions donnant une image complète et parfaite du plan elliptique.

Or on démontre que *la sphère est, dans l'espace ordinaire euclidien, la seule surface fermée à courbure constante positive.* Ce théorème a été récemment établi à nouveau dans le cas des surfaces analytiques par *H. Liebmann*[358]), et d'autre part *G. Lütkemeyer*[359]) et *E. Holmgren*[360]) ont montré que des surfaces $f = 0$ à courbure constante positive sont, en fait, toujours analytiques, au moins quand la fonction f est supposée admettre des dérivées partielles continues du premier, du second et du troisième ordre. Aucune de ces surfaces ne peut offrir l'image complète du plan elliptique entier.

34. Détermination métrique de Riemann dans une variété d'une dimension quelconque. Les concepts que nous avons développés en nous reportant à la géométrie métrique sur une surface, ou plutôt sur une variété abstraite à deux dimensions, trouvent leur extension naturelle dans la géométrie métrique des variétés à plusieurs dimensions, dont *B. Riemann* a analysé les principes dans sa dissertation sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie.

En partant d'une variété élémentaire v_3 à trois dimensions ou, plus généralement, d'une variété élémentaire v_n à un nombre quelconque n de dimensions, dans laquelle on suppose donné un système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [cf. n° **22**], on peut établir dans cette variété

356) Diss. Göttingue 1902.

357) C. R. Acad. sc. Paris 134 (1902), p. 740/3.

L'idée des surfaces régulières non analytiques remonte à *Chr. Wiener* [Lehrbuch der darstellenden Geometrie 2, Leipzig 1887, p. 29] qui a pris en considération des surfaces non-rectilignes développables envisagées chacune comme la limite d'un polyèdre.

358) Nachr. Ges. Gött. 1899, p. 44/55; Math. Ann. 53 (1900), p. 81; 54 (1901), p. 505; cf. *D. Hilbert,* Grundlagen[27]), (2e éd.) p. 172.

359) Diss. Göttingue 1902, p. 163.

360) Math. Ann. 57 (1903), p. 409

une *détermination métrique* et ensuite définir pour elle une *géométrie métrique différentielle,* en prenant comme expression de la distance ds de deux points infiniment voisins

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ et } (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n)$$

de cette variété v_n la racine carrée positive de la forme quadratique supposée essentiellement positive

$$\sum_{(i,k)} a_{ik} dx_i dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Quand nous choisirons ainsi ds nous dirons avec *H. von Helmholtz* que le *théorème de Pythagore généralisé* s'applique à la variété v_n envisagée. Cette forme de ds est d'ailleurs la plus simple que l'on puisse envisager lorsqu'on veut établir les concepts métriques dans une variété

$$v_n \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

en fixant la définition de la *longueur d'une ligne*

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = x_n(t)$$

représentée par des fonctions continues et dérivables dans tout intervalle qui n'est pas nul, de façon

a) que cette longueur ait une valeur essentiellement positive,

b) qu'elle dépende d'une façon continue et dérivable des points extrêmes et de la forme de la ligne,

c) qu'elle jouisse de la *propriété additive* [cf. n° **30**].

Ces conditions étant vérifiées, on obtient la fonction qui représente la longueur d'une ligne donnée en intégrant entre des limites convenablement choisies l'élément linéaire ds, où l'expression de ds ne peut dépendre que des coordonnées

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n$$

de deux points infiniment voisins de la ligne envisagée.

Cette expression de ds ne peut d'ailleurs être fonction *linéaire* de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, dx_1, dx_2 \ldots, dx_n,$$

parce que, s'il en était ainsi, elle devrait, en raison de la continuité, prendre une valeur négative quand on fait varier la ligne d'une façon continue autour d'un de ses points jusqu'à ce qu'elle reprenne sa position primitive mais en sens inverse de son sens primitif. C'est ds^2 ou ds^4, ou toute autre fonction univoque quelconque de ds^2, qu'il faut chercher à exprimer en fonction de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$$

de façon à satisfaire aux conditions énoncées. Si l'on impose à l'expression de ds^2 la condition d'être dérivable autant qu'il faut pour pouvoir être développée aux environs de chaque point par la formule de Maclaurin jusqu'au troisième terme de cette formule, et en outre la condition d'être infiniment petite du deuxième ordre par rapport aux différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, on démontre[361] que cette expression est nécessairement de la forme

$$ds^2 = \sum_{(i,k)} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

en sorte que le théorème de Pythagore généralisé fournit bien, comme on l'annonçait, la forme la plus simple possible de ds.

Mais si, au contraire, on admet quelque exception à la dérivabilité de ds^2 au point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on peut fixer autrement l'expression de ds^2 en fonction de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$$

et en déduire, dans la variété envisagée v_n, une détermination métrique distincte de celle qui repose sur le théorème de Pythagore généralisé. Ainsi on peut par exemple prendre pour ds^4 une forme essentiellement positive du quatrième degré en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ qui ne soit pas un carré parfait. *B. Riemann*[362] a déjà signalé la possibilité de ces déterminations métriques; mais il n'a développé que les conséquences concernant le cas le plus simple et le plus important, où le théorème de Pythagore généralisé s'applique.

Dans toute variété v_n où la détermination métrique résulte du théorème de Pythagore généralisé, on peut envisager, comme on l'a fait pour les surfaces v_2, des lignes *géodésiques* (ou lignes de longueur minimée). Dans des régions convenablement limitées de v_n, chacune de ces lignes est complètement déterminée par deux de ses points.

Le concept de *distance* entre deux points de v_n étant fixé à l'aide de ces lignes géodésiques de v_n, on peut ensuite définir dans v_n les concepts de *l'angle*[363] et du *volume*[364].

35. Variétés homogènes. *B. Riemann* s'est tout particulièrement occupé des variétés v_n (en particulier des variétés v_3) qui, comme l'espace ordinaire, peuvent se mouvoir par applicabilité sur elles-mêmes. On dit de ces variétés qu'elles sont *homogènes.*

361) Voir *F. Enriques,* Conferenze di geometria (cours autographié), Bologne 1894/5, p. 58.

362) Habilitationsschrift[12]; Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 133; Werke, (2ᵉ éd.) publ. par *H. Weber,* Leipzig 1892, p. 272; trad. *L. Laugel,* Paris 1898, p. 280.

363) Voir *F. Enriques,* Conferenze di geometria (cours autographié), Bologne 1894/5, p. 65.

364) *T. Levi-Civita,* Atti Ist. Veneto (7) 4 (1892/3), p. 1765/815, surtout § 19).

Voici comment on peut préciser ce concept de l'homogénéité d'une variété quelconque v_n. Soit P un point de v_n, de coordonnées

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Envisageons tous les points Q de v_n infiniment voisins de P et, parmi ces points, fixons-en deux, Q_1, Q_2, arbitrairement; soient

$$x_1 + dx_1, \quad x_2 + dx_2, \quad \ldots, \quad x_n + dx_n$$

les coordonnées d'un quelconque des points Q,

$$x_1 + d_1x_1, \quad x_2 + d_1x_2, \quad \ldots, \quad x_n + d_1x_n,$$
$$x_1 + d_2x_1, \quad x_2 + d_2x_2, \quad \ldots, \quad x_n + d_2x_n,$$

les coordonnées des deux points Q_1 et Q_2 arbitrairement fixés.

Parmi les éléments PQ, envisageons ceux pour lesquels, λ et μ désignant deux paramètres, on a

$$dx_1 = \lambda d_1x_1 + \mu d_2x_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$dx_n = \lambda d_1x_n + \mu d_2x_n.$$

L'ensemble de ces éléments PQ forme en quelque sorte un élément de surface de v_n issu de P.

Les géodésiques issues de P suivant ces éléments PQ forment ce que l'on appelle, d'après *F. Schur*[365], une *surface géodésique* de v_n passant par le point P.

B. Riemann dit qu'une variété v_n est *homogène* quand il est possible de la faire mouvoir sur elle-même de façon à faire coïncider un de ses points P avec un quelconque de ses autres points P' et un élément de surface issu de ce point P avec un élément de surface arbitrairement fixé parmi ceux issus de P'. De cette définition de l'homogénéité il résulte immédiatement que toutes les surfaces géodésiques issues de deux points quelconques d'une variété homogène v_n ont la même courbure k. C'est ce qu'on exprime en disant que la variété a une *courbure constante.* La courbure k dont il est ici question est celle fournie par l'expression analytique que *C. F. Gauss*[366] a donnée pour k dans le cas d'une surface ($n = 2$) de l'espace ordinaire, généralisée au cas d'une variété d'un nombre quelconque n de dimensions dans un espace à $n + 1$ dimensions.

Dans toute variété à courbure constante k, le carré de l'élément linéaire ds s'exprime d'après *B. Riemann*[367] par une expression de

365) Math. Ann. 27 (1886), p. 546.

366) Commentat. Soc. sc. Gott. recent. 6 (1823/7), éd. Göttingue 1828, math. § 12 [1827]; Werke 4, Göttingue 1880, p. 236.

367) Habilitationsschritt[12]; Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 144; Werke, (2ᵉ éd.) publ. par *H. Weber,* Leipzig 1892, p. 282; trad. *L. Laugel,* Paris 1898, p. 292.

la forme

$$ds^2 = -\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{1 + \frac{k}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

La géométrie métrique différentielle d'une variété v_3 à courbure constante k équivaut pour $k=0$ à la géométrie parabolique dans une région de l'espace ordinaire euclidien; pour $k<0$, elle équivaut à la géométrie hyperbolique dans une région de l'espace ordinaire euclidien; pour $k>0$ elle équivaut à la géométrie elliptique dans une région de l'espace ordinaire euclidien.

Dans cet ordre d'idées, *B. Riemann* a tout d'abord attiré l'attention sur le cas où $k>0$, cas qui est celui de la géométrie elliptique.

L'affirmation de *B. Riemann* relative à la forme à laquelle on peut ramener l'expression du carré ds^2 de l'élément linéaire ds d'une variété à courbure constante k a été vérifiée[368]) par *E. B. Christoffel*[369]) et par *R. Lipschitz*[370]).

S. Lie[371]) a démontré comme conséquence d'un de ses théorèmes sur les groupes continus que *toute variété métrique v_n a nécessairement une courbure constante, quand il est possible de la faire mouvoir sur elle-même de façon à transformer en général un élément linéaire issu d'un point de la variété fixé arbitrairement en un autre élément arbitraire issu du même point.* Sous ces hypothèses le groupe de mouvements de v_n renferme $\frac{1}{2}n(n+1)$ paramètres, c'est-à-dire le *plus grand nombre possible de paramètres.*

Ces recherches de *S. Lie* simplifient les conditions d'homogénéité d'une variété v_n établies par *B. Riemann.*

36. Caractère projectif des variétés à courbure constante. *E. Beltrami*[372]) et *L. Schläfli*[373]) ont étudié le *caractère projectif des variétés à courbure constante.*

E. Beltrami a montré que, dans une *variété à courbure constante,* on peut, par un choix convenable du système de coordonnées, représenter les lignes géodésiques par des équations du premier degré.

Il en résulte que la géométrie projective s'applique, au sens différentiel, aux variétés à courbure constante quand on envisage dans ces variétés *les lignes géodésiques comme des droites.*

368) Cf. *L. Bianchi,* Atti R. Accad. Lincei *Rendic. mat.* (5) 7 II (1898), p. 147.
369) J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 46, 241.
370) J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 71; 72 (1870), p. 1.
371) Cf. *S. Lie* et *F. Engel,* Transformationsgruppen[93]) 3, p. 353/5.
372) Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 232; Opere 1, Milan 1902, p. 406.
373) Ann. mat. pura appl. (2) 5 (1871/3), p. 178/93.

Inversement, comme l'a montré *L. Schläfli*[374]), *toute variété, dans laquelle serait définie une géométrie métrique différentielle où la géométrie projective serait valable en considérant les géodésiques de cette variété comme des droites, est nécessairement une variété à courbure constante.*

La détermination métrique d'une variété à courbure constante peut aussi toujours être envisagée comme une détermination métrique projective de Cayley relative à une surface absolue du deuxième degré. Inversement, *la détermination métrique établie dans un espace projectif v_n par rapport à une surface absolue du deuxième degré conduit à une expression quadratique pour le carré ds^2 de l'élément linéaire de v_n, de sorte que l'espace projectif v_n apparaît comme une variété à courbure constante dans laquelle les droites sont des lignes géodésiques*[375]).

La correspondance entre les variétés à courbure constante et les espaces projectifs métriques devient parfaite si la variété où se trouve définie une géométrie métrique différentielle (pour des régions convenablement limitées) est telle que deux points y déterminent toujours *une seule* géodésique. Il est d'ailleurs toujours possible de compléter en ce sens une variété élémentaire abstraite quelconque par l'introduction de points idéaux [nº **24**].

Au caractère projectif des variétés à courbure constante se rattachent aussi certaines recherches de *F. Schur*[376]): cet auteur remarque que ce caractère projectif dépend de la propriété fondamentale, que possède une surface géodésique, de contenir un nombre ∞^2 de lignes géodésiques de l'espace (à trois ou à plus de trois dimensions), ce qui revient à la propriété fondamentale du plan [nº **8**]. En s'appuyant sur cette remarque, *F. Schur* démontre les propriétés suivantes:

*Si dans une variété métrique à n dimensions (*où $n \geq 3$*) les surfaces géodésiques issues du point P contiennent chacune ∞^2 lignes géodésiques, la variété a une courbure constante relativement à tous les éléments de surface issus du point P.*

Si cette propriété a lieu pour les surfaces géodésiques issues de deux points P et P' de la variété envisagée, elle a aussi lieu pour toutes les surfaces géodésiques de cette variété et la variété a une courbure constante.

374) Ann. mat. pura appl. (2) 5 (1871/3), p. 194.
375) Voir *E. Beltrami*[353]) et *F. Klein,* Progr. Erlangen 1872; réimpr. Math. Ann. 43 (1893), p. 63/100.
376) Math. Ann. 27 (1886), p. 537. Voir aussi: *L. Bianchi,* Atti R. Accad. Lincei *Rendic. mat.* (5) 11 I (1902), p. 265. A propos d'une démonstration géométrique des mêmes résultats, voir *F. Enriques,* Rendic. Accad. Bologna (2) 7 (1902/3), p. 52; *L. Bianchi,* Lezioni di geom. diff., (2ᵉ éd.) 1, Pise 1902, p. 349 (§ 161).

Ces théorèmes de *F. Schur*, par lesquels le problème des variétés métriques à courbure constante est en quelque sorte divisé en ses éléments projectifs, fournissent ainsi une solution très simple de ce problème.

Les recherches de *F. Schur* excluent aussi l'existence de variétés v_n à trois ou plus de trois dimensions ayant en chaque point déterminé une courbure constante sur tous les éléments de surface issus de ce point, courbure variant cependant d'un point à l'autre de v_n.

37. Recherches de Tilly sur l'expression de la distance finie. Au lieu de chercher avec *B. Riemann* à caractériser la géométrie métrique par l'expression de la distance élémentaire entre deux points infiniment voisins, on peut chercher à caractériser directement l'expression de la distance finie entre deux points essentiellement distincts. C'est précisement le but que *J. de Tilly*[377]) avait cherché à atteindre; il n'y est d'ailleurs pas parvenu.

Considérons l'espace comme une variété à trois dimensions dans laquelle on a fixé un système de coordonnées x, y, z. Étant donnés deux points quelconques i et k de coordonnées

$$(x_i, y_i, z_i), \quad (x_k, y_k, z_k)$$

leur distance (ik) s'exprime par une fonction symétrique

$$F_{ik}(x_i, y_i, z_i;\ x_k, y_k, z_k)$$

de $x_i, y_i, z_i, x_k, y_k, z_k$ qui satisfait à plusieurs conditions parmi lesquelles les deux suivantes sont essentielles:

a. La distance de deux points i et k varie avec ces deux points d'une façon continue et s'annule seulement quand les deux points coïncident.

b. Étant donnée une suite de points $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$, et un point $2'$ tel que sa distance $(12')$ au point 1 soit égale à la distance (12) des points 1 et 2, il existe une suite de points $3', 4', \ldots$ tels que la distance entre deux points quelconques de la seconde suite soit égale à la distance entre les deux points homologues de la première.

Cette seconde condition, qui, au fond, introduit la notion de mobilité[378]) des figures, est une condition fonctionnelle à laquelle *doit satisfaire* la fonction à l'aide de laquelle s'exprime la distance (ik) de deux points quelconques i et k.

Si l'on considère deux groupes de cinq points (1, 2, 3, 4, 5) et (1, 2′, 3′, 4′, 5′) ayant en commun un premier point 1, des neuf équations

$$(1)\qquad \begin{cases} (12) = (12'), & (13) = (13'), & (14) = (14'), \\ (15) = (15'), & (23) = (2'3'), & (24) = (2'4'), \\ (25) = (2'5'), & (34) = (3'4'), & (35) = (3'5') \end{cases}$$

on déduit, sous certaines restrictions convenables, que l'on a identiquement

$$(45) = (4'5').$$

Il existe donc nécessairement, entre les dix distances de deux quelconques des cinq points d'un groupe (1, 2, 3, 4, 5), une relation caractéristique dont la forme doit être indépendante du groupe des cinq points considérés. On a donné à cette relation le nom de *relation des cinq points*. C'est une *condition d'homogénéité* de l'espace.

La relation des cinq points peut se mettre sous la forme

$$\Psi[(12)(13)(14)(15)(23)(24)(25)(34)(35)(45)] = 0,$$

où Ψ est une fonction *déterminée* des dix distances qui figurent entre crochets. Pour abréger, nous représenterons cette relation par l'équation symbolique

$$(12345) = 0.$$

Si l'on envisage un groupe de six points (1, 2, 3, 4, 5, 6), la condition d'homogénéité de l'espace se traduit par une condition dite *relation des six points* à laquelle une fonction *déterminée* Ψ, analogue à la précédente, doit satisfaire. On peut énoncer simplement cette condition en observant tout d'abord que, après avoir fixé arbitrairement sous certaines restrictions convenables (16), (26) et (36), on peut toujours déterminer (46) et (56) de façon que les relations

$$(12346) = 0, \quad (12356) = 0$$

soient vérifiées en même temps que la relation

$$(12345) = 0,$$

quelle que soit la forme de la fonction Ψ. Ceci posé, la condition des six points peut être énoncée ainsi:

Les trois relations simultanées

$$(12345) = 0, \quad (12346) = 0, \quad (12356) = 0$$

entraînent comme conséquences les trois relations

$$(12456) = 0, \quad (13456) = 0, \quad (23456) = 0.$$

Les recherches concernant la relation des *cinq* points, faites par *A. Cayley*[379]), *L. N. M. Carnot*[380]) et *J. L. Lagrange*[381]) pour la géo-

377) Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 3 (1880), p. 1/190; Mém. couronnés et autres Mém. Acad. Belgique, in 8°, 47 (1892/3), mém. n° 5, p. 3/80 [1892].

378) Voir au n° **39** les postulats de *H. von Helmholtz*.

379) *Cambr. math. J. 2 (1839/41), p. 267/71; Papers 1, Cambridge 1889, p. 1/4.*

380) *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace, Paris 1806.*

métrie euclidienne, et par *E. Schering*[382]) et *P. Mansion*[383]) pour la géométrie non-euclidienne, ont conduit, dans le cas de cinq points, à deux expressions particulières Ψ_1 et Ψ_2 de la fonction

$$\Psi = (1\,2\,3\,4\,5)$$

qui se présentent toutes les deux sous la forme d'un déterminant. De ces deux expressions particulières de

$$\Psi = (1\,2\,3\,4\,5)$$

on peut, inversement, déduire l'expression de la distance dans la géométrie euclidienne et non-euclidienne, si, outre les deux conditions essentielles (a) et (b), on tient compte d'une troisième condition (c), à laquelle doit aussi satisfaire la fonction symétrique F_{ik} des coordonnées des deux points i et k, condition exprimant la propriété additive des distances des deux points d'une même droite.

Il faudrait toutefois démontrer que les expressions de la distance déterminées par Ψ_1 et Ψ_2 sont, au moins sous certaines conditions de réalité convenablement choisies, les seules solutions possibles du problème proposé. Les considérations peu rigoureuses de *J. de Tilly* sont à cet égard complètement insuffisantes: on ne saurait en conclure que d'autres solutions ne sont pas possibles. *H. F. Blichfeldt*[384]) a d'ailleurs obtenu des expressions de relations possibles entre les distances qui ne sont pas contenues dans les formules de *J. de Tilly.*

38. Systèmes géométriques de Minkowski-Hilbert. Certaines recherches de *H. Minkowski* et *D. Hilbert,* qui ont aussi comme point de départ l'expression de la distance finie entre deux points d'une variété donnée, conduisent à des systèmes géométriques plus généraux que les précédents dont la métrique comprend comme cas particulier la métrique ordinaire euclidienne et non-euclidienne.

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées cartésiennes ordinaires de deux points de l'espace.

H. Minkowski[385]) prend comme expression de la *distance* entre ces deux points une fonction

$$\Omega\,(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2),$$

381) Nouv. Mém. Acad. Berlin 4 (1773), éd. 1775, p. 149; Œuvres 3, Paris 1869, p. 661.

382) *E. Schering,* Nachr. Ges. Gött. 1870, p. 317; 1873, p. 13, 149; Werke 1, Berlin 1902, p. 160, 169, 177.

383) *P. Mansion,* Ann. Soc. scient. Bruxelles 13^1 (1888/9), p. 57; 15^1 (1890/1), p. 8; 16^1 (1891/2), p. 51.

384) Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 467.

385) Geometrie der Zahlen, Leipzig 1910, p. 1 [1896].

homogène du premier degré en $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, de sorte que, quel que soit le paramètre t,

$$\Omega\,(tx_1 - tx_2,\ ty_1 - ty_2,\ tz_1 - tz_2) = t\,\Omega\,(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2),$$

et telle que, en fixant x_2, y_2, z_2 et envisageant x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées courantes, l'équation

$$\Omega = 0$$

représente une surface non-concave. La fonction Ω envisagée est, en général, une fonction transcendante de $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

On obtient ainsi une géométrie métrique conventionnelle, compatible avec la *géométrie projective,* en ce sens que les droites sont les lignes de longueur minimée. Dans cette géométrie de *H. Minkowski* il n'y a que ∞^3 mouvements qui ne sont autres que les ∞^3 translations de l'espace. Cette géométrie renferme comme cas particulier la géométrie ordinaire euclidienne.

D. Hilbert[386]) a obtenu des résultats d'un caractère plus général en se proposant de résoudre le problème inverse:

Déterminer toutes les métriques possibles de l'espace dans lesquelles les droites sont des lignes de longueur minimée et ont en outre une longueur infinie.

Il montre que *de telles métriques peuvent s'établir dans l'espace projectif en prenant comme absolu une surface fermée non-concave et comme expression de la distance de deux points A, B,* intérieurs à celle-ci, *l'expression*

$$c \log_e (ABMN),$$

où M, N désignent les points d'intersection de la droite indéfinie qui joint les deux point A et B avec la surface absolue et où c est une constante; $(ABMN)$ désigne le rapport anharmonique des quatre points A, B, M, N. La métrique de *D. Hilbert* est identique à la détermination métrique hyperbolique, si l'on prend comme absolu une quadrique réelle qui ne soit pas réglée.

La métrique de *H. Minkowski* peut être envisagée comme le cas limite de celle de *D. Hilbert* correspondant au cas où l'absolu dégénère en un plan double à l'infini.

Dans la métrique générale de *D. Hilbert,* aucun mouvement n'est possible.

Le système géométrique de *D. Hilbert* peut être lui-même généralisé de nouveau de diverses façons, en abandonnant l'une ou l'autre des

386) Math. Ann. 46 (1895), p. 91.

conditions auxquelles doit satisfaire la fonction de la distance entre deux points pour posséder les attributs que nous lui concédons conformément à notre intuition. Il suffit pour cela d'admettre que cette fonction n'est pas symétrique par rapport aux deux points dont elle dépend ou encore qu'elle n'est pas univoquement déterminée par eux[387]).

B. Groupe de mouvements.

39. Postulats de Helmholtz. Les recherches ayant pour objet de caractériser la géométrie de l'espace physique par les propriétés des *mouvements,* envisagés comme des transformations de points dans une région de l'espace, ont eu pour point de départ certaines remarques de *F. Ueberweg*[388]) et une première ébauche élaborée par *H. von Helmholtz*[389]).

En faisant ressortir le caractère fondamental qu'ont les mouvements de constituer un groupe, *F. Klein*[390]) posa le problème sous une forme plus précise: il l'énonça comme un problème ressortissant de la théorie des groupes. Ainsi posée, la question fut traitée et résolue à divers points de vue par *S. Lie* et, en partie aussi, indépendamment de *S. Lie,* par *H. Poincaré.* Les postulats que *H. von Helmholtz* pose comme fondements de la géométrie sont les suivants:

I. *Postulat concernant la continuité et les dimensions de l'espace:*

C'est le postulat qui permet de regarder l'espace comme une variété v_n à n dimensions, où $n = 3$ [cf. n° **15**].

La condition $n = 3$ peut d'ailleurs n'être introduite [cf. *S. Lie,* n° **33**] qu'après l'énoncé des postulats du mouvement pour n quelconque.

II. *Postulat concernant l'existence des corps solides mobiles.*

Les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de deux points quelconques d'un corps solide (rigide) sont liées par une équation

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

qui est la même, de quelque façon que l'on choisisse les deux points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ parmi les paires de points congruents aux premiers, c'est-à-dire superposables aux premiers par un déplacement du corps solide dans l'espace.

387) Voir *G. Hamel,* Diss. Göttingue 1901; Math. Ann. 57 (1903), p. 231.

388) Archiv für Philologie und Pädagogik 17 (1851), p. 20/54.

389) Verh. des Naturhist. medic. Vereins Heidelberg (1) 4 (1865/8), p. 197; Wiss. Abh. 2, Leipzig 1883, p. 610; Nachr. Ges. Gött. 1868, p. 193; Wiss. Abh. 2, Leipzig 1883, p. 618.

390) Progr. Erlangen 1872; réimpr. Math. Ann. 43 (1893), p. 63/100; voir aussi Math. Ann. 6 (1873), p. 116.

III. *Postulat concernant la liberté des mouvements.*

Si, dans un solide (rigide), on choisit arbitrairement un point P_1, ce point est entièrement libre de se mouvoir dans toutes les directions. Si, ayant fixé P_1, on choisit ensuite arbitrairement dans le solide un second point P_2, la rigidité du corps implique une équation entre les coordonnées de P_2 et celles de P_1. Si, ayant fixé P_1 et P_2, on choisit ensuite arbitrairement un troisième point P_3, la rigidité du corps implique deux équations entre les coordonnées de P_3 et celles de P_1 et P_2, et ainsi de suite.

Pour que chaque point du corps solide soit entièrement fixé dans l'espace à n dimensions, il faut et il suffit que l'on fixe n points de ce solide; entre les coordonnées de ces n points, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

équations de conditions.

IV. *Postulat concernant la connexion entre rotation et identité, ou postulat de monodromie.*

On admet que dans l'espace à n dimensions une rotation complète autour de $n - 1$ points fixés d'une façon générale (en évitant certaines positions particulières) fait coïncider identiquement avec lui-même un corps solide; dans ce mouvement de rotation, la ligne circulaire décrite par un point quelconque du solide est fermée.

En s'appuyant sur ces quatre postulats, *H. von Helmholtz* parvient à l'expression du carré ds^2 de l'élément linéaire donnée par *B. Riemann.*

H. von Helmholtz croyait avoir prouvé que ses quatre postulats sont indépendants les uns des autres et peuvent donc servir à caractériser complètement la géométrie générale, euclidienne ou non-euclidienne, de l'espace.

Mais aux démonstrations de *H. von Helmholtz, S. Lie*[391]) oppose plusieurs objections, en particulier l'objection fondamentale: que *H. von Helmholtz* a fait correspondre aux diverses rotations possibles autour d'un point fixe P des équations linéaires entre les *dérivées premières* des coordonnées de P, ce qui n'est pas toujours nécessairement exact[392]).

Il faut aussi remarquer que le postulat de monodromie qui est nécessaire pour fonder la géométrie plane, où $n = 2$, devient superflu

391) Cf. *S. Lie* et *F. Engel,* Transformationsgruppen[93]) 3, p. 437.

392) Il est en effet possible que dans le groupe de mouvements du corps rigide autour de P, il y ait des mouvements pour lesquels les dérivées premières des coordonnés de P restent fixes, alors que les dérivées secondes, par exemple, ou des dérivées d'ordre supérieur varient.

dans le cas de l'espace, où $n = 3$, comme *J. de Tilly*[377]) l'avait soutenu déjà avant *S. Lie*. *F. Klein*[393]) a cherché, mais sans y parvenir, à mettre ce fait en évidence par des considérations d'un caractère intuitif.

Des résultats obtenus par *H. von Helmholtz* subsiste toutefois la possibilité de fonder la géométrie générale de l'espace sur les trois premiers postulats, pourvu que ces postulats soient regardés comme valables pour tous les points d'une région de l'espace[394]).

40. Recherches de S. Lie[395]). Voici sous quelle forme *S. Lie* pose le problème de *H. von Helmholtz*, dont il parvient à donner deux nouvelles solutions.

Supposons tout d'abord que l'espace soit une variété à trois dimensions v_3, où se trouve fixé un système de coordonnées

$$v_3 \equiv (x, y, z).$$

Les mouvements dans l'espace, en tant qu'ils sont composables et inversibles, apparaissent comme formant un groupe de transformations ponctuelles; cette hypothèse remplace celle que *H. von Helmholtz* rattache à la notion de congruence, à savoir que la congruence est une relation réciproque et que deux figures congruentes à une troisième sont congruentes entre elles. Or le problème[396]) „fixer un système de postulats qui soit à la base de la géométrie métrique générale" se ramène à celui de caractériser par des propriétés générales les groupes de mouvements des géométries euclidienne et non-euclidienne, en les distinguant de tous les groupes possibles de transformation d'une variété v_3. Il est possible d'y parvenir en faisant des hypothèses se rapportant au voisinage infiniment petit de chaque point de la variété v_3, ou bien en posant les postulats convenant à une région finie de la variété v_3.

Avant d'énoncer les résultats obtenus par *S. Lie*, établissons d'abord la définition suivante: un groupe de transformations dans une variation v_3 permet une liberté entière de mouvement infiniment petit autour de

393) Math. Ann. 37 (1890), p. 544; d'une façon plus précise dans: Höhere Geometrie (cours autographié) 2, Leipzig 1893; réimpr. 2, Leipzig 1907, p. 240.

394) Cf. *S. Lie* et *F. Engel*, Transformationsgruppen[93]) 3, p. 498.

395) Ber. Ges. Lpz. 38 (1886), math. p. 337; Transformationsgruppen[93]) 3, p. 471, 498 (section 6).

*Voir aussi *W. Killing*, Geometrie[77]) 2, p. 360. Les deux premières publications de *W. Killing* ayant trait à cette question [Über die nicht euklidischen Raumformen von n-Dimensionen, Brauneberg 1883; Erweiterung des Raumbegriffes, Brauneberg 1884] sont antérieures à celles de *S. Lie* (Note de *F. Schur*).*

396) On laisse ici provisoirement de côté la question des rapports de connexion de l'espace illimité, dont on s'occupera dans le chapitre suivant.

chaque point P de v_3 lorsque, le point P restant fixe, il est encore possible d'amener par des transformations du groupe un élément linéaire p, issu de P, à coïncider avec un autre élément linéaire quelconque p', issu de P, et un élément de surface π, mené par p, en un élément de surface quelconque π', mené par p'.

Ceci posé, on montre que *les groupes de mouvements euclidiens et non-euclidiens de l'espace envisagé comme une variété à trois dimensions*

$$v_3 \equiv (x, y, z)$$

sont complètement caractérisés par la propriété d'être réels, transitifs, engendrés par des transformations infinitésimales et de rendre possible tout mouvement infiniment petit autour de chaque point arbitrairement fixé dans v_3.

La conclusion s'étend sans modification importante au cas des groupes de mouvements dans des variétés à un nombre $n > 3$ de dimensions; mais pour $n = 2$, il faut ajouter le postulat de monodromie de *H. von Helmholtz*, afin d'écarter d'autres types de groupes qui seraient conciliables avec l'hypothèse des mouvements infiniment petits envisagés.

Si l'on considère, au contraire, les propriétés des mouvements dans une région *finie* simplement connexe, on arrive au résultat suivant:

La géométrie métrique générale de l'espace peut être fondée au sens différentiel, c'est-à-dire pour une région limitée de l'espace, sur les postulats suivants:

1. *L'espace est une variété à trois dimensions (v_3) où l'on peut fixer un système de coordonnées.*

2. *Les mouvements dans l'espace forment un groupe réel de transformations engendré par des transformations infinitésimales.*

3. *Si l'on fixe arbitrairement un point (y_1^0, y_2^0, y_3^0) de l'espace à trois dimensions, les coordonnées x_1, x_2, x_3 des points avec lesquels un point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) peut être amené à coïncider par un mouvement convenable satisfont à une équation*

$$\Omega(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentant une surface qui passe par le point (x_1^0, x_2^0, x_3^0), mais non par le point (y_1^0, y_2^0, y_3^0).

4. *Autour du point (y_1^0, y_2^0, y_3^0) on peut délimiter dans l'espace une région à trois dimensions telle que, le point (y_1^0, y_2^0, y_3^0) restant fixe, tout autre point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) de cette région puisse être amené, par un mouvement continu, en un quelconque des points dont les coordonnées vérifient l'équation*

$$\Omega = 0.$$

41. Recherches de Poincaré. Sans connaître aucun des résultats obtenus par *S. Lie*, dont le premier mémoire[397]) est daté du 25 octobre 1886, *H. Poincaré*[398]) s'est proposé de caractériser, au moyen de la théorie des groupes, les géométries du plan qui ont pour absolu une forme quadratique au sens de la géométrie projective [cf. nº **30**].

Il est amené à poser le système suivant de postulats:

1. *Le plan est une variété à deux dimensions.*

2. *Les mouvements forment dans le plan un groupe réel de transformations, engendré par des transformations infinitésimales et dépendant de trois paramètres.*

3. *Lorsque, dans le plan, on fixe deux points d'une figure, la figure elle-même reste immobile.*

Ce troisième postulat correspond au postulat de monodromie de *H. von Helmholtz*. Il est conçu de façon qu'on n'exclut pas le cas où, d'un point du plan, on peut mener des tangentes réelles à la forme quadratique prise pour absolu. Pour que les trois cas, auxquels on a donné les noms d'elliptique, d'hyperbolique et de parabolique, soient seuls possibles il suffit de postuler par exemple que *toutes* les droites partant d'un même point doivent être congruentes.

42. Recherches de Hilbert. Dans la classification des groupes de transformation, *S. Lie* et *H. Poincaré* se bornent à envisager des transformations *analytiques* ou tout au moins des transformations pouvant être représentées par des *fonctions dérivables*, ce qui concorde avec la génération des groupes à l'aide des transformations infinitésimales représentées analytiquement comme le fait *S. Lie* dans sa théorie des groupes. Or on ne voit pas bien si cette restriction ajoute ou non des hypothèses aux postulats de la géométrie qu'il s'agit de caractériser[399]).

D. Hilbert[400]) a cherché à éclaircir cette question; après avoir posé les hypothèses qui caractérisent le plan comme variété à deux dimensions dans laquelle on puisse fixer un système de coordonnées, il montre *que les groupes de mouvements euclidiens et non-euclidiens du plan sont caractérisés, entre tous les groupes de transformations continues biunivoques, par les trois postulats suivants*:

I. *Les mouvements forment un groupe.*

II. *Les mouvements pour lesquels un point reste fixe peuvent amener un point quelconque autre que le point fixe en une infinité de positions distinctes.*

III. *Les mouvements forment un système fermé, au sens de G. Cantor*, en ce sens que s'il y a, par exemple, des mouvements par lesquels on peut amener aussi près que l'on veut d'un groupe de trois points donnés A', B', C' chaque groupe de trois points situés aussi près que l'on veut d'un groupe déterminé de trois points A, B, C, il y a aussi nécessairement un mouvement par lequel le groupe de points A, B, C lui-même peut être amené à coïncider avec le groupe de points A', B', C'.

Il peut tout d'abord sembler étrange que ces seules conditions suffisent à caractériser le groupe des mouvements entre tous les groupes possibles de transformations planes, surtout parce que l'on ne postule pas que les mouvements pour lesquels un point reste fixe doivent être seulement en nombre ∞^1; mais il convient de remarquer que la condition III a pour effet d'exclure tous les groupes (tels que le groupe projectif et le groupe conforme) où il entre, comme cas-limites, des *transformations dégénérées* et par conséquent non bi-univoques.

397) *S. Lie*, Ber. Ges. Lpz. 38 (1886), math. p. 342; cf. Über die Grundlagen der Geometrie [Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 283].

398) Bull. Soc. math. France 15 (1886/7), p. 203. Cf. *S. Lie*, Transformationsgruppen[93]) 3, p. 437, note 2.

399) *S. Lie* [Ber. Ges. Lpz. 38 (1886), math. p. 342] se demande comment on peut caractériser les groupes des transformations définissant la géométrie euclidienne et non-euclidienne, si l'on abandonne le caractère analytique des fonctions considérées. Cf. *F. Schur*, Math. Ann. 41 (1893), p. 509/38.

400) Grundlagen[27]), (2ᵉ éd.) p. 121, Anhang IV.

Rapports de connexion de l'espace illimité.

43. Variétés pouvant se mouvoir tout entières. Les recherches mentionnées, relatives aux fondements de la géométrie métrique, reposent sur ce que l'on prend comme postulats certaines propositions révélées immédiatement par l'expérience dans une région de l'espace physique accessible aux sens.

En procédant ainsi, on n'obtient pas toutefois les propriétés de l'*espace entier*. Pour les obtenir il faut adjoindre aux recherches dont on vient de parler certaines recherches particulières complémentaires[401]).

Si l'on admet que les conclusions auxquelles l'expérience conduit relativement à la géométrie de la région observable de l'espace s'étendent, aux environs de chaque point de l'espace situé en dehors de cette région, à une certaine région convenablement choisie autour de ce point, l'espace complet apparaît comme une variété à trois dimensions V_3 à courbure constante et sans points singuliers, telle que, aux environs de *chacun* des points de V_3, la métrique générale ordinaire

401) *F. Klein*, Math. Ann. 37 (1890), p. 544.

euclidienne ou non-euclidienne s'applique. Aux environs d'un point, on peut d'ailleurs faire correspondre une région déterminée d'un espace projectif métrique S_3, de façon que les figures correspondantes tracées dans V_3 et S_3 soient congruentes.

Mais on ne peut pas affirmer que la correspondance ainsi établie s'étend nécessairement à la variété totale V_3 et à l'espace projectif complet S_3; il peut au contraire arriver que la géométrie de la variété totale diffère de la géométrie de l'espace complet S_3, comme la géométrie d'une surface entière diffère souvent de la géométrie d'une seconde surface, même quand les deux surfaces sont applicables au sens différentiel [n° **16**].

Il peut ainsi arriver que, dans toute partie simplement connexe située dans une variété V_3, il y ait ∞^6 mouvements possibles, et que cependant, par suite de la connexion de la variété totale V_3, cette variété totale V_3 ne puisse se mouvoir qu'avec un degré de liberté moindre. Un fait analogue se produit déjà dans la géométrie des surfaces; si l'on envisage, par exemple, la surface d'un cylindre circulaire applicable sur le plan dans le sens différentiel, on voit qu'une portion simplement connexe quelconque de la surface cylindrique peut se mouvoir sur cette surface autour d'un de ses points arbitrairement fixé, mais la surface entière ne peut plus se mouvoir dès qu'un seul de ses points est fixé.

Supposons que non seulement chacune des parties d'une variété V_3 à courbure constante puisse se mouvoir de ∞^6 manières, mais qu'il en soit de même de la variété entière V_3. Est-il alors possible d'envisager la variété *entière* V_3 comme un espace projectif métrique S_3? Il est un cas bien connu dans lequel cela n'est certainement pas possible. Dans une variété à quatre dimensions dans laquelle on a fixé un système de coordonnées cartésiennes, considérons, en effet, la variété à trois dimensions dont les éléments (ou points) correspondent à toutes les valeurs des quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 satisfaisant à la relation $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=r^2$, où r est une constante donnée; on a donné à cette variété le nom *d'espace sphérique* de rayon r. Il y a ∞^6 mouvements qui transforment en soi l'espace sphérique tout entier. Toutefois celui-ci n'est pas identique à l'espace elliptique; car deux points de l'espace sphérique ne déterminent pas toujours une seule ligne géodésique contenant, en même temps qu'un point (a_1, a_2, a_3, a_4), le point opposé $(-a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$. L'espace sphérique est plutôt dérivé de l'espace elliptique par une transformation[402] [1, 2] de ce dernier

402) *On entend par transformation [2, 1] entre deux variétés v et v' une transformation univoque non réversible dont l'inverse [1, 2] fait correspondre à chaque élément de v' deux éléments de v.*

(tout comme la sphère ordinaire peut être dérivée du plan elliptique ou de la gerbe).

On admettait autrefois, en général, que la géométrie sphérique était la seule géométrie compatible avec l'hypothèse d'une courbure constante positive[403]) et que, par suite, dans une variété de courbure constante positive sans points singuliers, considérée comme *entière*, deux lignes géodésiques devaient nécessairement se rencontrer en deux points opposés. Comme nous l'avons déjà signalé plus haut [n° **16**], *F. Klein*[404]) a remarqué que cette opinion était erronée. *S. Newcomb*[405]) et *W. Killing*[406]) ont envisagé l'espace elliptique en opposition avec l'espace sphérique ou parallèlement à l'espace sphérique.

Revenons maintenant à la question précédemment posée. On a démontré[407]) que, dans tous les cas, *une variété à trois dimensions de courbure constante k, qui, considérée dans son entier, admet ∞^6 mouvements en elle-même, comme en chacune de ses parties, peut être envisagée quand $k<0$ comme un espace hyperbolique, quand $k=0$ comme un espace parabolique, et quand $k>0$ soit comme un espace elliptique soit comme un espace sphérique.*

G. Veronese[408]) a introduit l'espace sphérique à côté de l'espace elliptique par un système convenable de postulats. Pour cela, il suppose que la proposition: *deux points déterminent une droite* est en défaut pour certaines paires particulières de points d'une certaine droite; il admet aussi que cette exception concerne également tous les couples de points congruents aux premiers sur la droite; mais qu'un point d'une droite quelconque et un point en dehors de cette droite ne déterminent jamais qu'une seule droite.

44. Formes à deux dimensions de Clifford-Klein. Abandonnons maintenant la condition que notre variété V_3 à courbure constante, considérée dans son entier, puisse se mouvoir de ∞^6 manières.

On trouve alors d'autres formes de l'espace qui, dans les environs de chaque point, peuvent être envisagées comme une partie d'espace projectif métrique, mais ces formes différeront cependant essentiellement d'un tel espace par leurs propriétés de connexion; ces formes ont été désignées par *W. Killing*[409]) sous le nom de *formes de Clifford-Klein.*

403) *B. Riemann* ne semble cependant pas avoir émis d'opinion à ce sujet.
404) Math. Ann. 4 (1871), p. 604/5 en note; id. 6 (1873), p. 125.
405) J. reine angew. Math. 83 (1877), p. 293.
406) J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 72; 89 (1880), p. 265.
407) *W. Killing,* Grundlagen[77]) 1, p. 313.
408) Fondamenti[26]), p. 435.
409) Math. Ann. 39 (1891), p. 257.

Considérons une variété entière V_2 à courbure constante nulle. Toute portion simplement connexe de cette variété V_2 peut être représentée d'une façon isométrique bi-univoque sur une certaine partie du plan euclidien. Mais pour pouvoir représenter de cette façon la variété V_2 tout entière sur le plan euclidien, il faut éventuellement commencer par la diviser en parties convenablement choisies. L'image de V_2 apparaît alors sur une partie du plan euclidien limitée par une ligne formée de parties deux à deux congruentes l'une à l'autre. Les deux parties congruentes soudées l'une à l'autre correspondent sur V_2 aux deux côtés des coupures ayant servi à diviser V_2.

Un premier exemple d'une forme de Clifford-Klein à deux dimensions est fourni par un cylindre fermé, un cylindre droit à base circulaire par exemple. Si l'on coupe le cylindre le long d'une de ses génératrices, on peut le représenter d'une façon bi-univoque sur une partie du plan euclidien comprise entre deux droites parallèles. Inversement, on peut considérer toute partie du plan euclidien comprise entre deux droites parallèles comme l'image complète d'un cylindre droit à base circulaire, si l'on convient de regarder comme images du même point du cylindre les points des deux droites parallèles situées sur une même perpendiculaire à ces deux droites[410]).

On obtient un second exemple d'une forme de Clifford-Klein en traçant dans le plan euclidien un parallélogramme, et en convenant d'envisager comme correspondants les points du périmètre de ce parallélogramme situés sur une même parallèle aux deux autres côtés.

En effectuant ses recherches sur l'espace elliptique, *W. K. Clifford*[411]) a trouvé que l'on peut construire dans un tel espace des surfaces réglées du second degré de courbure nulle (au sens de la détermination métrique elliptique) et cependant de contenu total fini. A ces quadriques correspond d'une façon isométrique biunivoque un parallélogramme du plan euclidien, de façon qu'à deux points correspondants du périmètre de ce parallélogramme ne correspond qu'un seul et même point de la coupure effectuée sur la quadrique le long d'une de ses génératrices. (Ces quadriques réglées sont les quadriques qui coupent l'absolu imaginaire F_2 suivant un quadrilatère rectiligne). C'est en partant de ce résultat de *W. K. Clifford,* que *F. Klein* a développé la théorie générale des variétés à deux dimensions envisagées ici.

410) Voir *F. Klein*, Math. Ann. 37 (1890), p. 544; Nicht-Euklidische Geometrie (cours autographié Göttingue) 2 (1890), p. 293.

411) *W. K. Clifford*[342]). Voir aussi *F. Klein*[410]) et *L. Bianchi*, Atti Accad. Torino 30 (1894/5), p. 743; Ann. mat. pura appl. (2) 24 (1896), p. 93.

Les surfaces cylindriques, aussi bien que les surfaces de Clifford considérées dans leur totalité, ne peuvent se mouvoir sur elles-mêmes que de ∞^2 manières.

On démontre qu'une variété euclidienne V_2 à deux dimensions illimitée, sans points singuliers ou lignes doubles, mais à deux faces, peut s'appliquer entièrement soit sur le plan euclidien, soit sur un cylindre droit à base circulaire, soit sur la surface de Clifford[412]).

On rencontre d'ailleurs un autre type de variété V_2 à une seule face qui est représentée sur une surface de Clifford de façon qu'à chaque point de V_2 correspondent *deux* points homologues sur la surface de Clifford, tandis qu'à chaque point de cette surface ne corresponde qu'un point de V_2[413]). En envisageant de même les différents types de variété V_2 à courbure constante *positive* ou *négative*, on arrive aux résultats suivants[414]):

Une variété illimitée à deux dimensions, à courbure constante, positive peut s'appliquer entièrement, d'une façon bi-univoque, soit sur le plan elliptique, soit sur la sphère. Il existe, par contre, une infinité de types de variétés illimitées à deux dimensions (sans points singuliers ni lignes doubles), ayant une courbure constante négative, qui, envisagées dans leur totalité, ne peuvent se mouvoir sur elles-mêmes de ∞^3 *manières. Leur détermination conduit à des divisions du plan hyperbolique en polygones congruents qui sont analogues aux divisions du plan euclidien soit en bandes parallèles, soit en parallélogrammes.*

Tout cet ordre de recherches se rattache étroitement aux questions géométriques que l'on aborde dans la théorie des fonctions des variables complexes, quand on y étudie les fonctions périodiques ainsi que les fonctions automorphes linéaires[415]).

45. Formes à trois dimensions de Clifford-Klein. Parmi les variétés V_3 à trois dimensions, on trouve de même des formes de *Clifford-Klein.* Elles sont également illimitées, sans points singuliers ni lignes doubles, et, envisagées dans leur totalité, elles ne peuvent se mouvoir sur elles-mêmes de ∞^6 manières, comme le peut une quelconque de leurs parties simplement connexe.

412) *F. Klein*[410]); *W. Killing,* Math. Ann. 39 (1891), p. 257; Geometrie[77]) 1, p. 325.

413) *F. Klein*[410]).

414) *F. Klein*[410]); cf. *W. Killing*, Geometrie[77]) 1, p. 325 et suiv.

415) Voir par ex. *H. Poincaré,* Acta math. 1 (1882), p. 1/62 ou encore l'exposé résumé de *R. Fricke* et *F. Klein,* Vorlesungen über automorphe Funktionen 1, Leipzig 1897. Cf. II 11 et II 12.

W. Killing[416]) a étudié les diverses formes V_3 de Clifford-Klein à courbure constante nulle; ce sont celles qui correspondent à l'espace euclidien.

La détermination des formes V_3 de Clifford-Klein à courbure constante négative conduit aux *divisions de l'espace hyperbolique en polyèdres congruents* (divisions que l'on rencontre aussi dans la théorie des fonctions automorphes).

On démontre aussi que *toute forme V_3 de Clifford-Klein à courbure constante positive peut s'appliquer entièrement soit sur l'espace elliptique, soit sur l'espace sphérique, de façon qu'à chacun des points de la forme V_3 corresponde dans cet espace (elliptique ou sphérique suivant les cas) un certain nombre entier p de points; deux quelconques de ces points qu'on appelle points homologues peuvent être amenés à coïncider par une translation de longueur* $\frac{l\pi}{p}$ *ou* $\frac{2l\pi}{p}$. Ce dernier résultat s'étend d'ailleurs à toutes les formes V_n de Clifford-Klein à courbure positive pour lesquelles n est un nombre impair.

Géométrie non-archimédienne.

46. Introduction. Dans tout ce qui précède, sauf toutefois aux n^os **13, 17, 18,** et **20** à **23**, on a toujours supposé que la continuité envisagée était la continuité *ordinaire.* Mais on a déjà mentionné à plusieurs reprises les recherches contemporaines où l'on s'est préoccupé de voir dans quelle mesure cette hypothèse est nécessaire au développement de la géométrie, et aussi dans quelle mesure elle peut être déduite d'autres postulats.

Ces recherches concernent tout particulièrement ce qui, dans la notion de continuité, correspond au postulat que l'on désigne sous le nom de postulat d'Archimède [n° 7]; elles ont conduit à fonder une géométrie *non-archimédienne* où l'on considère un continuum *de type supérieur* à celui du continuum ordinaire.

47. Continuum à une dimension de type supérieur. La question du postulat archimédien se rattache à celle de l'existence de grandeurs infiniment petites (ou infiniment grandes) actuelles qui s'est déjà posée dès la fondation de l'analyse infinitésimale. Nier le postulat d'Archimède revient en effet à admettre la possibilité de concevoir un *segment actuellement infini* ou *infiniment petit actuellement* [n° 7] relativement à l'unité de mesure adoptée, et par conséquent la possibilité de concevoir un nombre actuellement infini ou infiniment petit.

Les géomètres grecs avaient déjà rencontré une grandeur de cette

416) Geometrie [77]) 1, p. 332.

espèce, *l'angle de contingence*[417]), c'est-à-dire l'angle d'une courbe et de la tangente en un point de cette courbe, ou encore l'angle de deux courbes tangentes en leur point de rencontre. *Euclide*[418]) a démontré que l'angle formé par un cercle et sa tangente est plus petit que tout angle rectiligne; en s'appuyant sur une proposition d'Apollonius[419]) on en conclut qu'il en est de même pour une conique quelconque. L'observation que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne sont pas de même espèce semble avoir été faite dans l'antiquité[420]) en comparant le théorème d'*Euclide* avec un autre théorème[421]) des Elements; elle a été formulée nettement au moyen âge par *J. Campanus*[422]).

L'évaluation de l'ordre de grandeur de l'angle de contingence a soulevé de nombreuses controverses parmi les mathématiciens du seizième et du dix-septième siècle[423]). D'une part on avançait avec *J. Peletier*[424]) que l'angle de contingence est effectivement nul (*quantitas non est*), d'autre part on estimait avec *C. Clavius*[425]) que cet angle doit être considéré comme infiniment petit par rapport à l'angle droit, en le considérant toutefois comme une quantité susceptible de division ou de multiplication.

La question de l'angle de contingence prenait ainsi place parmi celles dont la solution devait préoccuper les fondateurs de l'analyse

417) *La locution *angulus contingentiae* a été employée en passant par *Jordan Nemorarius* [Geometria vel de triangulis libri IV, éd. *M. Curtze*, Thorn 1887, p. 28]; elle est probablement plus ancienne [cf. *G. Eneström*, Bibl. math. (3) 11 (1910/1), p. 82]. Les géomètres grecs employaient la locution γωνία κερατοειδής (angle corniforme); cf. *Procli* Diadochi [2]), p. 122.*

418) *Elementa, livre 3, prop. 16; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 208/12.*

419) *Coniques (κωνικά) livre 1, prop. 32; Quae graece exstant, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1891, p. 94/8.*

420) *Cf. *Procli* Diadochi [2]), p. 234, 333/4.*

421) *Elementa, livre 10, prop. 1; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 3, Leipzig 1886, p. 4.*

422) *Addition à la proposition 1 du livre 10 des „Elementa" [voir par ex. Elementorum geometricorum lib. XV, Bâle 1537, p. 244; cf. p. 67] (Notes 417 à 422 de *G. Eneström*).*

423) Un exposé détaillé de l'histoire de la question a été donné par *G. Vivanti*, Il concetto d'infinitesimo, Mantoue 1894; (2e éd.) Giorn. mat. (2) 7 (1900), p. 285/303; tirage à part, Naples 1901; voir aussi Bibl. math. (2) 5 (1891), p. 97/8.

424) *Demonstrationum in Euclidis elementa geometrica libri sex, Lyon 1557; (2e éd.) Lyon 1610, p. 132; cf. *J. Peletier*, Commentarii tres: de dimensione circuli, de contactu linearum, de constitutione horoscopi, Bâle 1563, p. 32.*

425) *Euclidis elementorum libri XV, Rome 1574, Addition à la proposition 16 du livre 3; éd. Rome 1603, p. 360/94 (Notes 424 et 425 de *G. Eneström*).*

infinitésimale. Aussi les mathématiciens de cette époque ne manquèrent-ils pas de s'en occuper.

Parmi les mathématiciens des $16^{\text{ième}}$, $17^{\text{ième}}$ et $18^{\text{ième}}$ siècles qui se rattachent au point de vue de *J. Peletier* on peut citer *F. Commandino, F. Viète, G. Galilée (Galileo Galilei)* et *J. Wallis*; parmi ceux qui se rattachent au point de vue de *C. Clavius* on peut citer *Th. Hobbes, G. W. Leïbniz* et *I. Newton.*

La critique moderne a écarté de l'analyse mathématique telle qu'on la conçoit ordinairement l'infiniment petit actuel, aussi bien que l'infiniment grand actuel, en montrant que l'on peut édifier toute l'analyse sans avoir besoin de s'écarter de la considération de quantités satisfaisant au postulat d'Archimède. Mais l'infiniment petit actuel ainsi que l'infiniment grand actuel apparaissent dans d'autres branches des mathématiques.

1) L'infiniment grand actuel s'impose par exemple lorsqu'on compare la manière plus ou moins rapide avec laquelle diverses fonctions variables tendent vers une certaine limite, ce qui amène *P. du Bois-Reymond* à introduire divers *ordres d'infini* [I 3, n° **23**].

2) Il apparaît aussi dans la théorie des ensembles [I 3, n° **17**], où il a été formulé pour la première fois d'une façon arithmétique dans la construction des nombres transfinis de *G. Cantor* [I 7, **3**].

En postulant à priori la propriété que les nombres transfinis qu'il introduit en arithmétique doivent former un ensemble bien ordonné, c'est-à-dire tel que dans chaque sous-groupe des éléments de l'ensemble de ces nombres il y ait toujours un *premier* élément (plus petit que tous les autres), *G. Cantor* est forcément conduit à renoncer à imposer aux nouveaux nombres toutes les propriétés formelles des opérations arithmétiques auxquelles satisfont l'ensemble des nombres ordinaires. De là résulte que les nombres transfinis de *G. Cantor* ne forment pas un système non-archimédien; car tout système non-archimédien pris au sens abstrait peut être envisagé comme une „droite“ dans laquelle les postulats ordinaires de congruence ont lieu.

48. Nombres non-archimédiens de Veronese et de Hilbert. Dans ses recherches géométriques ayant pour objet l'étude des postulats sur lesquels repose la notion de „ligne droite“, *G. Veronese*[426]) est parvenu à montrer la possibilité d'une géométrie non-archimédienne satisfaisant à tous les postulats de la disposition et de la congruence, mais pour laquelle la continuité ne s'applique qu'au sens restreint de *G. Cantor* [cf. n° **13**]. Partant de là, il est parvenu à construire un

426) Fondamenti[26]), en partic. p. 257 et p. 262.

système de nombres *non-archimédiens* pour lequel subsistent les propriétés formelles des opérations arithmétiques auxquelles satisfont l'ensemble des nombres ordinaires.

T. Levi-Civita[427]) a ensuite débarrassé cette construction de *G. Veronese* de son enveloppe géométrique et a même obtenu un système de nombres non-archimédiens, qu'il a appelés *monosemii*, représentant des nombres d'un caractère encore plus général que ceux de *G. Veronese.*

D. Hilbert[428]) est parvenu par un autre procédé à un système spécial de nombres non-archimédiens.

Il considère un *corps de fonctions* $\Omega(t)$ dans lequel figurent comme éléments toutes les fonctions rationnelles de t et de $\sqrt{1+\omega^2}$, où ω est une fonctions rationnelle de t et de $\sqrt{1+t^2}$.

Dans ce corps $\Omega(t)$, la somme et le produit des éléments sont définis comme d'habitude, c'est-à-dire de telle façon que les propriétés formelles des opérations de l'arithmétique des nombres ordinaires s'appliquent.

L'inégalité de deux éléments a, b de $\Omega(t)$ peut alors être définie, en prenant

$$a > b,$$

quand la différence $a-b$ est positive pour une valeur t_0 de t suffisamment grande et pour toutes les valeurs de $t > t_0$.

S'il en est ainsi on peut considérer les éléments de $\Omega(t)$ comme les nombres d'un *système* non-archimédien particulier.

A. Bindoni[429]) a cherché à établir un parallèle entre les nombres non-archimédiens de *D. Hilbert* et ceux de *G. Veronese.* En particulier il met en évidence la tendance de *G. Veronese* à envisager parmi les systèmes d'éléments satisfaisant à certaines propriétés données les systèmes les plus étendus possibles, et la tendance opposée de *D. Hilbert* d'envisager plutôt les systèmes les plus restreints possibles parmi ceux qui satisfont aux propriétés données.

49. Résultats généraux de Veronese. *G. Veronese* ne s'est pas borné à montrer la possibilité d'un continuum non-archimédien à une dimension; il a cherché à édifier une géométrie non-archimédienne à plusieurs dimensions. L'idée directrice de ses recherches paraît être que l'espace intuitif à n dimensions est doué d'un certain ensemble de propriétés grâce auxquelles il peut être construit de la façon suivante: en projetant une droite (espace à une dimension) par un point

427) Atti Ist. Veneto (7) 4 (1892/3), p. 1765/815.

428) Grundlagen[27]), (2e éd.) p. 22.

429) Atti R. Accad. Lincei *Rendic. mat.* (5) 11 II (1902), p. 205.

extérieur à cette droite, on obtient un plan (espace à deux dimensions); en projetant ce plan par un point *extérieur* à ce plan on obtient un espace à trois dimensions; en projetant cet espace à trois dimensions par un point *extérieur* à cet espace on obtient un espace à quatre dimensions; et ainsi de suite.

G. Veronese observe que, si l'on envisage une droite sur laquelle sont donnés les rapports de disposition et de congruence, on peut, à l'aide du postulat de *G. Cantor*, *construire*, en partant de certaines suites de points donnés sur la droite, d'autres points envisagés comme points limites de ces suites de points. Il examine dans quelle mesure les hypothèses sur lesquelles repose cette construction sont compatibles avec l'existence de points situés à l'extérieur de l'ensemble des points construits ainsi successivement sur la droite, et parvient ainsi à un *espace général* d'une infinité de dimensions et contenant une infinité d'unités rectilignes, qui est la forme la plus étendue à l'intérieur de laquelle la construction envisagée est toujours possible.

G. Veronese a construit deux systèmes géométriques en prenant comme points de départ deux concepts différents de la droite.

1) Un système dans lequel la droite est une ligne *ouverte* et où l'on peut mener, par un point donné extérieur à une droite donnée, une infinité de parallèles à cette droite.

2) Un système dans lequel, comme dans la géométrie de *B. Riemann*, la droite est une ligne fermée.

En ce qui concerne le second système, il s'est surtout attaché à envisager les faits géométriques, concernant les diverses unités, avec ce qu'on pourrait appeler une approximation infiniment grande. Il remarque que, dans ce second système, aux environs d'un point quelconque la géométrie peut être envisagée comme euclidienne avec une approximation infinie (au sens de l'infini actuel).

50. Géométrie projective non-archimédienne. *G. Veronese* a remarqué que, dans son espace ou dans celui qui peut être défini analytiquement par les nombres de *T. Levi-Civita*, la géométrie projective s'applique.

Mais on est encore parvenu à une géométrie projective non-archimédienne à la suite de recherches ayant pour objet de restreindre les hypothèses nécessaires à la démonstration *géométrique* du théorème fondamental de la projectivité au sens restreint [cf. n° **27**].

Il s'agit d'établir ce théorème sans introduire les concepts ordinaires de la continuité [n° **13**].

A l'aide de considérations *métriques*, où l'on envisage la similitude

perspective comme une affinité, *H. Wiener*[430]) avait établi que le théorème fondamental de la projectivité au sens restreint de *V. A. Poncelet* peut être déduit des théorèmes de Desargues et de Pappus sans qu'il soit nécessaire de faire appel à la continuité [n° **13**].

Ce fait a été établi à nouveau par *F. Schur*[431]); mais *F. Schur* en la, le premier, donné une démonstration complète, et il 'a donnée à l'aide de considérations projectives seulement. *F. Schur* a fait, à cet effet, usage des postulats de l'appartenance.

H. G. Zeuthen[432]) a proposé de rattacher le théorème fondamental de la projectivité au sens restreint à la propriété fondamentale des deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde[433]).

F. Schur[434]) utilisant une remarque de *G. P. Dandelin*[435]) a montré comment on peut déduire de cette propriété de l'hyperboloïde le théorème de Pappus, duquel résulte, comme on l'a dit à l'instant, le théorème fondamental de la projectivité. *F. Schur* remarque qu'il suffit d'admettre l'existence d'un seul hyperboloïde jouissant de la propriété fondamentale envisagée, et fait ressortir que des postulats de la congruence on déduit immédiatement que l'hyperboloïde de révolution jouit de cette propriété fondamentale concernant ses deux systèmes de génératrices.

D. Hilbert a encore restreint davantage les hypothèses nécessaires pour la démonstration du théorème de Pappus: il conserve les postulats de la congruence, *mais ne quitte pas le plan*; en fait il n'utilise donc parmi les postulats de l'*appartenance* que ceux qui se rapportent au plan. Il postule l'axiome des parallèles.

Comme résultat de toutes ces recherches, on peut énoncer le théorème que voici:

Le théorème fondamental de la projectivité entendu au sens restreint [n° **27**] *peut être démontré en adjoignant aux postulats projectifs de la géométrie plane les postulats de la congruence et le postulat des paral-*

430) Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 1 (1890/1), éd. Berlin 1892, p. 45; 3 (1892/3), éd. Berlin 1894, p. 70.

431) Math. Ann. 51 (1899), p. 401/9; voir aussi id. 55 (1902), p. 265/92 et *L. Balser*, Math. Ann. 55 (1902), p. 293/300.

432) C. R. Acad. sc. Paris 125 (1897), p. 638/40, 858/9; 126 (1898), p. 213/5. L'essai de démonstration de *H. G. Zeuthen* n'a pas abouti.

433) Il s'agit de la proposition bien connue: soient trois droites (directrices) d_1, d_2, d_3 ne se coupant pas deux à deux et quatre droîtes g_1, g_2, g_3, g_4 rencontrant chacune d_1, d_2, d_3. Toute droite rencontrant g_1, g_2, g_3 rencontre aussi g_4.

434) Math. Ann. 51 (1899), p. 401/9.

435) Ann. math. pures appl. 15 (1824/5), p. 390 et suiv. [voir III 17, **23**].

lèles[436]), *sans avoir recours ni au postulat de la continuité ni au postulat d'Archimède.*

La géométrie projective analytique peut être développée, sans avoir recours au postulat d'Archimède, en s'appuyant:

d'une part, sur les développements récents concernant la théorie des proportions [cf. nº **18**], dont la connexion avec le théorème fondamental de la projectivité (au sens restreint) apparaît dans la démonstration de ce théorème fondée sur l'invariance par projection du rapport anharmonique;

d'autre part, sur l'introduction des coordonnées sans faire usage d'un procédé de mesure, en d'autres termes sur le calcul des *tétrades (Würfen)* de *K. G. Chr. von Staudt* [cf. III 8] et sur les développements de *H. Hankel* et *F. Schur* concernant le calcul par segments en géométrie projective.

D. Hilbert part d'un calcul par segments basé sur le théorème de Desargues et met en lumière le rôle du théorème de Pappus en montrant son équivalence avec la *commutativité de la multiplication.*

Comme, en se plaçant au point de vue arithmétique, on peut définir un système de nombres non-archimédiens pour lesquels la multiplication n'est pas commutative, on peut donc conclure avec *D. Hilbert* que *le théorème de Pappus ne peut être démontré à l'aide des postulats projectifs de l'espace sans faire usage des postulats de la continuité et de la congruence.*

On voit ainsi qu'il existe un système abstrait géométrique *non-pappusien* ou, comme dit *D. Hilbert,* un système *non-pascalien,* auquel s'appliquent les propriétés fondamentales de la disposition et de l'appartenance.

Il semble que l'on puisse caractériser le lien du postulat de la congruence et du théorème fondamental de la projectivité de la manière suivante: par des projections et sections successives en partant d'une droite et en aboutissant finalement à cette même droite, ou encore en partant d'un plan et en aboutissant finalement à ce même plan, on obtient sur la droite envisagée, ou sur le plan envisagé, une projectivité; le théorème fondamental nous apprend que la suite de projectivités que l'on peut ainsi former constitue un *groupe* dépendant d'un nombre *fini* de paramètres (pour la droite ce nombre est égal

436) *G. Hessenberg* [Math. Ann. 61 (1905), p. 161/72] et *J. Hjelmslev* [Math. Ann. 64 (1907), p. 449/74] ont démontré le même théorème sans faire usage du postulat des parallèles et sans quitter le plan.

à trois). Ce fait semble être une conséquence de ce que les postulats de la congruence impliquent déjà que la suite de projectivités envisagées contient un sous-groupe fermé contenant *un seul* paramètre.

Comme le remarque *B. Levi*[437]), les postulats de la congruence dans la géométrie non-euclidienne nous permettent de déterminer dans le plan une certaine polarité alors que dans la géométrie euclidienne ils nous font connaître une polarité (à savoir la polarité orthogonale) dans la gerbe de droites ou de plans. On peut démontrer le théorème de la projectivité dans le plan ou dans la gerbe sans faire usage des postulats de la continuité, en ayant seulement soin d'adjoindre aux postulats descriptifs de l'espace un postulat affirmant l'existence d'une polarité à l'intérieur de la forme donnée de rang deux (plan ou gerbe).

51. Géométrie euclidienne non-archimédienne. Les nombres fonctionnels de *D. Hilbert* [nº **47**] peuvent être considérés comme coordonnées de „points" d'un espace non-archimédien, qui satisfait à tous les postulats de l'appartenance, de la disposition et de la congruence, ainsi qu'au postulat des parallèles.

On obtient ainsi une géométrie *euclidienne non-archimédienne* particulièrement simple. *D. Hilbert* a étudié les théorèmes fondamentaux de cette géométrie dans leurs rapports d'une part avec la notion d'aire et d'autre part avec les théorèmes fondamentaux de la géométrie métrique plane[438]):

α) Comme on l'a dit au nº **17**, on peut obtenir une mesure de surface indépendamment du postulat d'Archimède, si l'on convient d'envisager comme *équivalents* (c'est-à-dire de même aire), non seulement deux polygones P et P' pouvant être décomposés en un nombre fini de polygones congruents, en sorte que

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n,$$
$$P' = P_1' + P_2' + \cdots + P_n'$$

(où pour $i = 1, 2, \ldots, n$, P_i' est congruent à P_i), mais aussi deux polygones P et P' pouvant être décomposés en un nombre infini de polygones congruents.

β) Le postulat III 7 du nº **11** se rapporte à la congruence des triangles dans lesquels deux côtés et l'angle compris sont respectivement congruents; la congruence est *directe* quand le sens des angles

437) Memorie Accad. Torino (2) 54 (1904), p. 283.

438) Proc. London math. Soc. (1) 35 (1902/3), p. 50; Grundlagen[27]), Anhang II.

congruents est le même; elle est inverse dans le cas contraire; le postulat est satisfait dans les deux cas.

La vérification de ce postulat a un caractère expérimental et, dans le cas de congruence inverse, un rabattement de la figure plane autour d'une droite du plan (rabattement pendant lequel la figure quitte le plan) est nécessaire. Sans quitter le plan des deux triangles, on ne peut reconnaître s'ils sont congruents ou non que lorsque les angles égaux sont de même sens; ainsi donc on est amené à remplacer le postulat III 7 par un postulat sur la congruence au *sens restreint* concernant les triangles.

Bornons-nous toujours au cas des figures planes. Si, dans ce cas, *on pose les postulats ordinaires de l'appartenance et des parallèles, de la disposition et de la congruence* [cf. α, β, γ des n[os] **9, 10, 11**], *en convenant de restreindre ce dernier au postulat de la congruence de triangles* directement congruents, *on peut* démontrer *le postulat de la congruence au sens le plus étendu en adjoignant aux autres postulats:*

a) *le postulat d'Archimède,*

b) *le postulat du* voisinage.

Ce dernier consiste en ce que *à tout segment AB correspond un triangle à l'intérieur duquel n'existe aucun segment congruent à AB.*

Mais *si l'on fait abstraction du postulat d'Archimède* on ne peut démontrer *le théorème sur la congruence des triangles dans le sens le plus étendu.* Cela résulte de ce qu'il existe un système géométrique qui satisfait aux postulats cités, mais où les *angles à la base d'un triangle isocèle* ne sont pas égaux. *D. Hilbert* a donné à ce système le nom de système *non-pythagorien.*

D. Hilbert montre que dans tout système non-pythagorien:

a) on peut établir une théorie géométrique des proportions;

b) on peut démontrer que la somme des surfaces des carrés construits sur les deux côtés d'un triangle rectangle est, par soustraction de parties congruentes, égale à la surface du carré construit sur l'hypoténuse de ce triangle rectangle (en sorte que le théorème de Pythagore s'applique); mais il n'en résulte pas que, si b et c sont les longueurs des côtés et a celle de l'hypoténuse, on ait

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

parce que le *principe de Zolt* qui sert de fondement à la mesure ordinaire des surfaces ne s'applique pas [cf. n° **17**];

c) on ne peut pas cependant toujours appliquer le théorème que la somme de deux côtés d'un triangle est plus grande que le troisième.

Si cependant on adjoint aux postulats du système non-pythagorien

le principe de Zolt, on peut prouver le théorème de l'égalité des angles de base dans le triangle isocèle[439]).

Ces résultats mettent en lumière les rapports des théorèmes fondamentaux de la géométrie métrique plane (construite dans le sens des anciens) avec l'intuition de l'espace à trois dimensions, de même que le résultat du n° **27** touchant le théorème de Desargues démontre l'importance de l'espace à trois dimensions pour fonder la géométrie projective.

52. Développements non-archimédiens sur la théorie des parallèles. Les rapports du postulat d'Archimède avec la théorie des parallèles ont été mis en lumière en se plaçant à deux points de vue distincts:

1) en établissant les fondements de la géométrie hyperbolique non-archimédienne: c'est ce qu'ont fait *M. Dehn*, *F. Schur* et *D. Hilbert*;

2) à l'occasion des développements non-archimédiens relatifs aux théorèmes de *G. Saccheri* (ou de *A. M. Legendre*), en d'autres termes en construisant les systèmes géométriques de *M. Dehn.*

Dans l'étude des principes de la théorie des parallèles de *J. Bolyai* et *N. I. Lobačevskij* on applique souvent le postulat de la continuité sous la forme ordinaire de *R. Dedekind* ainsi que le postulat d'Archimède (qui est contenu dans celui de *R. Dedekind*).

On a tout d'abord recours à la continuité pour établir *l'existence des parallèles* (menées par un point à une droite donnée) puisqu'on définit les parallèles comme des *droites limites* séparant les droites sécantes des droites non-sécantes.

Si, l'existence des parallèles étant admise comme résultat d'un postulat, on adjoint ce postulat aux postulats α, β, γ des n[os] **9, 10, 11** restreints au plan, la théorie de *J. Bolyai* et *N. I. Lobačevskij* peut, comme l'a fait voir *D. Hilbert*[440]), être développée d'une façon très simple sans faire usage de la continuité ou du postulat d'Archimède. Il faut d'ailleurs remarquer[441]) que la possibilité de procéder ainsi peut être considérée comme résultant implicitement des principes mêmes de la géométrie non-archimédienne, puisque, en admettant l'existence de parallèles dans le plan, on se donne la conique limite des véritables points pour laquelle la métrique est définie au sens de *A. Cayley* et *F. Klein* [n° **29**].

439) Cela résulte déjà implicitement du mémoire de *T. Bonnesen*, Nyt Tidsskrift mat. Köbenhavn (Copenhague) Afd. B 11 (1900), p. 25.

440) Math. Ann. 57 (1903), p. 137/50; Grundlagen[27]), (2[e] éd.) p. 107/20; cf. *H. Liebmann*, Math. Ann. 59 (1904), p. 110/28.

441) Cf. *F. Schur*, Math. Ann. 59 (1904), p. 314.

F. Schur[442]) *a prouvé que l'existence de droites parallèles (limites de droites sécantes) dans le plan de J. Bolyai et N. I. Lobačevskij peut être démontrée à l'intérieur du plan sans faire usage de la continuité ou du postulat d'Archimède, si l'on adjoint aux postulats ordinaires de l'appartenance, de la disposition et de la congruence, le postulat qu'un cercle et une droite dont la distance au centre de ce cercle est moindre que le rayon, ont deux points communs.*

Ce dernier postulat peut être envisagé comme le postulat fondamental des constructions euclidiennes.

L'importance du résultat obtenu par *F. Schur* résulte surtout de ce qu'il a pu aussi démontrer qu'inversement:

Si les postulats de l'appartenance, de la disposition et de la congruence [cf. α, β, γ des n^os **9, 10, 11**] *s'appliquent, on fait, en supposant l'existence de droites parallèles dans le plan de J. Bolyai et N. I. Lobačevskij, une hypothèse qui contient le postulat fondamental des constructions euclidiennes.*

Si, en effet, on considère la métrique projective relative à la conique limite des véritables points, on peut, quand les points d'intersection de cette conique avec une véritable droite sont donnés, déterminer les points d'intersection d'un cercle avec une droite dont la distance au centre de ce cercle est inférieure au rayon.

Après examen des constructions que l'on peut exécuter à l'aide du seul transporteur de segments ou plus simplement encore à l'aide du seul *transportenr du segment-unité*, *D. Hilbert*[443]) a prouvé que le postulat fondamental des constructions euclidiennes ne résulte pas des postulats α, β, γ des n^os **9, 10, 11**.

En ce qui concerne les rapports entre les théorèmes de *G. Saccheri* sur la somme des angles d'un triangle et les postulats sur les parallèles, *M. Dehn*[444]) a obtenu les résultats suivants:

En se basant sur les postulats de l'appartenance, de la disposition[445]) *et de la congruence, mais sans faire usage du postulat d'Archimède, on démontre que la somme s des angles de chaque triangle est plus grande que deux angles droits, égale à deux angles droits ou plus petite que deux angles droits, s'il en est ainsi pour un seul triangle particulier.*

Si l'on n'applique pas le postulat d'Archimède, le fait d'être dans le cas où la somme s est plus grande que deux angles droits n'implique pas nécessairement que la droite soit une ligne fermee, ni que toutes les droites du plan la coupent; de même, le fait d'être dans le cas où la somme s est égale à deux angles droits n'implique pas que l'on puisse démontrer le postulat d'Euclide d'après lequel par un point on peut mener une et une seule droite parallèle à une droite donnée; par contre le fait d'être dans le cas où la somme s est plus petite que deux angles droits, implique (comme dans la géométrie hyperbolique ordinaire) l'existence d'une infinité de droites passant par un point exterieur à une droite donnée et ne rencontrant pas cette droite.

442) Math. Ann. 59 (1904), p. 314/20.

443) Grundlagen[27]), (2^e éd.) p. 73.

444) Math. Ann. 53 (1900), p. 404.

445) Ceux-ci sont modifiés au besoin, de façon que la ligne droite puisse être fermée.

Ces résultats ont été obtenus par *M. Dehn* par la construction de systèmes géométriques nouveaux non-archimédiens de deux types différents qu'il appelle système *non-legendrien* et système *semi-euclidien.*

Dans la géométrie *non-legendrienne* (on devrait plutôt dire *non-saccherienne*) le rapport de la somme des angles d'un triangle à deux angles droits est plus grand que 1 et, par un point du plan extérieur à une droite donnée, on peut mener une infinité de droites ne rencontrant pas la droite donnée ou, comme dit *M. Dehn*, parallèles à la droite donnée[446]).

Dans la géométrie *semi-euclidienne*, le rapport de la somme des angles d'un triangle à deux angles droits est égal à 1, et, par un point extérieur à une droite donnée, on peut aussi mener une infinité de droites ne rencontrant pas la droite donnée.

Ces résultats sont résumés dans le schéma suivant, où ϱ désigne le rapport de la somme des angles d'un triangle à deux angles droits.

	Par un point extérieur à une droite, on peut mener à cette droite		
	zéro parallèle	*une* parallèle	*une infinité* de parallèles
$\varrho > 1$	Géométrie elliptique	Cas impossible	Géométrie non-legendrienne
$\varrho = 1$	Cas impossible	Géométrie euclidienne	Géométrie semi-euclidienne
$\varrho < 1$	Cas impossible	Cas impossible	Géométrie hyperbolique

446) Ce système serait à étudier en connexion avec la seconde forme véronésienne [voir n° **49**].

G. Veronese, Atti del quarto congresso internazionale dei matematici in Roma 1908, vol. 1, Rome 1909, p. 197/208; trad. française: Bull. sc. math. (2) 33 (1909), p. 186/204.

III 1a. NOTES SUR LA GÉOMÉTRIE NON-ARCHIMÉDIENNE

PAR **A. SCHŒNFLIES** (KŒNIGSBERG).

1. Caractères spéciaux des nombres de Veronese pouvant représenter le continu. Les particularités arithmétiques et la portée des nombres transfinis introduits par *G. Veronese* ont été récemment étudiées d'une façon approfondie par *A. Schœnflies*[1]). Il s'est, à cet effet, surtout appuyé sur le résultat obtenu par *O. Hölder*[2]), et dont il a déjà été question au nº 7, concernant les conditions nécessaires et suffisantes pour que le postulat d'Archimède ait lieu.

Les nombres de Veronese les plus simples qui puissent se présenter sont ceux formés à l'aide d'une unité finie 1 et d'une unité transfinie (infiniment petite) η; cette unité est telle que, pour tout nombre fini N, l'inégalité

$$N\eta < 1$$

est vérifiée, ce qui est en opposition avec le postulat d'Archimède. Si l'on désigne par A et B des nombres ordinaires (pour lesquels le postulat d'Archimède est vérifié), l'expression

$$A + B\eta$$

représente le nombre transfini le plus général du type envisagé.

O. Hölder a montré que le postulat de continuité de *G. Veronese* [cf. nº **13**] appliqué à ces nombres $A + B\eta$ n'impose une condition qu'au coefficient B de η et non au coefficient A de 1; cette condition est que les nombres B qui figurent dans l'expression $A + B\eta$ doivent être nécessairement continus au sens de *R. Dedekind.*

Il en est de même de tout système de nombres transfinis qui est formé à l'aide d'un nombre fini d'unités infiniment grandes ou in-

1) Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 15 (1906), p. 26.

2) Ber. Ges. Lpz. 53 (1901), math. p. 1.

finiment petites, en particulier des systèmes dont les nombres peuvent être représentés sous la forme

$$A_\mu \omega^\mu + A_{\mu-1}\omega^{\mu-1} + \cdots + A_1\omega + A_0 + a_1\eta + \cdots + a_\nu\eta^\nu,$$

où μ et ν sont des nombres entiers positifs et où les unités (infiniment grandes) ω et (infiniment petites) η sont des nombres transfinis tels que l'on ait pour chaque nombre N fini

$$\omega^\lambda > N\omega^{\lambda-1}$$

et

$$\eta^\lambda < N\eta^{\lambda-1},$$

quel que soit le nombre entier positif λ.

La continuité de *G. Veronese* n'impose ici une condition qu'au dernier coefficient a_ν (le nombre a_ν doit être continu au sens de *R. Dedekind*); chacun des autres coefficients a_i ainsi que chacun des coefficients A_i peut être choisi arbitrairement parmi les nombres pour lesquels le postulat d'Archimède est vérifié; on peut même supposer qu'il ne puisse prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Les nombres transfinis les plus simples qui correspondent au concept du continuum de *G. Veronese* sont formés à l'aide d'un nombre infini d'unités transfinies; d'une façon plus précise ils sont de la forme

$$A_\mu\omega^\mu + A_{\mu-1}\omega^{\mu-1} + \cdots + A_1\omega + A_0 + a_1\eta + \cdots + a_\nu\eta^\nu + \cdots\cdot\cdot$$

et contiennent un nombre fini[3]) de puissances de ω, mais une infinité de puissances de η.

La continuité de *G. Veronese* n'impose ici aux coefficients aucune condition. On y fait d'ailleurs abstraction de ce que ces nombres transfinis doivent satisfaire à des règles quelconques de calcul ou de ce que leur ensemble doit former un corps quelconque de nombres.

Les nombres *monosemii* de *T. Levi-Civita* sont construits d'une façon analogue, mais ils ont un caractère plus général puisque les

3) Cette restriction est ici essentielle. *G. Veronese* [Fondamenti di geometria, Padoue 1891, p. 200; trad. allemande par *A. Schepp*, Grundzüge der Geometrie, Leipzig 1894, p. 217] avait donné un exemple dans lequel figuraient des nombres avec une infinité de puissances de ω. Les règles habituelles du calcul ne conviennent plus à ces nombres; c'est au fond ce qu'a objecté *A. Schœnflies* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic. mat.* (5) 6 II (1897), p. 362] à l'introduction de ces nombres.

G. Veronese et *T. Levi-Civita* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic. mat.* (5) 7 I (1898), p. 79, 91, 113] ont observé que la conception générale des nombres transfinis de *G. Veronese* s'opposait à l'introduction de ces nombres dont il avait (à tort) fait usage dans un exemple; l'objection de *A. Schœnflies* n'avait dès lors plus de raison d'être.

exposants de ω qui y figurent forment une suite *quelconque* de nombres décroissants, et ceux de η une suite quelconque de nombres croissants. Ce que l'on vient de dire pour les nombres de *G. Veronese* s'applique cependant encore à ces nombres *monosemii.*

On peut se proposer de définir les lois des quatre opérations rationnelles effectuées sur les nombres transfinis de *G. Veronese* dont il vient d'être question. Les définitions que l'on a adoptées coïncident avec celles qui permettent d'étendre les quatre opérations aux séries entières. En particulier pour que la division soit toujours possible, il faut introduire des nombres contenant une *infinité* de puissances de η.

Si au lieu de nombres on envisage un corps de nombres, il faut encore poser quelques conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients A_i et a_i. Pour obtenir en particulier un corps rationnel dans lequel la continuité de *G. Veronese* ait lieu, il suffit de prendre pour tous les coefficients A_i et a_i des nombres rationnels.

Il en est de même pour les nombres d'un caractère plus général encore que celui envisagé ici où les coefficients des puissances de ω et η forment un ensemble bien ordonné ayant la puissance du continu, et il en est aussi de même pour les nombres analogues de *T. Levi-Civita.*

2. Géométrie projective non-archimédienne. La géométrie projective s'applique dans l'espace de *G. Veronese* ou dans celui de *T. Levi-Civita.*

Cela est manifeste tant qu'on ne quitte pas le domaine des relations géométriques linéaires puisque toutes les opérations rationnelles s'appliquent aux nombres de *G. Veronese.*

Mais quand on quitte le domaine des nombres rationnels, les nombres de *G. Veronese* ne suffisent plus, malgré leur propriété de continuité, à la représentation des points, et cela même si l'on se donne la latitude de prendre pour les coefficients A_i et a_i qui figurent dans les expressions des nombres de *G. Veronese* tous les nombres ordinaires (archimédiens) possibles.

La cause profonde de cette anomalie est que, dans la continuité de *G. Veronese,* en opposition avec celle de *R. Dedekind,* apparaissent des *lacunes* auxquelles ne correspond aucune quantité numérique du système continu [nº **13**]. La continuité de *G. Veronese* est, à cet égard, en quelque sorte plus restreinte que celle de *R. Dedekind.*

Ainsi, pour ne citer qu'un exemple, la détermination des points doubles de deux ponctuelles projectives situées sur la même droite peut, dans certains cas, être illusoire[4]) et il en est de même, dans certains cas, pour la détermination des points d'intersection d'une conique avec une droite.

Pour que l'affirmation de *G. Veronese* que la géométrie projective s'applique à son espace soit entièrement exacte, il faut donc, quand on veut résoudre dans cet espace d'autres problèmes que des problèmes géométriques linéaires, *élargir* le domaine des nombres de *G. Veronese* par l'introduction de nouvelles unités de façon à rendre possible la résolution des divers problèmes qui peuvent s'y présenter.

On y parvient en prenant pour nouvelles unités des puissances fractionnaires de ω et η dont les exposants vérifient certaines conditions déterminées et en formant avec ces nouvelles unités et les puissances entières positives de ω et η des nombres plus généraux que ceux de *G. Veronese*[5]).

4) Voir l'exemple donné par *A. Schoenflies*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 15 (1906), p. 39.

5) Cf. *A. Schoenflies*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver., Ergänzungsband 2 (1908), p. 63.

III 2. LES NOTIONS DE LIGNE ET DE SURFACE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **H. VON MANGOLDT** (DANZIG),
PAR **L. ZORETTI** (CAEN).

1. Nécessité d'une explication précise. Dans les traités de géométrie ou d'analyse, aussi bien d'ailleurs que dans les dictionnaires, généraux ou mathématiques, on ne donne en général que peu ou pas du tout d'explications au sujet de la notion de ligne. Les traités de géométrie se bornent à une définition qui varie suivant les auteurs. Les uns font revivre les vieilles définitions d'*Euclide*, *longueur sans épaisseur* ou *limite d'une surface*[1]). D'autres définissent la ligne comme *intersection de deux surfaces*[2]) ou encore comme *trajectoire*[3]) *d'un point*[4]). Certains même font de la ligne une notion fondamentale et ne cherchent pas à la définir[5]).

*Dans les traités de géométrie analytique, aucune définition n'est donnée en général. On démontre les théorèmes sur la représentation

1) *Euclide*, Éléments, livre 1, déf. 2 et 6. Cf. III 1, 7, (p. 13).

2) *J. *Hadamard* [Leçons de géométrie élémentaire (1^{re} éd.) 1, Paris 1898, p. 1; (2^e éd.) 1, Paris 1906, p. 1] se place à ce point de vue. C'est aussi la définition adoptée par *C. Guichard*, Traité de géométrie, (2^e éd.) 1, Paris 1903, p. 1.*

3) *Procli* Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, éd. *G. Friedlein*, Leipzig 1873, p. 97; *Pappus*, *Συναγωγὴ μαθηματική*, livre 7 (au commencement d'une analyse de l'ouvrage perdu d'*Apollonius*, *Τόπων ἐπιπέδων δύο*); *Pappi* Alexandrini Collectio, éd. *F. Hultsch* 2, Berlin 1877, p. 662.

4) *On ignore à qui est due en réalité cette définition. *Pappus*[3]) semble l'attribuer à *Apollonius*, mais on pourrait la faire remonter à *Aristote* [cf. *T. L. Heath*, The thirteen books of Euclid's Elements 1, Cambridge 1908, p. 159]; la définition est indiquée dans les soi-disant „Definitiones" attribuées à *Héron* [cf. Bull. bibl. storia sc. mat. 4 (1871), p. 94] où sont mentionnées [id. p. 95] d'autres définitions concernant la notion de ligne (Note de *G. Eneström*).*

5) C'est l'opinion de (*Jean Le Rond*) *d'Alembert*, Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné 7, Paris 1757, p. 635; Encyclopédie méthodique, math. 2, Paris et Liége 1785, p. 136 (article Géométrie). On retrouve jusqu'à un certain point cette conception dans *F. Enriques*, Lezioni di geometria desrittiva, Bologne 1902, p. 167.

d'une ligne par une équation entre les coordonnées sans jamais dire expressément quelle définition on adopte pour le mot „ligne"[6]). La même lacune existe dans les traités d'analyse.*

Cependant, depuis un petit nombre d'années, le souci de la rigueur logique a amené une revision approfondie des principes de la géométrie. Dans l'article III 1 de l'Encyclopédie, *F. Enriques* indique les résultats obtenus dans cette voie; il suffit de rappeller ici les noms de *M. Pasch*, *G. Peano*, *D. Hilbert*, *F. Schur*, *H. Poincaré*. La conclusion qui rallie le plus grand nombre consiste à n'admettre comme notions fondamentales que celles de point, de ligne droite et de plan, en les considérant comme résultant par abstraction de l'observation directe, et à exiger dès lors pour toutes les autres notions géométriques une explication conforme aux règles de la logique. Il en est ou il doit en être notamment ainsi pour les notions de ligne et de surface. La chose est d'autant plus nécessaire qu'on peut prendre ces mots dans une acception plus ou moins large et que certains théorèmes de géométrie ne sont vrais que si le sens des mots ligne et surface est suffisamment étroit[7]). Si l'on voulait, d'ailleurs, considérer les notions de ligne et de surface comme résultant de l'observation, on se heurterait infailliblement dans certains cas, suivant *F. Enriques*, à des difficultés; car si l'on rencontrait une ligne définie par un procédé purement mathématique, géométrique ou analytique, on ne pourrait éviter de voir se poser la question suivante: dans quelle mesure y a-t-il identité entre les données de l'observation et les conséquences qui découlent de l'explication mathématique.

*Il n'est pas douteux que, de même qu'il existe une mécanique rationnelle et une mécanique appliquée, il y a aussi une *géométrie rationnelle* et une *géométrie appliquée*. La première choisit ses postulats comme elle le veut et les développe par les ressources de la raison. On a le droit de ranger parmi ces postulats l'existence de la ligne en lui attribuant telle ou telle propriété. Mais alors une difficulté se présentera quand on voudra démontrer qu'une droite, un cercle, sont des lignes.*

*Quant à la géométrie appliquée qui n'est pas en cause ici, elle impose seulement à la géométrie rationnelle de ne pas choisir ses postulats de façon trop arbitraire, en sorte que les résultats de celle-ci soient immédiatement utilisables en pratique. Par exemple, elle exige

6) *Voir par exemple, *Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Leçons de géométrie analytique, (16^e éd.) revue et annotée par *P. Appell*, Paris 1897, p. 5.*

7) On trouve déjà dans *Ch. Dupin* [Développements de géométrie, Paris 1813, p. 59] l'indication à la fois de la nécessité d'une explication du mot „surface" et des difficultés que cette explication soulève.

que la définition choisie pour la ligne, soit aussi conforme que possible à la notion vulgaire que nous en avons.*

2. Historique. L'antiquité ne s'est jamais préoccupée de donner une signification précise à la notion populaire de ligne. Il faut arriver jusqu'à *R. Descartes*[8]) pour relever pour la première fois la trace d'une telle préoccupation. Au commencement du second livre de sa Géométrie, il se demande, en effet, de quelles lignes il peut s'agir en géométrie. Il parvient à la conclusion qu'il y a lieu de se borner aux lignes que nous appelons aujourd'hui *algébriques.*

Son opinion trouva peu d'écho. Il fut notamment combattu à plusieurs reprises par *G. W. Leibniz*[9]) qui lui reproche assez justement d'exclure ainsi des considérations géométriques certaines lignes transcendantes, comme la cycloïde par exemple, dont l'introduction en géométrie est pourtant indispensable.

Cependant la Géométrie de *R. Descartes* marque un point capital dans l'histoire de la notion de ligne, car en enseignant l'application du calcul algébrique à la géométrie, l'usage de systèmes de coordonnées et la représentation des lignes par des équations, elle rapprochait d'une façon explicite les mots de „ligne" et de „fonction".

Depuis *R. Descartes,* la notion de ligne s'est développée en participant au développement de la notion de fonction indiqué[10]) dans l'article II 1, n° **1**. *L. Euler*[11]) insiste en particulier sur ce rapprochement.

*Il faut venir ensuite jusqu'à *K. Weierstrass*[12]) pour voir apporter une précision nouvelle par la définition des lignes analytiques qui joue dans l'analyse, un rôle essentiel. Enfin *C. Jordan*[13]) donne, dans son

8) Géométrie, Leyde 1637 [troisième appendice à l'ouvrage „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode", Leyde 1637]; Geometria a Renato Descartes, Leyde 1649, p. 21; Œuvres, éd. *Ch. Adam* et *P. Tannery* 6, Paris 1902, p. 367.

9) Acta Erud. Lps. 1684, p. 234; id. 1686, p. 295; id. 1693, p. 386; Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 5, Halle 1858, p. 124, 229, 295; voir aussi p. 290; De ortu, progressu et natura algebrae (œuvre posth.), Math. Schr. 7, Halle 1863, p. 213.

10) On pourra consulter aussi *A. Brill* et *M. Nöther*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/3), éd. Berlin 1894, p. 114.

11) Introductio in analysin infinitorum 2, Lausanne 1748, p. 5/6; trad. par *J. B. Labey,* Introduction à l'analyse infinitésimale 2, Paris an V, p. 3/4.

12) *Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen sich beziehende Sätze (autographié), Berlin 1879; Abh. aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, p. 105; Werke 2, Berlin 1895, p. 135.*

13) *J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 69; Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, (2e éd.) 1, Paris 1893, p. 90; (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 90.*

Traité d'analyse, une définition de la ligne continue qui a permis de donner une base solide aux théories de l'analyse. Il faut signaler aussi la définition plus ancienne de *G. Cantor*[14]) qui se place également au point de vue arithmétique, c'est-à-dire s'appuie sur la notion de nombre.*

Quant au point de vue géométrique pur, il est permis de dire que c'est celui qui a été étudié le dernier, et ses progrès remontent à une date toute récente[15]). On a vu, en effet [III 1, 7] que la définition à donner au mot ligne n'avait pas préoccupé les savants qui s'étaient occupés des postulats, dans la même mesure que les avaient préoccupés les autres concepts.

*Dans ce qui précède on voit déjà apparaître les deux concepts du mot ligne: concept géométrique, concept analytique. Dans la pratique ces deux concepts se pénètrent réciproquement au point de se confondre. Mais au point de vue de la formation des notions il faut les distinguer. Il y a lieu d'étudier séparément:

1°) les définitions et propriétés de la ligne en partant uniquement des postulats de la géométrie,

2°) les définitions et propriétés de la ligne basées uniquement sur la notion de nombre et, si l'on veut, de nombre entier.

Il faut d'ailleurs remarquer que la géométrie n'est pas indépendante de la notion de nombre.*

L'ordre suivi dans cet article sera par conséquent le suivant: on envisagera d'abord le point de vue géométrique pur, ensuite la notion de ligne analytique et les différentes généralisations qu'on en peut donner; enfin, on étudiera la notion de surface.

3. Notion géométrique de ligne. *Les définitions d'une ligne comme *longueur sans largeur* ou encore comme *limite d'une surface* sont évidemment peu satisfaisantes pour l'esprit. Pourtant, comme il a déjà été dit, c'est de définitions aussi inexistantes qu'on se contente en général. Avant de se demander, par conséquent, s'il est ou non possible d'arriver à une définition véritable de la ligne et comment elle se rattache aux postulats de la géométrie, il est plus urgent de nous poser la question suivante: dans les traités de géométrie où la définition de la ligne se réduit à cette explication sans précision, comment l'auteur raisonne-t-il? N'ayant pas défini les mots *longueur,*

14) *Acta math. 2 (1883), p. 404; Math. Ann. 21 (1883), p. 545.*

15) *Sur la notion de ligne envisagée à ce point de vue, cf. *G. W. Leibniz,* In Euclidis πρῶτα (œuvre posth.); Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 5, Halle 1858, p. 183/4 (Note de *G. Eneström*).*

largeur, *limite*, il lui est impossible de démontrer que les lignes dont il parle vérifient sa définition. Il est donc obligé de supposer l'existence de propriétés qu'il n'aura pas explicitement énoncées; il revient au même d'en faire autant de postulats. C'est bien à peu près ainsi [cf. n^{os} **4** et **8**] que les choses se sont passées pendant longtemps, au moins dans les applications de la notion de ligne à l'analyse. Mais en géométrie pure, il n'en est point de même. On peut constater en effet qu'on n'a jamais (jusqu'à *G. Cantor*) fait de théorie générale de la ligne. On a donc pu, et nous allons nous en rendre compte, se passer, sans faute de logique, d'une définition de ce mot. Seulement, l'auteur ne dit jamais: je ne définis pas *la ligne* en général et je n'en parlerai pas; en sorte qu'il importe avant tout de montrer qu'on peut obtenir toute la géométrie dite élémentaire[16]) sans user de cette définition. Une première remarque, c'est qu'on n'étudie pas *la ligne* en général, mais *des* lignes particulières (droites, cercles, coniques, ...) ce qui au premier abord est bien d'accord avec l'opinion précédente. Il suffira en effet d'appeler droite, cercle, conique, etc, des *lieux géométriques* ou, si l'on veut un mot plus moderne, des *ensembles de points* jouissant de certaines propriétés. On pourra d'ailleurs dire que les lieux ainsi définis sont des lignes ou des courbes, sans que cela demande aucune démonstration et par conséquent aussi sans que cela implique l'existence de propriétés communes et caractéristiques des êtres ainsi catalogués.*

*Mais la difficulté commence justement quand on veut démontrer de telles propriétés, par exemple la séparation du plan en régions, la convexité, l'existence des tangentes. On peut par exemple démontrer que la droite partage le plan en deux régions[17]). On entend par là que le *segment* de droite joignant deux points d'un même côté de la droite n'a avec celle-ci aucun point commun, et que le segment joignant deux points de part et d'autre a au contraire un point commun avec celle-ci. Si l'on veut démontrer de même que le cercle partage le plan en deux régions, on ne peut plus donner à cette propriété le sens qui vient d'être précisé. Il faut au mot *segment* de la phrase précédente en substituer un autre: celui de ligne vient naturellement à l'esprit; or c'est précisement celui qu'on veut éviter. On pourra se borner à ne considérer que des lignes brisées formées de plusieurs segments dont chacun a un point commun avec le suivant. En d'autres termes, on peut encore éviter de parler de la ligne en général, et cet exemple suffira à faire comprendre qu'il en est de même pour les autres propriétés énumérées plus haut et pour les lignes usuelles.*

16) *On peut ainsi obtenir ce que *F. Enriques* appelle géométrie élémentaire, géométrie projective, géométrie métrique. C'est dans l'Analysis situs [cf. III 8] qu'intervient essentiellement la notion de ligne [cf. III **1**, **21**].*

17) *La place de cette propriété par rapport aux différents systèmes de postulats est indiquée dans l'article III **1**, n^{os} **9** et **10**; voir surtout *M. Pasch*, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882.*

*D'ailleurs, si l'on se demande maintenant, pour chacune de ces propriétés, si elles sont caractéristiques de la ligne, on constatera qu'il n'en est rien. On a vu [II 2, **14**] que des ensembles ne répondant nullement à la notion vulgaire de ligne jouissent de bien des propriétés qui paraissent au premier abord n'appartenir qu'à celle-ci.*

Ce qui précède montre qu'une définition de la ligne n'est pas indispensable pour bâtir sur des bases solides la géométrie ordinaire. Mais ces réserves nécessaires une fois faites, nous allons essayer de donner cette définition, qui seule permettra d'élaborer une théorie générale, d'ailleurs encore peu avancée.

**G. Cantor*[18]) appelle *ensemble continu* un ensemble parfait *bien enchaîné*, c'est-à-dire tel qu'on puisse, étant donnés deux points de l'ensemble, établir entre ces deux points une chaîne de points de l'ensemble à des distances successives les uns des autres inférieures à tout nombre donné[19]).*

Cette définition équivaut à celle-ci: un ensemble continu est un ensemble parfait d'un seul tenant, c'est-à-dire non décomposable en deux ensembles parfaits[20]).

*On appelle alors *ligne au sens de Cantor* ou *ligne cantorienne* un ensemble continu qui ne contient aucun point intérieur. On dit qu'un point est un point intérieur si on peut trouver un nombre ϱ tel que tout point à une distance inférieure à ϱ du point donné soit un point de l'ensemble[21]).*

18) *Math. Ann. 21 (1883), p. 545; Acta math. 2 (1883), p. 404. Consulter au sujet de ce qui suit l'article II 2, n^{os} **11** à **14**.*

19) *Le but poursuivi par *G. Cantor* n'était pas tant de définir la ligne au point de vue géométrique que de donner une base arithmétique aux recherches d'analyse. Dans le texte, on va montrer comment les postulats de la géométrie [cf. III **1**] permettent de donner à la conception de *G. Cantor* une portée géométrique.*

20) *Voir au sujet de l'équivalence des deux définitions, outre les mémoires de *G. Cantor*[14]), *C. Jordan*, Cours d'Analyse, (3^e éd.) 1, Paris 1909, p. 25. Se reporter aussi à l'article II 2, n° **12**.*

21) *On écarte les ensembles à points intérieurs parce qu'ils donnent des *aires*, ou des domaines à deux dimensions.*

*Dans les études de *G. Cantor*, c'est le continu qu'on veut définir, la distinction du texte ne joue pas le rôle essentiel. Au contraire, dans l'étude

*Les postulats qui interviennent dans cette définition de la ligne sont: la notion de point, d'ensemble de points, la notion de point-limite, la notion de distance et la comparaison des distances [III 1, **10**].*

*Il convient de remarquer que la définition de *G. Cantor* n'est autre chose que celle d'*Euclide* (une ligne est une longueur sans largeur) mais présentée avec une précision qui lui manquait [voir III 1, **6** note 32].*

*La définition précédente n'est pas sans présenter de très grosses difficultés. L'extrême complication des lignes cantoriennes laisse peu d'espoir d'arriver à démontrer un grand nombre de propriétés qui leur soient communes, et l'on est encore peu avancé dans leur étude. On peut se proposer, dans le but d'augmenter le nombre de ces propriétés, d'ajouter quelques restrictions à cette définition. C'est ce qu'a fait *L. Zoretti* dans des recherches dont il sera question à la fin de ce n° **3**.*

Une autre question importante est la suivante: cette définition est-elle bien conforme à l'idée vulgaire qu'on se fait d'une ligne? Commençons par examiner ce dernier point.

*La réponse ne peut être absolument nette, car la notion vulgaire de ligne peut varier, varie certainement, d'un individu à l'autre. La seule chose à faire, si l'on ne veut pas prendre parti, consiste à montrer par des exemples jusqu'où peut aller la complication de la définition de *G. Cantor*[22]).*

A. Considérons d'abord l'ensemble des points d'une circonférence auxquels nous adjoindrons les points d'un rayon de la même circonférence.

B. *Soit la courbe dont l'équation est

$$y = \sin^2 \frac{1}{x}, \quad \text{où} \quad -\frac{1}{\pi} \leq x \leqq +\frac{1}{\pi},$$

à laquelle nous adjoignons

1°) les points

$$x = 0, \quad \text{où} \quad 0 < y \leq 1,$$

2°) les points

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\pi}, \quad \text{où} \quad y < 0.$$

L'ensemble ainsi construit est une courbe au sens de *G. Cantor*[23]).*

actuelle, cette distinction est fondamentale. Dans les applications à l'Analyse, il en est d'ailleurs de même. Ajoutons encore que deux lignes cantoriennes sans point commun ne forment pas un continu pour *G. Cantor*. Ici au contraire, il n'y aura pas d'inconvénient à dire que leur réunion forme une ligne, mais pas une ligne continue.*

22) *D'après *L. Zoretti*, la question du texte n'a qu'un intérêt secondaire; nous n'avons pas en effet à choisir entre plusieurs définitions; celle de *G. Cantor* est *la seule* en cause. Tout ce qu'on peut essayer c'est de la modifier, par exemple dans le sens qui sera indiqué à la fin de ce n° **3**.*

23) **H. Lebesgue*, Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 378.*

C. *Considérons sur le segment (0, 1) de l'axe des x un ensemble parfait non dense [I 7, **15**; II 2, **4**], par exemple l'ensemble classique de *G. Cantor*[24]) formé des points dont l'abscisse s'écrit dans le système de numération de base 3 sans employer le chiffre 1. Élevons en chaque point de l'ensemble une perpendiculaire de longueur un à l'axe des x dans le demi plan supérieur; l'ensemble formé par les segments obtenus et par le segment (0, 1) de l'axe des x est une ligne de Cantor[25]).*

D. *On peut faire la construction précédente (C) à la fois sur l'axe des x et des y. L'ensemble formé par la réunion de tous les segments est une ligne de Cantor[26]).*

La première propriété que nous devons étudier est relative à la division du plan en régions par une ligne, qui nous permettra d'arriver à une définition d'une ligne fermée, ou d'une ligne simple fermée. Nous touchons là à une autre conception vulgaire de la ligne: c'est celle qui consiste à considérer la ligne comme tout ou partie de la frontière d'une surface ou d'un continuum plan, en appelant ainsi pour adopter tout de suite un langage précis un ensemble continu qui renferme des points intérieurs[27]). On reconnaît immédiatement en étudiant les exemples précédents que des restrictions sont nécessaires.

La ligne A divise le plan en deux régions. Mais il y a des points de la ligne (ceux du rayon, sauf un) qui ne sont pas limites de points extérieurs.

La ligne B divise aussi le plan en deux régions et l'exception ci-dessus ne se présente pas, mais certains points de B (ceux qui sont situés sur l'axe des y) ne peuvent pas être joints à un point intérieur par une ligne continue formée d'un nombre fini de segments et tout entière à l'intérieur (nous avons vu plus haut le rôle spécial que jouaient les lignes formées uniquement de segments rectilignes).

*La ligne D définit dans le plan une infinité dénombrable [cf. I 7 ou II 2, **1** à **3**] de petites aires.*

*Il ne faudrait pas croire d'ailleurs qu'on simplifierait beaucoup

24) *Math. Ann. 21 (1883), p. 590; Acta math. 2 (1883), p. 407.*

25) **W. F. Osgood*, Trans. Amer. math. Soc. 1 (1900), p. 311.*

26) **L. Zoretti*, Ann. Ec. Norm. (3) 26 (1909), p. 486. On trouvera d'autres exemples dans *F. Klein* [Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (cours autographié Göttingue 1901, éd. Leipzig 1902); nouv. éd., Leipzig 1907, p. 235] et *A. Schoenflies* [Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 8² (1899), éd. Leipzig 1900, p. 101 et suiv. Voir également II 2, **12**].*

27) *Voir [II 2, **10**] les différentes acceptions des mots *domaine, continuum*, . . .*

en se bornant à étudier la frontière *commune* à deux continua dont l'un est tout entier à distance finie et dont l'autre l'entoure complètement; c'est par exemple ce qui a lieu pour la courbe B[28]).*

La première restriction apportée à la définition de *G. Cantor* est due à *A. Schoenflies*[29]). Le but que se propose *A. Schoenflies* est d'établir une définition analogue à celle de *C. Jordan* qui sera étudiée un peu plus loin [nº 8]. Bornons-nous pour l'instant à énoncer ses résultats. Il appelle[30]) *chemin simple* (*einfacher Weg*) un ensemble de segments de droites, d'un seul tenant, ne se coupant pas lui-même et qui se compose soit d'un nombre fini de segments, soit tout au plus d'une infinité jouissant de la propriété suivante: les extrémités de ces segments forment un ensemble de points ayant un seul point-limite[31]). Soit alors un point a de la frontière d'un continuum M; ce point est dit *accessible à M* si l'on peut constituer un chemin simple aboutissant à a à partir d'un point quelconque de M, ce chemin devant être entièrement intérieur à M (sauf son extrémité a).

Ceci posé, il considère une ligne cantorienne formant la frontière commune de deux continua sans point commun: la condition nécessaire et suffisante pour que cette ligne soit une *ligne de Jordan* est que tous ses points soient accessibles à la fois pour chacun des deux continua que la ligne sépare.

On voit donc, et c'est pour cela que ces résultats trouvent leur place dans cette partie géométrique de l'étude actuelle, que la propriété de séparer le plan en deux régions appartient à des lignes cantoriennes qui ne sont pas *lignes de Jordan*. La courbe B en est un exemple.

*Une restriction de nature plus cantorienne a été apportée à la définition de *G. Cantor* par *L. Zoretti*[32]). La nécessité de cette restriction apparaît dans l'étude géométrique par la nécessité de définir un *arc*

28) *Il peut arriver qu'une ligne cantorienne soit la frontière commune à *trois* domaines à la fois et même à une *infinité* de domaines. Voir *A. Denjoy*, C. R. Acad. sc. Paris 151 (1910), p. 138.

29) Nachr. Ges. Gött. 1902, p. 185; id. 1904, p. 514. Math. Ann. 58 (1904), p. 195; 59 (1904), p. 129; 62 (1906), p. 286. Voir aussi *A. Schoenflies*, Die Entwickelung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten, 2. Teil, Jahresb. deutsch. Math.-Ver., Ergänzungsband 2 (1908), p. 94, 199.

30) *A. Schoenflies*, Math. Ann. 58 (1904), p. 202; 59 (1904), p. 131; Nachr. Ges. Gött. 1904, p. 516; Jahresb. deutsch. Math.-Ver., Ergänzungsband 2 (1908), p. 199.

31) *Voir I 7, 2 et II 2, 3. Cet ensemble ayant un seul point limite est dénombrable: l'ensemble des segments l'est donc aussi (II 2, 4).*

32) *Ann. Ec. Norm. (3) 26 (1909), p. 485.*

d'une courbe donné, d'éclaircir la notion de „situé entre" relativement aux points d'une courbe comme on le fait pour la droite [cf. III 1 10]. On y parvient en introduisant la notion d'ensemble *irréductible.**

Un ensemble continu est dit irréductible entre deux de ses points a et b quand il n'existe aucune portion continue de l'ensemble comprenant à la fois a et b. Un ensemble irréductible ne peut pas contenir de points intérieurs. Dans le plan, il est donc linéaire; dans l'espace à trois dimensions il peut contenir des aires.

Tout ensemble continu contient une portion irréductible entre deux points donnés d'avance. Toute portion continue d'un ensemble irréductible est elle-même irréductible. Un ensemble irréductible entre deux points a et b peut l'être également entre deux autres points. Parmi les ensembles irréductibles, les plus simples sont ceux qui le sont d'une seule manière et dont toute portion est également irréductible d'une seule manière. C'est dans ceux-là qu'on peut voir la notion la plus générale d'une ligne simple.

**L. Zoretti* démontre le théorème suivant: si l'on décompose un continu irréductible entre deux points en deux continus ayant un et un seul point commun, ces deux continus sont séparément irréductibles. Si le point commun c est donné à l'avance, la décomposition, lorsqu'elle est possible, ne l'est que d'une seule manière. Cette décomposition est toujours possible lorsque l'ensemble continu donné a toutes ses portions irréductibles d'une seule manière.*

*Les ensembles irréductibles pour lesquels cette décomposition est possible sont appelés *arc simples* par *S. Janiszewski*.*

*Ces théorèmes donnent un sens précis aux expressions *arc de courbe* et *point situé entre deux autres*. Un ensemble continu étant irréductible, l'arc de courbe cd sera la portion continue (unique d'après ce qui précède) de l'ensemble donné qui est irréductible entre c et d. Un point m sera dit *situé entre a et b* s'il appartient à l'arc cd.*

*La définition du mot *arc* est moins simple quand l'ensemble continu donné n'a pas toutes ses portions irréductibles d'une seule manière[33]). *L. Zoretti* démontre le théorème suivant:

Étant donné un ensemble continu irréductible C et un point c de C, on peut, et d'une seule manière, décomposer C en trois ensembles C_1, C_2, Γ jouissant des propriétés suivantes:

1°) C_1 et C_2, sont bien enchaînés et ont en commun le seul point c;

2°) Γ est l'ensemble des points-limites communs de C_1 et C_2;

33) *L. Zoretti*, C. R. Acad. sc. Paris 151 (1910), p. 201.

5°) chacun des ensembles $C_1 + \Gamma$ et $C_2 + \Gamma$ est continu et irréductible.*

*En second lieu, soit un continuum et soient a et b deux points quelconques de sa frontière extérieure[34]). *L. Zoretti* démontre que cette frontière, qui est continue[35]), est la somme de deux ensembles continus irréductibles entre a et b et n'ayant que ces points a et b en commun, pourvu toutefois que l'on puisse joindre a et b par une ligne intérieure au continuum n'ayant que a et b en commun avec la frontière de celui-ci. Cette décomposition n'est possible que d'une manière.*

*On peut, en se plaçant à un point de vue qui rappelle celui de *A. Schoenflies*, étudier les rapports entre les ensembles continus irréductibles[36]) et la ligne de Jordan. Ici aussi une restriction est indispensable pour l'identité des deux notions. Voici comment l'énonçait d'abord *L. Zoretti*: un arc quelconque de l'ensemble irréductible donné doit se réduire en entier à un point quand ses extrémités tendent vers un même point limite. La courbe B, par exemple, ne satisfait pas à cette restriction. *L. Zoretti*[37]) appelait d'abord „absolument fermé", puis *ensemble irréductible simple*, un ensemble jouissant de cette propriété. Un tel ensemble est identique à *l'arc simple* de *S. Janiszewski*.*

*La définition générale de *G. Cantor* permet de donner une définition du mot *tangente*. *S. Janiszewski*[38]) appelle ainsi une droite jouissant

34) **L. Zoretti*, J. math. pures appl. (6) 1 (1905), p. 9.*

35) **E. Phragmén*, Acta math. 7 (1885/6), p. 43; voir aussi *L. Zoretti*, J. math. pures appl. (6) 1 (1905), p. 9.*

36) *Il importe de remarquer que même les lignes irréductibles sont d'une complication assez grande; on est ainsi amené à chercher d'autres restrictions, comme celle de l'ensemble absolument fermé[32]). D'après *L. Zoretti*, il vaut mieux reconnaître que l'on n'a pas prévu dès le début jusqu'où pouvait aller la complication de notre conception vulgaire de ligne, et chercher à démontrer des propriétés générales en prenant une définition aussi large que possible. Ce n'est évidemment pas la première fois qu'en approfondissant une conception, elle se complique (sans s'obscurcir d'ailleurs) dans des proportions inattendues. L'historique du mot *fonction* en fournit un exemple topique [cf. II 1, **1** à **3**]; le droit de chacun de choisir comme sujet d'études une acception plus ou moins large de ce mot est cependant incontestable.*

*La complication de la notion de ligne cantorienne ou de ligne irréductible est mise en évidence par *S. Janiszewski* [C. R. Acad. sc. Paris 150 (1910), p. 1502], *L. E. J. Brouwer* [Math. Ann. 68 (1910), p. 422], *A. Denjoy* [C. R. Acad. sc. Paris 151 (1910), p. 138], *L. Zoretti* [C. R. Acad. sc. Paris 150 (1910), p. 1505; 151 (1910), p. 201]; Acta math. 34 (1911) sous presse]. Des exemples donnés par *L. E. J. Brouwer* montrent qu'un continu irréductible peut diviser le plan en deux régions séparées.*

37) *Ann. Ec. Norm. (3) 26 (1909), p. 492.*

38) *C. R. Acad. sc. Paris 150 (1910), p. 606.*

de la propriété suivante: une droite T est dite tangente au point A d'un ensemble continu si, étant donné un nombre positif quelconque δ, on peut trouver un cercle de centre A assez petit pour que, M étant un point quelconque de l'ensemble intérieur au cercle tel que l'arc simple réunissant deux de ces points ne renferme pas A, la droite AM fasse avec T un angle inférieur à δ[39]).*

**L. Zoretti*[39a]) donne une définition analogue et montre que le cas d'une tangente unique en chaque point ne peut pas se présenter pour un ensemble qui n'est pas irréductible *simple*.*

4. La ligne analytique. *La définition de *G. Cantor* est la plus récente de toutes celles qui ont été proposées. C'est aussi celle qui présente le caractère le plus géométrique et c'est la raison qui nous l'a fait étudier la première. Mais l'application du calcul à la géométrie avait déjà conduit *R. Descartes* et ses successeurs à un certain nombre de définitions.*

L'idée de *R. Descartes* était d'établir un lien étroit entre les figures de géométrie et les opérations du calcul algébrique, entre la notion de ligne et celle de fonction. On ne sera donc pas étonné de voir la notion de ligne se compléter et se perfectionner en même temps que la notion de fonction. On a déjà dit plus haut que les courbes algébriques étaient les seules dont voulait s'occuper *R. Descartes*. On fut bien obligé de donner peu à peu droit de cité à toutes les courbes dont les coordonnées d'un point sont liées par une relation analytique. Mais tout le monde était bien convaincu que la plupart des lignes qu'on peut imaginer, tracer au hasard, restaient en dehors de cette représentation[40]).

La notion précise de ligne analytique est due à *K. Weierstrass*. Elle repose sur la notion de variété ou configuration analytique monogène de première espèce dans un domaine à deux ou trois variables. Il y a identité entre les deux notions si l'on admet l'introduction des points complexes (à coordonnées complexes).

Un point dans l'espace est un système de trois nombres réels ou non; un point dans le plan est un système de deux nombres réels ou non.

39) **S. Janiszewski* appelait alors *arc* d'un continu linéaire toute portion continue du premier, et *arc simple* ce que *L. Zoretti* appelle ensemble irréductible.*

39a) *Les travaux dont il est question à la fin de ce n° **3** [cf. notes 33 et 36] sont tout à fait récents et demandent à être un peu plus coordonnés.*

40) *On ne voyait évidemment pas le moyen d'introduire en mathématiques de telles courbes. Une tentative fut faite par *L. Euler* [Hist. Acad. Berlin 4 (1748), éd. 1750, p. 84; id. 9 (1753), éd. 1755, p. 217].*

Une ligne analytique est l'ensemble des points dont les coordonnées sont fonctions analytiques d'un paramètre.

On voit que la définition de la ligne perd désormais tout caractère géométrique. La géométrie n'intervient plus ici que pour prêter à l'analyse un langage commode[41].

La définition de *K. Weierstrass* est la plus *étroite* de toutes celles que nous examinerons.

Si on se borne à considérer des points réels, c'est-à-dire à coordonnées réelles, on obtient la notion plus restreinte de *ligne analytique réelle.*

C'est par sa définition de la *ligne analytique* que *K. Weierstrass* a donné une réponse à la question, qui s'était posée déjà au 18ième siècle, de déterminer les conditions sous lesquelles on peut considérer une ligne comme un ensemble soumis dans toutes ses parties à une *même* loi.

Une ligne analytique dont tous les points sont dans un plan (réel ou complexe) s'appelle *plane*; dans le cas contraire, elle est dite *gauche* ou *à double courbure* (gewunden; doppelt gekrümmt).

5. Arcs d'une ligne analytique[42]. Soit un point P de coordonnées x_0, y_0 dans le plan, de coordonnées x_0, y_0, z_0 dans l'espace; supposons que P appartienne à une ligne analytique. Il est en général le centre d'un „élément"[43] de la ligne au moins. Mais il peut très bien arriver qu'il y ait plusieurs éléments ayant leur centre au même point. Il peut même y en avoir une infinité[44]. Il peut même arriver

41) *Si l'on définit la distance de deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) par l'expression

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la définition de *G. Cantor* devient, elle aussi, susceptible d'être introduite en Analyse. Elle n'est donc pas, à ce point de vue, en état d'infériorité sur celles que nous allons examiner.*

42) Voir *A. Brill* et *M. Noether,* Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/3), éd. Berlin 1894, p. 379 et suiv.

43) *Un élément de la ligne plane [ou gauche] est un ensemble de deux [trois] séries entières en $t - t_0$, à rayons de convergence non nuls; le point t_0 est le centre de l'élément. On n'écarte pas le cas de deux [trois] séries renfermant des puissances négatives de t: le point $t = 0$ est alors le centre de l'élément.*

44) *Exemple*: Supposons le nombre α réel et irrationnel et considérons les équations

$$x = \cos(\alpha t + t) - \cos t,$$
$$y = \sin(\alpha t + t) - \sin t,$$

t étant une variable complexe.

Ces équations représentent une ligne analytique qui passe une infinité de fois par l'origine; à savoir pour

$$t = 0, \quad \pm\frac{2\pi}{\alpha}, \quad \pm\frac{4\pi}{\alpha}, \quad \ldots;$$

la dérivée $\frac{dy}{dx}$ prend à chaque fois des valeurs différentes; il existe une infinité d'éléments de la ligne, tous différents, ayant pour centre le point (0,0).

que le point P soit également point-limite[45]), ou encore que tous les points de la ligne voisins du point P ne puissent être obtenus au moyen d'éléments de centre P[46]).

L'ensemble des points d'une ligne analytique dont les coordonnées sont voisines d'un système de valeurs données peut donc présenter des circonstances très diverses. Afin de concevoir plus facilement ces différents cas, et en même temps d'étudier plus commodément la façon dont se comporte la courbe à l'infini, ou considère souvent une ligne analytique comme formée par la réunion de plusieurs *arcs*[47]), c'est-à-dire de portions d'un seul tenant dont on trouvera les extrémités par la règle suivante: quand un point P_0 est en même temps centre de plusieurs

45) Supposons la variable complexe x d'abord inférieure à 1 en valeur absolue et posons

$$y = \frac{1}{\log_e(1 + \sqrt{1 - x^2})} - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2 \log_e 2}.$$

Prenons pour $x = 0$ la détermination $+1$ de la racine carrée et la valeur réelle du logarithme ($\log_e 2$ désigne aussi le logarithme népérien réel de 2). Alors la fonction y est analytique et prend pour $x = 0$ la valeur $\frac{1}{2 \log_e 2}$. Faisons décrire à la variable x un chemin tournant une fois autour d'un des points $x = \pm 1$ et revenant au point $x = 0$; la racine carrée revient avec la valeur -1; y a donc la même valeur limite $\frac{1}{2 \log_e 2}$. Mais le point $x = 0$, $y = \frac{1}{2 \log_e 2}$ forme maintenant un point limite de la forme analytique définie par l'élément de fonction du début.

46) *Deuxième exemple* [Voir *F. Klein,* Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie[26]), (nouv. éd.) p. 239; et *A. Schoenflies*, Math. Ann. 58 (1904), p. 216]: Un point quelconque d'une épicycloïde est centre d'un seul élément de la courbe ou de deux au plus. Cependant quand le rapport des rayons du cercle fixe et du cercle générateur est irrationnel et que par conséquent les différents arcs de la courbe forment un ensemble dense dans une couronne circulaire, il existe dans le voisinage de tout point de la courbe une infinité de points qui ne dérivent nullement du ou des éléments ayant leur centre au point donné.

47) Quand on se borne à la considération d'une ligne réelle analytique, le même mot est employé avec une acception un peu différente; il sert à désigner une partie de la ligne qu'on peut engendrer par le mouvement continu d'un point et cela de façon qu'aucune portion n'en soit plusieurs fois décrite [voir Encyclopaedia Brittanica (9e éd.) 6, Edimbourg 1878, p. 716 (article „curve")]. Si l'on adopte ce sens, un arc peut se couper lui-même. Cela ne se produit pas avec la définition du texte. On désigne aussi souvent par le même nom une portion d'une courbe analytique réelle *plane* le long de laquelle une des coordonnées est fonction univoque de l'autre.

éléments, les points voisins du point P_0 qui appartiennent au même élément sont dits appartenir au même arc, tandis qu'au contraire les points qui n'appartiennent pas au même élément n'appartiennent pas au même arc. Du reste, les limites précises d'un arc seront en général laissées indéterminées.

6. Points isolés (Einsiedler). Considérons une ligne analytique réelle, et les points imaginaires qui lui appartiennent. Il peut arriver qu'un point réel P_0 forme le centre d'un élément de la ligne qui ne contienne aucun autre point réel que le point P_0 lui-même au voisinage du point P_0[48]). Ce point P_0 s'appelle un point isolé[49]). Cela ne signifie pas toujours que le point soit complètement isolé, c'est-à-dire entièrement dépourvu de points réels voisins; en outre de l'élément tout imaginaire dont il est le centre, il peut être aussi centre d'éléments réels en nombre quelconque donnant naissance à des arcs réels qui se croisent au point donné[50]).

7. Représentation par des équations. Soit un arc d'une courbe analytique. Prenons sur cet arc un point P_0 de coordonnées (x_0, y_0) ou (x_0, y_0, z_0) suivant qu'il s'agit d'une courbe plane ou gauche. Soit t un paramètre qui prend des valeurs arbitraires de module suffisamment petit. D'après la définition générale de la ligne analytique et d'après la conception d'un „arc" de cette ligne, on pourra (et même de plusieurs manières) trouver deux équations quand la courbe est plane (trois équations quand la courbe est gauche) de la forme

$$(1)\qquad \begin{aligned} x - x_0 &= P_1(t), \\ y - y_0 &= P_2(t), \end{aligned}$$

dans le cas des courbes planes,

$$(1')\qquad \begin{aligned} x - x_0 &= P_1(t), \\ y - y_0 &= P_2(t), \\ z - z_0 &= P_3(t), \end{aligned}$$

48) Soient par exemple deux nombres a, b assujettis à la condition $a < b$; la ligne
$$y^2 - (x-a)^2(x-b) = 0$$
possède un point isolé $x = a$, $y = 0$.

49) On trouve déjà un exemple de ce fait dans *G. Cramer*, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750, p. 449. Voir également *J. Plücker*, Analyt.-geometrische Entwickelungen 2, Essen 1831, p. 267, 292; System der analyt. Geometrie, Berlin 1835, p. 196; *G. Salmon*, A treatise on higher plane curves, (2ᵉ éd.) Dublin 1873, p. 22; trad. française par *O. Chemin*, Traité de géométrie analytique (courbes planes), Paris 1884, p. 35; 2ᵉ tirage, Paris 1903, p. 35.

50) *J. Plücker*, Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, p. 172.

dans le cas des courbes gauches; $P_1(t)$, $P_2(t)$ dans le cas des courbes planes, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ dans le cas des courbes gauches, désignent des séries entières en (t) convergentes chacune dans un voisinage suffisamment petit de l'origine, s'annulant pour $t = 0$ et telles que

1°) toute valeur de t fournit un point de l'arc considéré,

2°) tout point de cet arc suffisamment voisin du point P_0 peut-être obtenu pour une et une seule valeur de t appartenant au domaine choisi[51]).

C'est là une représentation paramétrique d'un élément de ligne analytique. Lorsqu'il s'agit d'un élément d'un arc réel on peut se borner à envisager des valeurs réelles du paramètre t et des coefficients des séries $P_i(t)$.

Il existe pour un même arc une infinité de telles représentations. Considérons-en deux. Soient t et τ les deux paramètres. Le paramètre t sera une fonction du paramètre τ, analytique pour $\tau = 0$. Cette fonction doit s'annuler pour $\tau = 0$. Inversement, choisissons au hasard une fonction $t(\tau)$ analytique et nulle pour $t = 0$; pourvu que sa dérivée $\frac{dt}{d\tau}$ ne s'annule pas pour $\tau = 0$, elle donne également une représentation analytique du même arc de courbe au moyen du nouveau paramètre τ.

Supposons au contraire qu'après avoir réalisé une représentation analytique au moyen du paramètre t, on substitue à la place de t une fonction $t = \varphi(\tau)$, analytique et nulle pour $\tau = 0$, mais n'ayant plus sa dérivée différente de zéro pour la même valeur de τ; on obtient une représentation de l'élément considéré mais de telle nature que tous les points de l'élément (sauf le point central) suffisamment voisins de lui sont atteints plusieurs fois, c'est-à-dire correspondent à plusieurs valeurs du paramètre[52]). Réciproquement deux fonctions de la forme (1) quand la courbe est plane, trois fonctions de la forme (1) quand elle est gauche, donnent (en les supposant non identiquement nulles) une représentation soit propre, soit impropre, d'un élément d'une ligne analytique.

On peut se proposer de représenter analytiquement *toute* une ligne analytique et non seulement un élément. Cf. II 9 et II 30.

51) Dans le cas où le point P_0 serait à l'infini, tout ce qui précède subsiste en convenant dans le cas des courbes planes de remplacer les expressions $x - \infty$, $y - \infty$ respectivement par $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et, dans le cas des courbes gauches, les expressions $x - \infty$, $y - \infty$, $z - \infty$ respectivement par $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$.

52) *L. Raffy*, Leçons sur les applications géométriques de l'analyse, Paris 1897, p. 3, 4, 6; il appelle ces représentations des représentations impropres.

Une autre représentation analytique très usitée (dans le cas de deux dimensions) consiste à trouver une fonction $f(x, y)$ qui soit identiquement nulle quand on y remplace x, y par les coordonnées d'un point de la ligne. On peut énoncer à ce sujet le résultat suivant. Considérons un élément quelconque d'une ligne *analytique plane,* il est possible et de plusieurs manières de trouver une fonction $f(x, y)$ analytique dans un domaine suffisamment petit entourant le centre x_0, y_0 de l'élément, qui soit nulle pour tous les points appartenant à l'élément et pour ces points seulement.

Inversement, considérons une fonction $f(x, y)$ de deux variables, analytique au voisinage d'un point x_0, y_0 pour lequel elle s'annule, et qui de plus ne soit pas identiquement nulle. L'ensemble des points (x, y), voisins de (x_0, y_0), qui font prendre à $f(x, y)$ la valeur zéro, forme, soit un *élément* de ligne analytique, soit un nombre *fini* de tels éléments constituant différents arcs qui appartiennent soit à une *même* ligne analytique, soit encore à plusieurs lignes analytiques.

On peut, dans un grand nombre de cas, aller plus loin: supposons donnée une ligne analytique; on pourra souvent déterminer une fonction analytique uniforme $f(x, y)$ telle qu'il y ait identité entre les points de la ligne et l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y) = 0$. Dans ce cas on obtient une représentation complète de la ligne.

On ne peut pas sans restrictions énoncer la réciproque de cette propriété. Soit en effet une fonction analytique uniforme de deux variables $f(x, y)$. L'équation

$$f(x, y) = 0$$

représente bien *en général* une ligne analytique; mais il faut prévoir les cas d'exception suivants:

1°) l'équation peut ne représenter aucune ligne: c'est ce qui arrive si elle n'a aucune solution;

2°) elle peut également représenter *plusieurs* lignes différentes;

3°) enfin elle peut ne représenter qu'une *portion* d'une ligne analytique[53]).

53) Considérons par exemple l'équation $e^{g(x, y)} = 0$, où $g(x, y)$ désigne une fonction entière; elle n'a aucune solution.

Le deuxième cas se présente pour une équation algébrique non irréductible qui représente un nombre fini de lignes différentes. *Pour les lignes algébriques, la notion d'irréductibilité permet d'ailleurs de donner un énoncé satisfaisant de la réciproque cherchée. Mais cette notion est bien moins simple quand il s'agit de fonctions non algébriques.* De telles fonctions peuvent représenter une infinité de lignes. *Exemple:*

$$\sin [g(x, y)] = 0,$$

On peut présenter dans le cas de trois dimensions des considérations analogues. Soit un élément de ligne analytique de centre x_0, y_0, z_0. On pourra de plusieurs manières le représenter par deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

$f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ désignant des fonctions analytiques au voisinage du point x_0, y_0, z_0.

Si on donne inversement deux fonctions $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ analytiques au voisinage d'un point P_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0), s'annulant en ce point (sans être identiquement nulles), et si l'on suppose que l'un des déterminants du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{matrix} \right\|$$

ne s'annule pas au point P_0, l'ensemble des solutions des équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0,$$

situées dans un entourage suffisamment petit du point P_0, constitue un arc de ligne analytique.

Supposons au contraire que les trois déterminants du tableau soient nuls au point P_0; il y a deux cas à distinguer suivant que les fonctions f et g ont ou non un diviseur commun analytique au point P_0 et s'y annulant. Si on ne suppose pas l'existence d'un tel diviseur, l'ensemble des solutions du système

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

se compose d'un nombre fini d'arcs de ligne pouvant appartenir soit à la même ligne analytique, soit à des lignes analytiques différentes. Si au contraire les fonctions $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ ont un diviseur commun jouissant des propriétés indiquées, le même ensemble de solutions comprend à la fois un ou plusieurs arcs et une *portion de surface.*

où $g(x, y)$ désigne une fonction entière, représente les lignes

$$g(x, y) = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Voici un exemple du troisième cas. Considérons une fonction analytique d'une variable complexe $\varphi(x)$ qui admette une coupure fermée, par exemple le cercle de rayon un ayant pour centre l'origine. L'équation

$$\varphi(y) = \varphi(x)$$

représente un ensemble comprenant la portion de la droite

$$x = y$$

qui satisfait à la restriction $|x| < 1$; mais elle ne représente pas la droite entière.

Il peut arriver que la ligne ou les lignes n'existent pas, tandis que la portion de surface existe toujours[54]).

On peut ensuite, en ne se bornant plus au voisinage du point donné, se proposer une représentation générale. Soit une ligne l dans un domaine à trois dimensions; il est bien souvent possible de déterminer deux fonctions analytiques univoques $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ telles qu'il y ait concordance complète entre l'ensemble des points de la ligne d'une part, et l'ensemble des solutions des équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

d'autre part. On aura ainsi réalisé une représentation analytique totale de la ligne.

Ici encore, on ne peut, sans étudier davantage la question, énoncer une réciproque.

Les exceptions prévues dans le cas du plan peuvent encore se présenter.

Bien plus, même dans le cas où les deux fonctions

$$f(x, y, z), \quad g(x, y, z)$$

sont deux fonctions entières irréductibles distinctes, il peut très bien arriver que l'intersection des surfaces[55])

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

se décompose en plusieurs lignes analytiques distinctes[56]).

On a proposé et étudié des notions plus générales que celle de ligne analytique. Ces généralisations peuvent s'obtenir dans un certain nombre de directions différentes.

On peut d'abord définir une ligne analytique dans un espace à n dimensions, comme une variété de première espèce dans un domaine à n variables.

---

54) C'est dans les travaux de *K. Weierstrass* que se trouvent les démonstrations de tous ces résultats. [Voir *K. Weierstrass*, Funktionenlehre [12]), p. 105; Werke 2, p. 135]. Voir aussi II 1, 3.

La question plus générale de la constitution d'un ensemble de points, appartenant à un domaine donné à un nombre quelconque de dimensions, qui annulent un nombre fini quelconque de fonctions analytiques données dans ce domaine a été étudiée par *O. Blumenthal*, Math. Ann. 57 (1903), p. 356.

55) *Il n'y a qu'à citer l'intersection d'une quadrique par un plan tangent, ou de deux quadriques bitangentes.*

56) Tout ce qui est relatif à l'étude des propriétés générales des lignes et des surfaces analytiques (notions de tangente, de longueur d'arc, de plan osculateur, de courbure, . . .) sera exposé dans les articles consacrés à la géométrie infinitésimale [III volumes 5 et 6].

On peut également considérer des lignes formées par la réunion d'un nombre fini ou même infini dénombrable de lignes analytiques, ou de portions de lignes analytiques associées d'une façon quelconque, par exemple de façon à constituer la frontière d'une portion de surface[57]).

D'autres généralisations encore ont été introduites dans le cas spécial de variables réelles. Dans un grand nombre de recherches[58]), on prend le mot ligne comme abréviation de „image géométrique d'une fonction réelle d'une variable réelle dans un système de coordonnées (rectangulaires) planes“.

On peut, soit sur la fonction, soit sur l'argument, faire des hypothèses plus ou moins restrictives: existence ou non existence de la dérivée, ou des dérivées d'un certain ordre, etc.[59]).

8. La notion de ligne d'après Jordan. *La plus importante de ces généralisations est celle qui a été étudiée d'abord et surtout par *C. Jordan*[60]).*

Cette généralisation consiste à se donner trois fonctions *continues* d'une variable réelle t,

$$f(t), \; g(t), \; h(t),$$

la variable t étant supposée décrire un intervalle (les fonctions f, g, h ne doivent pas être constantes toutes les trois). Le point qui, dans un système de coordonnées rectangulaires, a pour coordonnées

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

est dit *décrire* la ligne. Cette définition correspond à la conception vague de la ligne comme „trajectoire d'un point“. Nous pouvons supposer que le paramètre t varie de 0 à 1. Les fonctions f, g, h sont supposées exister pour les valeurs $t = 0$, $t = 1$ et pour ces valeurs elles admettent la continuité d'un côté (à droite pour $t = 0$, à gauche pour $t = 1$).

*Avec cette restriction, une ligne au sens de *C. Jordan* est un ensemble fermé, parfait, d'un seul tenant. La définition actuelle nous rapproche donc de celle de *G. Cantor*.*

On peut encore exprimer cette conception de la façon suivante:

---

57) *L. Euler* avait déjà considéré de telles lignes qu'il appelait „curvae discontinuae seu mixtae et irregulares“ [*L. Euler*, Introd.[11]) 2, p. 6; trad. *J. B. Labey* 2, p. 4].

58) Voir par exemple *P. du Bois-Reymond*, Math. Ann. 15 (1879), p. 283; *O. Stolz*, Math. Ann. 18 (1881), p. 268; *L. Scheeffer*, Acta math. 5 (1884/5), p. 49.

59) Voir *L. Scheeffer*, Acta math. 5 (1884/5), p. 51/2 en note.

60) Cours d'Analyse (2ᵉ éd.) 1, Paris 1893, p. 90, (3ᵉ éd.) 1, Paris 1909, p. 90.

Un ensemble fermé sera dit former un arc continu de courbe s'il est l'image continue d'un segment de droite[61]).

Si le point $t = 1$ coïncide avec le point $t = 0$, la courbe est dite fermée. Si les fonctions f, g, h sont périodiques et de même période, on se bornera à considérer les valeurs de t dans un intervalle égal à une période; cela donne évidemment tous les points de la courbe. On appellera point multiple de la courbe tout point qui correspond à des valeurs différentes du paramètre t[62]).

On peut tout d'abord se demander jusqu'à quel point il y a identité entre la notion de ligne de Jordan et notre notion vulgaire de ligne [voir n^{os} **1** à **3**]. La définition de *C. Jordan* est trop large en ce sens qu'elle s'applique à des lignes qui épuisent tous les points d'une aire[63]).

On peut écarter cette difficulté en considérant une ligne dépourvue de points multiples[64]).

*Nous appellerons donc *arc de courbe simple* un ensemble de points borné [II 2, **3**] qui est l'image continue uniforme et *réciproque* d'un segment de droite (avec cette légère restriction que, sur la courbe, il peut exister un point double de la nature suivante: ce point correspond à la fois à la *première* et à la *dernière* valeur du paramètre).*

**A. Schoenflies*[65]) emploie le langage suivant: si l'on envisage le groupe des transformations continues et uniformes d'une part, et le groupe des transformations continues uniformes et *réciproques* d'autre part, le nombre des dimensions de l'espace est un invariant du second groupe et pas du premier[66]).*

La propriété la plus importante d'une courbe de Jordan plane et sans points multiples est la suivante connue sous le nom de *théorème de Jordan*: elle divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre

61) *A. Hurwitz*, Verh. des ersten intern. Math.-Kongr. Zürich 1897, publ. par *F. Rudio*, Leipzig 1898, p. 102.

62) *C. Jordan*, Cours d'Analyse, (2e éd.) 1, Paris 1893, p. 90; (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 90.

63) Voir II 2, **16**. On trouvera les premiers exemples de cette particularité dans *G. Peano*, Math. Ann. 36 (1890), p. 157; *D. Hilbert*, Math. Ann. 38 (1891), p. 459; consulter également *A. Schoenflies*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 8² (1899), éd. Leipzig 1900, p. 121; *E. H. Moore*, Trans. Amer. math. Soc. 1 (1900), p. 72; *F. Klein*, Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie[26]), (nouv. éd.) p. 238 et suiv.

64) Voir *C. Jordan*, Cours d'Analyse, (2e éd.) 1, Paris 1893, p. 91; (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 91; *E. Study*, Math. Ann. 47 (1896), p. 314.

65) Jahresb. deutsch. Math.-Ver., Ergänzungsband 2 (1908), p. 149.

66) Voir II 2, **16** et **17**.

intérieure, telles qu'on ne peut aller de l'une à l'autre sans traverser la courbe[67]).

La définition de *C. Jordan* est manifestement plus large que la définition des lignes analytiques. Il faut donc s'attendre à ce qu'on puisse former des exemples présentant avec les lignes analytiques des différences essentielles. Les exemples les plus singuliers sont relatifs aux courbes n'ayant de tangente en aucun point, aux courbes pour lesquelles la notion de longueur d'arc n'a aucun sens[68]), aux courbes enfin qui, situées tout entières à distance finie, limitent un continuum pour lequel l'„aire" n'existe pas[69]).

Avant même que la définition générale qui fait l'objet de ce paragraphe ait été proposée par *C. Jordan*, des exemples de courbes non analytiques à propriétés singulières s'étaient déjà présentés, notamment dans la théorie des fonctions automorphes[70]). La caractéristique de ces exemples, comme de celui de *W. F. Osgood* qu'on vient de citer[69]), est de pouvoir recevoir une forme purement géométrique et non pas arithmétique. Voici par exemple comment *R. Fricke* et *F. Klein* ont pu construire une telle ligne qui sépare l'un de l'autre deux domaines[71]).

Prenons (fig. 1) quatre cercles k_1, k_2, k_3, k_4, de façon:

1°) qu'ils soient deux à deux extérieurs ou tangents extérieurement,

2°) que chacun d'eux soit tangent à deux autres et à deux seulement,

3°) qu'il n'existe aucun cercle les coupant orthogonalement tous les quatre.

La région formée des points extérieurs aux quatre cercles consiste en deux quadrilatères P, P' (à côtés curvilignes) dont l'un P' est infini.

67) Voir *C. Jordan*, Cours d'Analyse, (2e éd.) 1, Paris 1893, p. 91; (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 91. Pour l'historique du théorème de Jordan, se reporter à II 2, **13**. Voir également III **2**, **3** ce que devient le théorème de Jordan quand on adopte la définition de *G. Cantor*.

68) **H. von Koch* [Archiv math. astron. och fys. (Stockholm) 1 (1904/5), p. 681/702; Acta math. 30 (1906), p. 145/74] a donné un exemple de courbe dont l'arc compris entre deux points a une longueur infinie quels que soient ces deux points (Note de *G. Loria*).*

69) *Voir II 1, **19**; II 3 *Voss*; II 8, n° **19** et *W. F. Osgood*, Trans. Amer. math. Soc. 4 (1903), p. 107; *H. Lebesgue*, Bull. Soc. math. France 31 (1903), p. 197; *C. Jordan*, Traité d'analyse (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 90.*

70) *F. Klein* en a communiqué un exemple par lettre à *H. Poincaré*; voir C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 1486. Voir aussi *H. Poincaré*, Acta math. 3 (1883/4), p. 78/80; *R. Fricke* et *F. Klein*, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen 1, Leipzig 1897, p. 131/4.

71) *R. Fricke*, Math. Ann. 44 (1894), p. 580/7; *R. Fricke* et *F. Klein*, Automorphe Funktionen[70]) 1, p. 411/28. Voir II 12.

Considérons le continuum formé:

1°) des points de P (sauf les quatre *sommets*),

2°) des points appartenant à l'un quelconque des quatre domaines obtenus en transformant le domaine P par inversion, successivement par rapport aux quatre cercles,

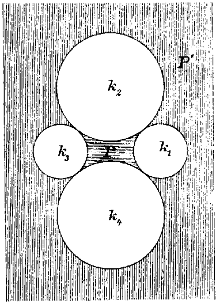


Fig. 1.

3°) des points de tous les domaines obtenus en faisant sur le domaine ainsi agrandi la même opération, successivement par rapport à tous ses côtés et ainsi de suite.

Construisons également un second continuum de la même manière en partant de P'. Les deux continua obtenus admettent pour frontière commune une ligne non analytique. On peut démontrer que cette ligne limite est l'image réciproquement continue, uniforme d'un segment de droite[72]).

*Nous avons étudié plus haut les relations de la définition précédente avec la définition de *G. Cantor.* Nous les résumerons ici en introduisant la terminologie de *A. Schoenflies.* Un ensemble parfait borné d'un seul tenant qui forme la frontière commune de deux continua s'appelle *une courbe fermée proprement dite* (eine (eigentliche) geschlossene Kurve); si tous ses points sont accessibles des deux côtés, il s'appelle *courbe simple fermée* (*einfache* geschlossene Kurve). Les travaux de *A. Schoenflies* et *L. Zoretti* apparaissent comme une étude de la réciproque du théorème de Jordan, ou comme la recherche de l'équivalence de la notion de ligne simple (sans point double) de Jordan et de ligne cantorienne. Tous deux aboutissent à une condition nécessaire et suffisante.*

Ajoutons encore qu'on peut découvrir à ces travaux le but de définir l'équivalent le plus général de la droite ou du cercle au point de vue de l'Analysis situs.

9. Autres généralisations. *Nous avons déjà dit qu'entre la notion de ligne analytique et celle de ligne de Jordan, il y avait place pour d'autres notions d'après le nombre plus ou moins grand des restrictions que l'on fait.*

72) *R. Fricke* et *F. Klein,* Automorphe Funktionen[70]) 1, p. 420; *F. Klein,* Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie[26]), nouv. éd. p. 316.

Une ligne analytique suppose l'existence d'une infinité de dérivées des coordonnées; la ligne de Jordan ne suppose rien sur l'existence de ces dérivées. On pourra donc introduire des hypothèses de diverses natures comme les suivantes:

a) supposer la courbe *rectifiable*[73]);

b) supposer l'existence d'une tangente en chaque point;

c) supposer que cette tangente se déplace d'une façon continue en même temps que son point de contact;

d) supposer que la ligne a une courbure;

e) on pourra supposer aussi que la courbe est soumise à d'autres conditions, par exemple qu'elle n'a qu'un nombre fini de points singuliers (points saillants ou anguleux, etc. . . .);

f) on pourra supposer que la courbe rencontre en un nombre *fini* (qui, la droite variant, peut être borné ou non borné) ou en une infinité dénombrable de points une droite ou un cercle quelconques;

g) ou faire d'autres hypothèses encore.

Mais il convient de remarquer que, si variées que soient ces hypothèses, aucune d'elles ne s'impose à nous d'une façon tellement indispensable qu'elle puisse être seule acceptée par chacun[74]).

Aussi ne doit-on pas s'étonner de la diversité des terminologies. Ainsi par exemple *W. F. Osgood*[75]) appelle *arc de courbe régulier* un arc pourvu d'une tangente en chaque point variant d'une manière continue, pendant qu'au contraire *F. Klein*[76]) exige l'hypothèse que l'arc de courbe soit représentable par deux équations $x = f(t)$, $y = g(t)$, où les fonctions f et g soient d'oscillation bornée et dérivables un nombre fini de fois. *A. Kneser*[77]) envisage la question de la façon suivante: il désigne sous le nom de *arc plan sans singularités* („nirgends singulärer ebener Bogen") un ensemble de points continu au

73) *Voir *C. Jordan,* Cours d'Analyse (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 99; *H. Lebesgue,* Ann. mat. pura appl. (3) 7 (1902), p. 282.*

74) C'est ce qu'exprime *E. Study* [Math. Ann. 47 (1896), p. 315] quand il dit que nous ne possédons actuellement aucune définition complètement acceptable de la notion de courbe. Il fait remarquer la différence des points de vue en géométrie analytique, où on s'occupe tout aussi bien des points ou courbes imaginaires que des points ou courbes réels, et dans l'étude des chemins d'intégration sur une surface de Riemann, ou des problèmes d'intégration avec des valeurs données sur une courbe. Malgré les progrès réalisés, cette observation conserve toute sa valeur à l'époque actuelle.

75) Trans. Amer. math. Soc. 1 (1900), p. 310. Voir l'article II 8.

76) Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie[26]), nouv. éd. p. 255.

77) Math. Ann. 34 (1889), p. 205.

sens projectif du mot, sans points ni tangentes multiples, pourvu d'une tangente unique en chaque point et variant d'une façon continue, et auquel s'appliquent les théorèmes de *K. G. Chr. von Staudt* que voici:

I. Si le point T décrit l'arc dans un sens déterminé et si t désigne la tangente correspondante, le point d'intersection de cette tangente avec une droite fixe se déplace sur cette droite fixe dans une direction qui ne doit se modifier que lorsque T vient coïncider avec un des points communs à la droite fixe et à la courbe pour lesquels la droite fixe n'est pas tangente à la courbe.

II. La droite obtenue en joignant le point T à un point fixe F tourne autour de ce point fixe dans un sens qui ne doit changer que lorsque F est situé sur la tangente t à la courbe sans que F et T coïncident.

Il définit de même les propriétés fondamentales d'un arc de courbe gauche sans singularité, au moyen d'une série de *quatre* théorèmes analogues. Il recherche également les propositions générales que l'on peut établir, sur ces définitions, relativement aux formes des arcs sans singularités[78]).

10. La notion physique de ligne. *Nous avons successivement étudié la notion de ligne au point de vue de la géométrie pure, c'est-à-dire en la rattachant aux postulats [III 1, **19**], puis au point de vue analytique c'est-à-dire en la rattachant uniquement à la notion de nombre. Nous allons maintenant envisager la même notion au point de vue de la géométrie appliquée ou expérimentale. Nous serons ainsi revenus à notre point de départ, car il est évident que c'est ce point de vue expérimental qui a servi à former successivement dans notre esprit cette notion de ligne sous ses différents aspects.*

Comment réalise-t-on *physiquement* un point? C'est évidemment en se donnant une portion de surface aussi petite que possible, par exemple la croisée de deux traits très fins tracés sur une plaque métallique, *ou encore la croisée de deux fils très fins dans le réticule d'une lunette*. Mais ce n'est que *par abstraction* que nous pouvons déduire de ces points très petits la notion géométrique de point. Il est donc impossible de *définir* physiquement la distance de deux tels points, encore moins de la mesurer; car on commet, outre l'erreur provenant de l'imperfection des mesures, l'erreur forcée provenant de l'indétermination des extrémités du segment à évaluer. On peut multiplier ces exemples et montrer l'impossibilité de définir

78) Voir *A. Kneser*, Math. Ann. 34 (1889), p. 205, 209; 41 (1893), p. 349.

exactement et d'évaluer les grandeurs pour lesquelles le problème théorique de la mesure est résolu. Le problème physique de la mesure est entaché d'une double source d'erreurs.

Quand une loi, exprimant un rapport entre des grandeurs pour lesquelles le problème de la mesure a un sens, se traduit en langage mathématique, elle fera connaître l'une des grandeurs „en fonction" de l'autre. D'après ce qui précède, une loi de ce genre ne pourra donc être ni établie par l'observation ou l'expérience, ni, ce qui revient à peu près au même, vérifiée expérimentalement. On devra se contenter d'expériences conduisant à des vérifications *approchées*, en sorte qu'une infinité d'autres lois mathématiques donneraient une vérification tout aussi bonne. C'est afin de tenir compte de ce fait que *F. Klein*[79]) a introduit la notion de *trait fonctionnel* (*Funktionsstreifen*).

Considérons une fonction $f(x)$ arbitraire, continue dans l'intervalle

$$a \leq x \leq b.$$

Donnons-nous une petite longueur constante ε. Considérons l'ensemble des points dont les coordonnées rectangulaires vérifient les conditions

$$a < x < b,$$
$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon.$$

Nous appellerons *trait fonctionnel* (*Funktionsstreifen*) un domaine analogue à l'ensemble de points qui vient ainsi d'être défini, avec cette différence que nous n'en considérons pas les bords comme déterminés d'une façon absolument précise.

Cette notion coïncide avec le sens du mot „ligne" dans la vie courante. Elle est susceptible d'être employée dans cette branche des mathématiques que *F. Klein*[80]), sous le nom de *mathématiques par approximations* (*Approximationsmathematik*), oppose aux *mathématiques rationnelles* ou *mathématiques de précision* (*Präzisionsmathematik*).

On peut se demander quelles sont les lignes qui peuvent être qualifiées d'observables. La question a été traitée par *A. Koepcke*[81]). *F. Klein*[82]) lui donne une réponse différente. Les *traits fonctionnels*

79) Sitzgsb. phys.-medic. Soc. Erlangen 6 (1873/4), p. 52/64; réimpr. Math. Ann. 22 (1883), p. 249/59.

80) Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie[26]), (nouv. éd.) p. 12; voir aussi *K. Heun*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 9² (1900), éd. Leipzig 1901, p. VI (à la fin de la table des matières).

81) Math. Ann. 29 (1887), p. 136/40; 34 (1889), p. 161; 35 (1890), p. 104; Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), p. 376/9 [1899].

*D'après *A. Koepcke*, les lignes définies comme limites d'une surface ne seraient pas observables. Les trajectoires d'un point le seraient au contraire* seuls peuvent, d'après lui, être l'objet de l'expérience et de l'observation, tandis que les lignes mathématiques qui font l'objet des mathématiques rationnelles, pas plus d'ailleurs les lignes analytiques que celles qui ne le sont pas, ne peuvent en aucune manière être observées.

D'après cela, on peut bien demander à l'observation et à l'expérimentation des renseignements sur les propriétés des *traits fonctionnels*, mais, par contre, elles ne peuvent nous en fournir aucun sur les lignes envisagées dans les mathématiques rationnelles. Il faudra donc examiner dans chaque question particulière dans quelle mesure ce que nos sens nous apprennent reste valable pour les lignes mathématiques abstraites. Le procédé habituel qui conduit à ces lignes par des abstractions successives peut faire disparaître des propriétés essentielles de la ligne physique, comme par exemple l'existence d'une tangente approchée ou celle d'une longueur d'arc. Ces considérations expliquent les contradictions qui ont paru si souvent s'élever entre les résultats de l'expérience et ceux des mathématiques de précision.

Nous rattacherons à ce qui précède les travaux de *K. Weierstrass*[83]) sur la représentation approchée d'une fonction. Soit donné dans un intervalle fini un trait fonctionnel. Il est toujours possible de trouver une fonction réelle analytique, et même une fonction *entière* $g(x)$, telle que la ligne

$$y = g(x)$$

se trouve, dans l'intervalle considéré, constamment située dans ce trait. On peut même déterminer cette ligne de façon qu'elle satisfasse à la condition supplémentaire qu'il y ait dans tout l'intervalle coïncidence (approchée) suffisante entre sa pente et sa courbure d'une part et celles du trait fonctionnel d'autre part[84]). D'après cela, et dans le but de satisfaire de la façon la plus simple possible aux conditions imposées par la nature, dans le but également de faire „économie de pensée", on a pu se borner jusqu'ici dans les applications des mathématiques à la considération des lignes analytiques. Mais on constatera que l'on n'a pas encore complètement éclairci la question du parti que l'on pourrait tirer de l'introduction de lignes non analytiques dans le domaine des mathématiques appliquées[85]).

82) *F. Klein,* Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie[26]), nouv. éd. p. 19, 39/41, 228.

83) Sitzgsb. Akad. Berlin 1885, p. 633/8, 789/805; Werke 3, Berlin 1903, p. 1/31.

84) *F. Klein,* Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie[26]), (nouv. éd.) p. 103/7.

85) Gutachten der philosophischen Fakultät der Georg August-Universität zu Göttingen, betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901, Nachr. Ges. Gött. 1901,

11. La notion de surface. Nous rencontrerons dans l'étude de la notion de surface la même indétermination que dans l'étude précédente. Au sens le plus étroit, c'est de surfaces analytiques qu'il s'agit; dans un sens plus étendu, on comprendra également sous le même nom des formes qui se déduisent des différentes conceptions que nous avons rencontrées pour la ligne moyennant une généralisation appropriée qui ne va pas toujours sans difficulté. Il est bon d'ajouter que les surfaces non analytiques ont joué jusqu'ici en mathématiques un rôle tout à fait effacé.

Si l'on admet les éléments imaginaires au même titre que les éléments réels, on désigne sous le nom de surface analytique une forme analytique monogène de deuxième espèce dans un domaine à trois dimensions.

Si l'on veut se borner à la considération de points réels, on devra ne considérer que des formes analytiques qui contiennent des points à coordonnées réelles dont deux coordonnées, indépendamment l'une de l'autre, peuvent prendre toutes les valeurs dans deux intervalles convenables; on appelle alors *surface analytique réelle* l'ensemble des points d'une telle configuration dont les trois coordonnées sont réelles.

a. On pourra se donner un élément de surface analytique[86]) par une équation exprimant une coordonnée, z par exemple, en fonction des deux autres coordonnées x, y, cette fonction étant analytique au voisinage du couple de valeurs x_0, y_0.

b. On peut aussi envisager un élément de surface analytique comme constitué par l'ensemble des points qui sont situés dans le voisinage d'un point déterminé P_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dont

Geschäftliche Mitteilungen, p. 40; *F. Klein,* Math. Ann. 55 (1902), p. 143; *W. F. Osgood,* Lehrbuch der Funktionentheorie 1, Leipzig 1907, p. 89/95; *E. Borel,* Ann. Ec Norm. (3) 12 (1895), p. 47/50; C. R. Acad. sc. Paris 121 (1895), p. 933; *J. Hadamard,* La série de Taylor et son prolongement analytique, Paris 1901, p. 95 (dans ce dernier ouvrage on trouve (p. 95) un exemple d'équation aux dérivées partielles à coefficients réels et analytiques qui admet une solution indéfiniment dérivable mais non analytique).

En mécanique, des essais d'introduction de fonctions non analytiques pour représenter les coordonnées d'un point en mouvement se heurtent à de grosses difficultés. [Voir *P. Appell* et *Janaud*, C. R. Acad. sc. Paris 93 (1881), p. 1005; *Janaud,* Archiv Math. Phys. (1) 67 (1882), p. 160]. *P. Appell* et *Janaud* se demandent à quoi conduit l'hypothèse de fonctions ayant une dérivée première continue et pas de dérivée seconde. Cela entraîne l'introduction de forces partout discontinues.

86) Voir II 1, 21. Les théorèmes suivants s'étendent sans difficultés aux éléments infinis en faisant la convention qui est expliquée dans la note 45.

les coordonnées (x, y, z) satisfont à une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

$F(x, y, z)$ désignant une fonction des trois variables x, y, z qui est analytique au voisinage du point P_0 et est assujettie à s'annuler en P_0; de plus la fonction F est supposée irréductible. Si les dérivées partielles du premier ordre de la fonction F ne s'annulent pas simultanément au point (x_0, y_0, z_0), l'élément de surface s'appelle *ordinaire* ou *régulier*; sinon il est dit singulier.

c. Il est également possible, et d'une infinité de manières, de représenter un élément ordinaire d'une surface analytique par trois équations

$$(1) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

où u, v désignent des paramètres qui peuvent prendre des valeurs quelconques au voisinage du point $(u = 0, v = 0)$; f, g, h désignent des fonctions analytiques telles que l'un au moins des déterminants du tableau

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

ne s'annule pas au point $(u = 0, v = 0)$.

Si le voisinage du point $(u = 0, v = 0)$ est choisi suffisamment étroit, la correspondance entre les points (u, v) de cet entourage d'une part et les points correspondants de la surface d'autre part est réciproquement univoque: c'est ce que l'on entend par représentation paramétrique *propre* d'un élément de surface[87]).

87) Pour la surface d'une sphère de centre a, b, c et de rayon r on doit signaler la représentation par les coordonnées polaires ou sphériques liées aux coordonnées cartésiennes par les formules

$$x = a + r \sin u \cos v,$$
$$y = b + r \sin u \sin v,$$
$$z = c + r \cos u.$$

Cette représentation est signalée par *J. L. Lagrange* [Nouv. Mém. Acad. Berlin 4 (1773), éd. 1775, p. 127; Œuvres 3, Paris 1869, p. 626] comme „une des transformations les plus utiles et les plus ordinaires". On peut représenter de même la surface d'un ellipsoïde de demi-axes a, b, c par les formules

$$x = a \cos u,$$
$$y = b \sin u \cos v,$$
$$z = c \sin u \sin v.$$

[*J. Ivory*, Philos. Trans. London 99 (1809), p. 350; *C. F. Gauss,* Commentat. Soc. Gott. recent. 2 (1811/3), éd. 1813, math. 1812, mém. n° 3, p. 17; Werke 5, Göttingue 1877, p. 16]. Ce n'est cependant que depuis *C. F. Gauss* qu'on s'est servi d'une façon courante de la représentation paramétrique [voir dans le tome III les articles de géométrie infinitésimale].

De même, comme l'a montré *C. W. M. Black*[88]), on peut représenter un élément singulier de surface analytique par un nombre fini de systèmes d'équations de la forme (1) dont chacun a la propriété que l'un au moins des déterminants du tableau (2) ne soit pas nul identiquement dans l'élément, tout en pouvant s'annuler au centre de l'élément.

Donnons-nous inversement trois équations de la forme (1) quelconques, mais telles que l'un au moins des déterminants du tableau (2) ne s'annule pas au point $(0, 0)$; ces équations représentent alors complètement un élément *ordinaire* de surface analytique. Si au contraire les trois déterminants sont nuls en ce point sans être identiquement nuls, différents cas sont possibles, en particulier les suivants:

1) Les équations représentent complètement un élément de surface, mais de telle sorte que à un point (x, y, z) de cet élément répondent en général plusieurs systèmes de valeurs (u, v) voisins de zéro: c'est ce qu'on entend par représentation paramétrique *impropre* [voir n° **6**].

2) Les équations représentent seulement une portion d'élément de surface analytique (c'est d'ailleurs un élément singulier).

Dans un grand nombre de cas, il est possible de représenter toute une surface comme l'ensemble de tous les points (x, y, z) qui font prendre la valeur zéro à une fonction $f(x, y, z)$ analytique et *uniforme* de ces variables. On réalise alors la représentation *complète* de la surface. Mais, comme c'était le cas pour la ligne [voir n° **6**] et pour les mêmes raisons, on ne peut énoncer de réciproque sans restrictions.

Pour mieux concevoir les rapports de forme, on imagine souvent une surface analytique comme décomposée en un certain nombre, fini ou non, de feuillets. Ce sont des portions d'un seul tenant dont les limites sont déterminées par la règle suivante: quand un point P_0 est en même temps le centre de plusieurs éléments de la surface, les points voisins de P_0 qui appartiennent au même élément seront dits appartenir à un même feuillet, tandis que des points appartenant à des éléments différents seront dits appartenir à des feuillets différents. A cela près, les limites d'un feuillet peuvent être laissées indéterminées.

Quand on considère des surfaces réelles qui se composent de plusieurs portions d'un seul tenant tout à fait séparées, ou encore n'ayant en commun que des points isolés, le même mot de feuillet

88) Thèse, Cambridge U. S. A. 1901; Proc. Amer. Acad. arts sc. 37 (1901/2), p. 281; voir aussi *E. Geck,* Diss. Tubingue 1900; Math.-naturw. Mitt. Württemb. (2) 6 (1904), p. 65.

sert souvent à désigner l'une de ces portions. La différence avec la notion précédente consiste en ce qu'une de ces portions peut se couper elle-même sans cesser de former un seul feuillet.

En étroite parenté avec la notion de surface se trouve la notion de membrane infiniment mince, susceptible de changer de forme de certaines manières. On peut faire d'ailleurs des hypothèses assez diverses sur la déformation d'une telle membrane. On peut par exemple avec *C. F. Gauss*[89]) supposer qu'elle ne soit ni extensible ni pliable et envisager, en s'en reportant au témoignage des sens par exemple, les changements de forme dès lors possibles ainsi que les propriétés qui se conservent dans ce changement; on peut supposer aussi que la surface soit susceptible d'extensions de différentes sortes, par exemple de celles qui conservent les angles de la forme primitive, ou de celles pour lesquelles un faisceau donné d'avance de lignes géodésiques reste constamment formé de lignes géodésiques. On peut également admettre des duplicatures[90]).

12. Recherches contemporaines sur la notion de surface. *On voit d'après ce qui précède que le point de vue analytique de *K. Weierstrass* pour la définition d'une courbe est susceptible de généralisation dans le cas de trois dimensions pour la définition d'une surface. On s'est assez peu préoccupé jusqu'ici de points de vue analogues à ceux de *C. Jordan* et de *G. Cantor.* Je me bornerai à indiquer ici les quelques endroits où il est fait allusion à ce sujet.*

*Dans son Cours d'analyse, *C. Jordan*[91]), qui parle très longuement de la notion de ligne, se borne pour les surfaces à donner la définition suivante:

Soient (u, v) un point du plan, (x, y, z) un point de l'espace et supposons qu'on ait

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v),$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *ayant des dérivées du premier ordre* continues, telles que les trois jacobiens du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

89) Commentat. Soc. Gott. recent. 6 (1823/7), éd. Göttingue 1828, math. p. 121, mém. n° 4 (§ 13) [1827]; Werke 4, Göttingue 1880, p. 237.

90) On pourra consulter au sujet des ces questions *S. Finsterwalder*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 6^2 (1897), éd. Leipzig 1899, p. 45.

91) Cours d'Analyse, (2e éd.) 1, Paris 1893, p. 146; (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 147.

ne soient pas nuls, et enfin telles qu'à deux points (u, v) différents correspondent deux points (x, y, z) différents, tout cela quand (u, v) décrit un domaine E; le point x, y, z sera dit décrire une surface.*

On voit combien, dans cette définition les hypothèses sont plus restrictives que dans celle de la ligne de Jordan.

**H. Lebesgue*[92]), qui s'occupe de la notion de surface à propos du problème des aires, est très bref au sujet de la définition à donner à ce mot.*

H. Minkowski*[93]) introduit les définitions suivantes. Il appelle *corps convexe* un ensemble fermé dans l'espace à trois dimensions qui a en commun avec une droite, soit tout un segment, soit un point, soit aucun point et qui, enfin, ne se réduit pas à un plan. Il appelle *surface convexe* la frontière totale (au sens cantorien) d'un corps convexe, surface *fermée* un ensemble de points divisant l'espace en deux ensembles séparés dont la surface donnée forme toute la limite commune. Ces définitions lui permettent d'obtenir une définition assez générale de l'aire, et des propriétés de cette aire [voir encore à ce sujet II 2, **18, **19**, **20**].*

**L. D. Ames*[94]) a aussi envisagé une question analogue dans le but d'étendre à l'espace la démonstration du théorème de Jordan. Il introduit pour cela la notion d'angle solide. Ses hypothèses sont tout aussi restrictives que celles de *C. Jordan* (existence de dérivées continues nécessaire).*

*On doit enfin rattacher au point de vue qui nous occupe les recherches sur les correspondances entre les continuums à m et p dimensions [voir II 2, nos **16**, **17**].*

C'est le point de vue cantorien qui a été étudié le dernier et tout à fait récemment. Des difficultés se présentent dans l'espace à trois dimensions, un peu analogues à celles que l'on rencontre quand on passe de l'étude des ensembles à une dimension à l'étude des ensembles plans. Tandis qu'un grand nombre de propriétés générales des ensembles s'étendent immédiatement aux ensembles dans l'espace à n dimensions, certaines propriétés au contraire sont plus délicates à généraliser. D'une façon générale ce sont celles qui se rapportent à l'étude des variétés particulières à l'espace considéré.

*Ainsi la distinction dans l'espace E_2 (à deux dimensions) entre le continuum ligne et le continuum surface n'a pas d'équivalent dans

92) Ann. mat. pura appl. (3) 7 (1902), p. 68.

93) Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 9^1 (1900), éd. Leipzig 1901, p. 115/21.

94) Amer. J. math. 27 (1905), p. 343.

l'espace à une dimension E_1 où tout continuum est un segment. C'est pour cela que l'étude de la ligne dans le plan, et naturellement aussi de la surface dans l'espace ordinaire, donnent lieu à des difficultés.*

L. Zoretti*[95]) a proposé une définition cantorienne de la surface en démontrant d'abord le théorème suivant: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble continu au sens de G. Cantor*[12]), *de l'espace à deux dimensions E_2, soit une ligne, est qu'étant donné un point quelconque a de l'ensemble, on puisse trouver une droite au moins passant par a n'ayant pas en commun avec l'ensemble un ensemble continu contenant a.

Ce théorème permet alors de remplacer la définition de la ligne cantorienne par une définition équivalente et susceptible d'extension à l'espace E_3.

*On appellera *ligne* dans l'espace E_3 un ensemble continu tel que, étant donné un point quelconque a de l'ensemble, il existe au moins un plan passant par a qui n'a pas avec l'ensemble un continu linéaire en commun. Dans le cas contraire l'ensemble sera une surface ou un volume suivant qu'il contient ou non des points intérieurs.*

95) C. R. Acad. sc. Paris 150 (1910), p. 1505.

III 3. EXPOSÉ PARALLÈLE DU DÉVELOPPEMENT DE LA GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE ET DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PENDANT LE 19IÈME SIÈCLE.

Exposé, d'après l'article allemand de **G. FANO** (Turin),
par **S. CARRUS** (Alger).

Remarques générales. Délimitation du sujet: Développement de la géométrie au 19ième siècle à partir de Monge.

1. Caractères distinctifs des deux géométries. On distingue généralement deux sortes de géométries: la *géométrie synthétique,* qui considère les figures en elles-mêmes, et la *géométrie analytique*, qui établit ses résultats en ayant recours à l'analyse. Il était naturel que, de ces deux méthodes pour étudier les figures géométriques, la première exclusivement fût employée dans l'antiquité, tandis que la seconde parût seulement au 17ième siècle, après la naissance de l'algèbre, comme application de celle-ci à la *théorie des courbes.*

Nous pouvons tout d'abord concevoir la géométrie comme une science autonome, née de considérations d'espace. Elle se sert de notions fondamentales (point, ligne droite, etc.) et s'appuie sur une série de propositions ou *postulats* tirés de notre perception mais soumis ensuite à une abstraction qui a aussi pour effet de leur donner une forme plus précise. Partant de là, on arrive par déduction à des résultats abstraits, applicables au monde physique[1]) par une opération en quelque sorte inverse, c'est à dire en passant de l'abstrait (mathématique) au concret (physique). Le choix des postulats nécessaires,

1) Ces résultats abstraits sont aussi susceptibles d'interprétations multiples; il suffit de donner aux notions fondamentales: point, ligne droite, . . ., d'autres significations, différentes de leurs significations habituelles, mais satisfaisant elles aussi aux postulats que l'on a adoptés. Il en a été ainsi surtout dans les recherches sur la géométrie à plusieurs dimensions [cf. III 26].

leur énonciation précise, les recherches concernant leur compatibilité et leur indépendance, sont des problèmes difficiles et en même temps fondamentaux [cf. III 1].

D'autre part, nous pouvons supposer connue l'arithmétique, ou plus généralement l'analyse, c'est-à-dire les propriétés fondamentales des nombres; ces propriétés se déduisent également de certains principes, moins nombreux toutefois et beaucoup plus simples que ceux de la géométrie. Si nous appelons *point* l'élément analytique formé de *trois nombres* (appelés coordonnées), *plan* l'ensemble de tous les points (c'est-à-dire de tous les groupes de trois nombres) qui vérifient une équation linéaire déterminée à trois variables, etc., il résulte immédiatement de théorèmes analytiques que les propositions géométriques relatives à la détermination des lignes droites et des plans par deux ou trois points (en position générale), de même que celles relatives aux intersections des droites et des plans, sont toutes vérifiées; et la continuité de l'espace (défini analytiquement) résulte de la continuité des nombres. Partant de là, on peut établir une théorie de l'espace analytique qui s'identifie avec la géométrie, sans que l'on soit obligé de faire appel à l'examen des figures ou à des notions et opérations géométriques. On remplace les figures géométriques par des éléments analytiques (leurs „coordonnées" ou „leurs équations") auxquels les méthodes du calcul sont applicables. Passer d'une figure à une autre revient à déduire l'équation de la deuxième de l'équation de la première; les vérités géométriques servent de représentation aux relations analytiques. C'est la „géométrie analytique"; la première s'appelle par opposition „géométrie synthétique".

2. Notions fondamentales de la géométrie analytique. La „théorie analytique de l'espace" telle que nous venons de l'esquisser doit son origine à l'idée de „représenter" les points du plan ou de l'espace par deux ou trois nombres qu'on appela les coordonnées de ces points[2]).

Le principe général que *R. Descartes* et *P. de Fermat* établirent pour les courbes d'un plan, et qu'ils esquissèrent aussi pour la géométrie de l'espace, a reçu de nos jours des applications et des généralisations multiples [cf. III 7].

Dans chaque *forme fondamentale* de rang un, deux ou trois [nº 9], dont l'élément est le point, la ligne droite ou le plan, on peut représenter et même de plusieurs manières ces éléments par des coordonnées; les ∞^3 cercles d'un plan et les ∞^4 sphères de l'espace peuvent aussi être représentés par des coordonnées que l'on sait définir géométriquement,

2) Voir sur ce sujet III 17, nºˢ **1** à **17** et III 22 nºˢ **1** à **13**.

ces coordonnées étant toujours des grandeurs géométriques déterminées, liées à l'élément considéré. *Un caractère essentiel de tout système de coordonnées est que les coordonnées doivent déterminer d'une façon unique la figure considérée, et inversement, de telle sorte que, quand on fait varier d'une façon continue les coordonnées, la figure correspondante varie aussi avec continuité et inversement.*

*L'exemple des coordonnées pentasphériques introduites par *G. Darboux* montre cependant que le principe peut être en défaut pour certaines figures exceptionnelles ou certains systèmes exceptionnels de coordonnées (plan et cercle de l'infini).*

En général, toute figure peut être déterminée par un certain nombre k de coordonnées indépendantes. Mais il peut parfois être utile d'employer $k+1$ coordonnées homogènes ou même d'augmenter encore le nombre de coordonnées, qui dès lors ne sont plus indépendantes, mais doivent vérifier identiquement un nombre correspondant d'équations de condition. C'est le cas, par exemple, des coordonnées introduites par *J. Plücker* pour la représentation des lignes droites dans l'espace [III 27], des coordonnées pentaédriques pour la représentation des surfaces du troisième ordre [III 24][3]).

Lorsqu'on a introduit, dans un ensemble de figures, un certain système de coordonnées, on peut y définir des ensembles plus petits en soumettant les k coordonnées d'une figure à une ou plusieurs équations entre k variables. On dit alors que le groupe considéré est *représenté* par cette équation ou ce système d'équations.

Inversement, toute équation et tout système d'équations compatibles sont susceptibles d'interprétations géométriques diverses, correspondant aux diverses interprétations que l'on peut donner aux variables considérées comme des coordonnées.

Ceci nous permet d'étendre d'une façon remarquable la notion de coordonnées. Si l'on introduit dans l'équation d'une figure (écrite par exemple en coordonnées ponctuelles) un nombre quelconque (fini) de paramètres, si l'on considère ensuite la totalité des figures dont les équations correspondent à tous les systèmes de valeurs possibles de ces paramètres, si enfin l'équation donnée remplit la condition que chaque figure du groupe corresponde[4]) à un système unique de va-

3) C'est à ce point de vue que se place principalement *P. Serret* [Géométrie de direction, application des coordonnées polyédriques, Paris 1869] qui a montré l'usage qu'on peut faire de ces „coordonnées polyédriques".

4) Même dans le cas d'un nombre discontinu de systèmes de valeurs, on peut, par des conditions appropriées, établir la correspondance univoque et réciproque entre les valeurs des paramètres et les figures

leurs ou du moins à un nombre discontinu de systèmes de valeurs des paramètres, de telle sorte qu'une variation continue des paramètres amène une variation continue de la figure et inversement, nous pouvons prendre les paramètres introduits comme *coordonnées* de la figure correspondante dans le groupe considéré.

Cette considération s'applique continuellement aux systèmes linéaires de courbes et de surfaces algébriques, en particulier au système formé de toutes les courbes planes ou de toutes les surfaces d'un ordre donné, et aux involutions dans les formes de première espèce. C'est ainsi, et en appliquant même cette méthode plusieurs fois de suite, qu'on arrive à étendre la conception des coordonnées à beaucoup d'autres cycles de figures géométriques.

Pour interpréter géométriquement les équations contenant plusieurs séries de variables, on interprète les variables de chaque série isolée comme coordonnées d'un élément d'un ensemble particulier; cette interprétation se rapporte alors à la totalité des figures formées, de toutes les façons possibles, en prenant un élément dans chacun des ensembles. Ces éléments ne sont pas nécessairement de la même nature; l'exemple le plus simple relatif aux éléments hétérogènes nous est fourni par les *connexes*[5]) du plan, que *A. Clebsch*[6]) a le premier étudiés.

L'interprétation géométrique des équations différentielles imaginée par *G. Monge*[7]) et reprise plus tard par *P. du Bois-Reymond*[8]) et *S. Lie*[9]) doit être considérée aussi comme une extension de l'interprétation des

5) *Un connexe est représenté par une équation $f(x, y, z, u, v, w) = 0$ entre les coordonnées homogènes x, y, z d'un point du plan et les coordonnées tangentielles homogènes u, v, w d'une droite. A tout point x_0, y_0, z_0 du plan correspondent une infinité de droites qui enveloppent une courbe. A toute droite u_0, v_0, w_0 correspondent une infinité de points situés sur une courbe.*

6) Nachr. Ges. Gött. 1872, p. 429; Math. Ann. 6 (1873), p. 203. La notion de connexe apparaît déjà dans *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwickelungen 2, Essen 1831, (§ 2).

7) Hist. Acad. sc. Paris 1784, éd. 1787, p. 502; Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie à l'usage de l'Ecole polytechnique, publiées la première année de cette école, Paris an III, par *G. Monge*, éd. Paris Thermidor an IX; les éditions suivantes sont publiées sous le titre: Application de l'analyse à la géométrie; dernière édition publiée par *J. Liouville*, Paris 1850; voir en particulier l'addition p. 420 et suiv.

8) Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variablen, Leipzig 1864.

9) Déjà dans ses premiers travaux, de 1870 à 1881, *S. Lie* utilise la géométrie de la ligne droite de *J. Plücker* et la géométrie des sphères pour étudier la théorie des équations différentielles. Les notions fondamentales qui se rapportent à l'interprétation géométrique des équations différentielles se trouvent déjà dans les mémoires de 1872 [Forhandlinger Videnskabs Selskabet Christiania 1872, éd. 1873,

équations finies par des figures géométriques. De même qu'on interprète un système de valeurs de x, y ou de x, y, z, comme représentant un point du plan ou de l'espace, on peut interpréter un système de valeurs de

$$x,\ y,\ y' \left(\text{où } y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

ou de

$$x,\ y,\ z,\ dx : dy : dz$$

ou de

$$x,\ y,\ z,\ p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

comme représentant un *élément linéaire* du plan ou de l'espace ou un élément de surface. Une équation différentielle représente un certain ensemble de ces éléments, et le problème de l'intégration de cette équation peut alors facilement être interprété géométriquement [cf. II 16; II 21; II 22 et dans l'article actuel III 3 ce qui a trait aux recherches de *S. Lie*].

La détermination de figures géométriques par des coordonnées, et la représentation d'ensembles de ces figures, c'est-à-dire encore de figures, par des équations sont les deux notions fondamentales de la géométrie analytique; le reste n'est qu'une question de calculs (au sens le plus général) c'est-à-dire de problèmes d'analyse. Toute figure représentée par une équation, peut d'ailleurs, en général, être définie aussi au moyen de coordonnées; il suffit de considérer comme telles les constantes qui entrent dans son équation; et toute figure qui peut être définie par des coordonnées peut être considérée comme un élément commun (intersection) à certains ensembles dont chacun est représenté par une équation (obtenue en égalant à une constante chacune des coordonnées sus-dites).

3. Relations mutuelles des deux géométries. Toute question géométrique peut être traitée soit analytiquement, soit synthétiquement. Dans la méthode analytique il y a trois phases essentielles à distinguer:

1°) La traduction analytique du problème, dans laquelle il s'agit d'exprimer les conditions du problème par des équations, c'est-à-dire „de les écrire dans la langue de la géométrie analytique“.

2°) La déduction, en partant de ce système d'équations, des autres

p. 24/7; Nachr. Ges. Gött. 1872, p. 473] et reçoivent dès lors des applications continuelles. Cette interprétation a été exposée en détail dans *S. Lie*, Geometrie der Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896. Voir aussi les trois chapitres que *F. Engel* a tirés du second volume (non achevé); ces trois chapitres ont été publiés: Math. Ann. 59 (1904), p. 193.

équations ou des valeurs des coordonnées qui représentent les figures cherchées; c'est dans ce problème purement analytique que consiste le secours apporté par l'analyse à la géométrie.

3°) L'interprétation géométrique des résultats acquis analytiquement.

Le passage exigé par les phases (1°) et (3°) d'une relation géométrique à sa représentation analytique et inversement se fait souvent d'une façon immédiate presque inconsciente. Au contraire, les transformations comprises dans la phase (2°) reposent sur une série d'opérations analytiques générales qui se présentent constamment (par exemple: équations de la ligne droite et du plan déterminés par deux ou trois points donnés, intersection de droites et de plans, équations de tangentes et de plans tangents à des courbes ou des surfaces données, formation de systèmes linéaires d'équations, ...) et qui constituent l'essence de la géométrie analytique.

Malgré leur opposition apparente, on peut reconnaître à beaucoup d'égards dans les deux géométries le même fil conducteur. Que l'on traite une question quelconque d'une façon ou d'une autre, la suite des idées reste en général la même; il n'y a de changée que la façon de s'exprimer, que la „langue". En fait, toute considération synthétique peut être „traduite analytiquement"; et d'une série d'opérations synthétiques partant d'une certaine figure (A) pour aboutir à une autre (B) découle, par traduction, une opération analytique qui permet de déduire des équations de la figure A les équations de B, ce qui constitue la seconde phase de la méthode analytique. Inversement, tout calcul peut en général être interprété géométriquement, et cela de façons très différentes suivant la signification, comme coordonnées, que l'on donne aux variables; en sorte qu'une même série d'opérations analytiques peut servir à traiter différentes questions géométriques (dans un certain sens équivalentes).

Grâce à ces interprétations géométriques, bien des considérations analytiques peuvent être éclaircies, en sorte que la géométrie vient à son tour au secours de l'analyse. C'est ce qui arrive, par exemple, dans la théorie des équations différentielles mentionnée au n° 2 [cf. n° 5 et le chapitre consacré à un aperçu sur les recherches de géométrie différentielle]. De même aussi, la notion de dérivée d'une fonction réelle $y = f(x)$ [II 1, **10**] devient claire dès que l'on considère la tangente à la courbe $y = f(x)$.

4. Plan de l'exposé suivant. Ce fut un des mérites de la méthode analytique d'avoir rendu accessibles à la géométrie la conception et la résolution des problèmes dans toute leur généralité, ce qui apparaissait autrefois comme un avantage particulier de l'analyse. Mais la géométrie synthétique a atteint elle aussi au 19ième siècle, dans le domaine algébrique, par de nouvelles méthodes, à une généralité aussi complète.

Sans pousser notre parallèle jusqu'aux recherches les plus récentes de la théorie des ensembles [I 7; II 2; III 2, **8**, **9**] *nous nous proposons dans l'exposé suivant de montrer comment les deux méthodes se sont développées et pénétrées au cours du 19ième siècle, et comment dans les résultats acquis par les recherches fondamentales on peut souvent faire la part de l'une et de l'autre méthode.*

5. La situation à l'époque de Monge. L'introduction en géométrie de la notion de coordonnées, et peu après (à la fin du 17ième siècle), l'invention du calcul infinitésimal [II 3] par *I. Newton* et *G. W. Leibniz*, ouvrirent aux mathématiques un vaste champ d'action. Des problèmes anciens, qui paraissaient inaccessibles à la géométrie synthétique, se traitaient par les nouvelles méthodes avec une facilité surprenante; un exemple frappant nous en est fourni par la théorie des relations infinitésimales des courbes et des surfaces[10]), théorie dont, surtout, *A. C. Clairaut*[11]) et *L. Euler*[12]) posèrent les fondements.

*Mais[13]) à la fin du 18ième siècle, ce programme commençait à paraître épuisé. Au contraire, des méthodes précises de recherches préparaient aux sciences expérimentales le développement considérable qu'elles ont eu depuis. *J. L. Lagrange* lui-même se tournait vers la chimie et dans leurs recherches mathématiques, *A. M. Ampère*, *S. D. Poisson*, *A. L. Cauchy* avaient en vue surtout une application des méthodes analytiques à la mécanique et à la physique moléculaire.

„La géométrie moderne, c'est un titre que nous devons revendiquer pour elle, est venue dès la fin du 18ième siècle contribuer dans une large mesure au renouvellement de la science mathématique tout entière en offrant aux recherches une voie nouvelle et féconde.

„*L. N. M. Carnot* par l'„Essai sur les transversales" et la „Géométrie de position", *G. Monge* surtout par la création de la géométrie descriptive

10) Voir à ce sujet les articles consacrés à la géométrie infinitésimale.

11) Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731.

12) Introductio in analysin infinitorum 2, Lausanne 1748; trad. *J. B. Labey*, Introduction à l'analyse infinitésimale 2, Paris an V; Recherches sur la courbure des surfaces [Hist. Acad. Berlin 16 (1760), éd. 1767, p. 119/43].

13) *G. Darboux*, Étude sur le développement des méthodes géométriques: conférence faite au Congrès de St Louis en 1904, éd. Paris 1904, p. 6; Bull. sc. math. (2) 28 (1904), p. 234/63.

et par ses belles théories sur la génération des surfaces sont venus renouer une chaîne qui paraissait brisée."*

A cette fin du 18ième siècle règne en France un foyer d'activité et tout se groupe autour de l'École polytechnique nouvellement fondée. *G. Monge* est à la tête de ce mouvement. Le premier, dans son traité capital „Application de l'analyse à la géométrie", il tire parti de la géométrie en vue d'une théorie purement analytique, la théorie des équations différentielles partielles et totales, en même temps qu'il formule certains problèmes relatifs à la théorie des surfaces; il cherche en particulier, par des constructions géométriques, à entrer dans la compréhension des équations aux dérivées partielles et des problèmes d'intégration qui s'y rapportent.

G. Monge, publia aussi ses „Leçons de géométrie descriptive"[14]. Bien que ce fût essentiellement un ouvrage d'organisation, destiné à amener l'enseignement de la géométrie descriptive à une forme stable, et à la rendre accessible à un plus grand nombre de personnes [III 10] *il n'en constituait pas moins un premier pas vers la renaissance de la géométrie synthétique.* Dans ce domaine, nous pouvons distinguer comme points principaux de l'œuvre de *G. Monge* les deux points suivants:

1°) L'emploi systématique des projections, bien qu'uniquement des projections orthogonales, pour étudier à fond les figures à trois dimensions, leurs relations entre elles et avec des figures à deux dimensions, et aussi pour déduire les propriétés d'une figure de celles de ses projections et inversement. Cet emploi des projections s'est élevé, depuis, jusqu'à devenir une veritable méthode de recherche.

2°) L'inauguration d'une nouvelle méthode de démonstration, qui aurait été rejetée par les anciens géomètres comme peu rigoureuse et inadmissible, mais qui devait se montrer très féconde entre les mains de *G. Monge* et de ses élèves: la *méthode des relations contingentes*[15]. Elle consiste à considérer comme fortuite („contingente") la présence ou l'absence de certaines circonstances et par suite à regarder une proposition, démontrée dans le cas de leur présence, (par exemple en supposant qu'une quadrique est rencontrée par une certaine droite), comme démontrée dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas aussi où la droite en question ne rencontre pas la quadrique[16]. Cette

14) Séances des Écoles normales, Paris an III; Leçons de géométrie descriptive, (1re éd.) Paris an VII.

15) Désignation de *M. Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, (2e éd.) Paris 1875, p. 197 et suiv.: Voir aussi id. p. 357/9 (note XXIV).

16) *G. Monge*, Leçons de géométrie descriptive, (2e éd.) Paris 1811, p. 51 et suiv.; (4e éd.) Paris 1820, p. 43 et suiv.

heureuse idée ne devait être justifiée que plus tard par le „principe de continuité" de *J. V. Poncelet* [n° 7], par la traduction analytique de la démonstration, et enfin par la théorie des imaginaires [nos **14** et suivants].

*„Il faut insister sur ce caractère de l'ensemble de l'œuvre de *G. Monge*: le rénovateur de la géométrie moderne nous a montré dès le début, ses successeurs l'ont peut-être oublié, que l'alliance de la géométrie et de l'analyse est utile et féconde, que cette alliance est peut-être une condition de succès pour l'une et pour l'autre[17])".*

6. Les premiers successeurs de Monge. Les élèves de *G. Monge* et ses premiers successeurs s'appliquent à retrouver géométriquement, sans secours étranger, par les nouvelles méthodes, les nombreux théorèmes acquis à la géométrie par la méthode des coordonnées.

A cet égard, il faut citer en première ligne plusieurs des travaux de *L. N. M. Carnot*[18]. Il se sert avec prédilection des considérations de transversales qui partent d'une généralisation du théorème de *Menelas* concernant les points d'intersection d'une courbe plane (au lieu de la ligne droite) avec les côtés d'un triangle. La théorie des coniques et des quadriques [III 17; III 18; III 22] s'est dès lors tout particulièrement développée. La théorie des polaires, traitée déjà à maintes reprises par *G. Monge,* conduit *Ch. J. Brianchon*[19] à son théorème sur l'hexagone circonscrit à une conique[18]. Et dominant le tout, le „Traité des propriétés projectives des figures" de *J. V. Poncelet* constitue enfin le premier exposé systématique de la „géométrie projective" [III 8] au sens actuel du mot.

Établissement de la géométrie synthétique par Poncelet, Möbius, Steiner et Chasles.

7. L'œuvre de Poncelet. *Comme caractère de l'ensemble de l'oeuvre de *G. Monge* nous avons relevé l'alliance heureuse de la géométrie et de l'analyse. *J. V. Poncelet* néglige tout ce qui se rattache à l'analyse de *R. Descartes* ou ce qui concerne la géométrie infinitésimale

17) *G. Darboux*, Dével. méthodes géom.[15]), p. 7; Bull. sc. math. (2) 28 (1904), p. 236.*

18) *De la corrélation des figures de géométrie, Paris an IX (1801); Géométrie de position, Paris an XI (1803);* Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales, Paris 1806 (ce dernier mémoire est cité fréquemment sous le nom de „Essai sur la théorie des transversales").

19) J. Éc. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 297; (1) cah. 19 (1823), p. 188.

et s'attache exclusivement à développer les recherches purement géométriques de *G. Monge.**

Le „Traité[20]) des propriétés projectives" de *J. V. Poncelet* marque le vrai commencement de la géométrie synthétique moderne, puisque beaucoup de notions et de points de vue modernes y sont pour la première fois formulés avec précision, et appliqués d'une façon rationnelle. Les points à mettre en relief sont les suivants:

1°) *J. V. Poncelet* introduit dans son „Traité" dès le début[21]) la notion la plus générale de projection, la *projection centrale* et base sur elle une méthode pour déduire des propriétés de figures simples, les propriétés d'autres figures plus compliquées, qui en sont des projections. Ici se présente d'elle-même la différence entre les *propriétés projectives* des figures, c'est-à-dire celles qui subsistent dans les projections[22]) [cf. III 8], et les *propriétés non projectives*; aux premières appartiennent toutes les propriétés de *position*, mais par contre certaines propriétés *métriques* seulement[23]); parmi celles-ci, *J. V. Poncelet* met en évidence[24]) le rapport anharmonique[25]) de quatre points d'une droite, rapport qui s'était déjà présenté à *Ch. J. Brianchon*[26]) et dont l'invariance par une projection quelconque résulte d'un théorème bien connu de *Pappus*[27]).

Dans l'emploi systématique de la projection centrale, la notion *d'infiniment éloigné* apparaît à chaque instant et *J. V. Poncelet* est conduit à considérer l'infiniment éloigné du plan comme une ligne droite de direction indéterminée[28]), l'infiniment éloigné de l'espace comme un plan de position indéterminée[29]) et à établir ensuite des théorèmes généraux sur des relations de position. A la projection centrale il

20) Traité des propriétés projectives des figures. (1re éd.) Paris 1822; (2e éd.) 1, Paris 1865; 2, Paris 1866.

21) Id. (2e éd.) 1, p. 3/25.

22) Id. (2e éd.) 1, p. 4/5.

23) Id. (2e éd.) 1, p. 5.

24) Id. (2e éd.) 1, p. 12.

25) *Au lieu de dire rapport anharmonique (cette dernière expression n'ayant été introduite que par *M. Chasles*) on pourrait employer le nom très expressif de *double rapport* qui correspond exactement à la locution *Doppelverhältniss* employée en allemand. Il convient toutefois de nous conformer ici à l'usage français*.

26) Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817.

27) *Συναγωγὴ μαθηματική*, livre 7, prop. 129; édité d'abord en latin par *F. Commandin*, Venise 1588; éd. *F. Hultsch*, Pappi Alexandrini collectionis libri quae supersunt libris manu scriptis 2, Berlin 1877, p. 870/2.

28) Propriétés projectives[20]), (2e éd.) 1, p. 48/9.

29) Id. (2e éd.) 1, p. 361.

joint la considération des *figures homologiques* dans le plan[30]) et dans l'espace[31]) (perspective-relief), faisant ainsi un premier pas vers la considération des *relations homographiques* entre les formes fondamentales de rang deux ou trois.

2°) Dans la théorie des sections coniques et des surfaces du second degré, telle qu'on la trouve déjà développée dans le „Traité des propriétés projectives des figures[20])" mais encore plus dans le „Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques" présenté par *J. V. Poncelet* à l'Académie des sciences de Paris en 1824 mais publié seulement en un court extrait[32]) en 1826 et in extenso[33]) en 1829, se trouve un essai remarquable sur le *principe de dualité.* Cette relation fondamentale entre le point et la droite dans le plan, de même qu'entre le point et le plan dans l'espace, *J. D. Gergonne*[34]) chercha, dans trois mémoires parus de 1827 à 1829, à la justifier, en remarquant que les théorèmes fondamentaux de la géométrie permettent ces échanges de mots[35]), et que, comme une loi de symétrie, ce principe de dualité domine toute la géométrie du plan et de l'espace. Ce fut le début d'une discussion de priorité entre *J. V. Poncelet* et *J. D. Gergonne*[36]). S'il est vrai que la loi de dualité ne devait être conçue, justifiée et appliquée dans toute sa généralité que plus tard par *A. F. Möbius* et *J. Plücker* [nos **8, 12**], *J. V. Poncelet* fut cependant le premier qui reconnut et mit formellement en évidence l'importance considérable de cette loi dans un cas particulier, la transformation par polaires réciproques, tandis que *J. D. Gergonne* reconnut l'existence de cette loi générale dans les premiers éléments de la géométrie, mais se borna à en observer les manifestations.

„C'est *J. D. Gergonne* qui a émis l'idée du principe de dualité en géométrie, idée inspirée, on peut le croire, par les beaux résultats de la théorie des polaires réciproques de *J. V. Poncelet*, seule méthode que l'on connut alors pour les transformations de cette nature"[37]).

30) Propriétés projectives[20]), (2e éd.) 1, p. 154/5.

31) Id. (2e éd.) 1, p. 357/405.

32) Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 265.

33) J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 1; Propriétés projectives[20]), (2e éd.) 2, p. 57.

34) Ann. math. pures appl. 15 (1824/5), p. 157; 16 (1825/6), p. 209; 17 (1826/7), p. 214.

35) En termes modernes, une „transformation automorphe" avec la période 2.

36) Cf. *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1896), éd. 1901, p. 160.

37) *M. Chasles*, Rapport sur les progrès de la géométrie, Paris 1870, p. 59.*

Voici comment, d'autre part, *G. Darboux*[38]) caractérise la part qui revient respectivement à *J. V. Poncelet* et à *J. D. Gergonne* dans cette découverte.

„En introduisant les polaires réciproques, *J. V. Poncelet* faisait au plus haut degré œuvre d'inventeur; car il donnait le premier exemple d'une transformation dans laquelle à un point correspondait autre chose qu'un point. Toute méthode de transformation permet de multiplier le nombre des théorèmes, mais celle des polaires réciproques avait l'avantage de faire correspondre à une proposition une autre proposition d'aspect tout différent. Il y avait là un fait essentiellement nouveau. Pour le mettre en évidence, *J. D. Gergonne* inventa le système qui depuis a eu tant de succès, des mémoires écrits sur doubles colonnes avec les propositions corrélatives en regard . . .“

Tout naturellement alors, *J. D. Gergonne* dut s'apercevoir que l'on pouvait passer des premiers théorèmes aux théorèmes corrélatifs en échangeant les mots point et droite, et faisant les autres substitutions qui s'en déduisent, et ce simple procédé mécanique substitué aux démonstrations de *J. V. Poncelet* qui exigeaient l'intermédiaire d'une courbe ou d'une surface dut lui donner ainsi l'idée du principe de dualité.*

3°) Chez *J. V. Poncelet* apparaît sous la forme du *principe de continuité* [III 4 n$^{\text{os}}$ **5, 7**] une sorte de justification, mais pas encore une véritable démonstration, de la „Méthode des relations contingentes“ que *G. Monge* avait déjà employée [cf. n° **5**].

„Dès qu'une figure procède d'une autre par variation continue et qu'elle est *aussi générale que celle-ci*, toute propriété démontrée sur la première peut être attribuée sans plus à la seconde[39]).“

Cela revient à admettre que, dès qu'une propriété existe dans un certain cas, elle ne peut disparaître au cours d'une variation continue et que par suite on a le droit de conclure du cas où certains éléments exigés par la démonstration se présentent sous forme réelle, au cas où ces éléments sont *idéaux.*

Ce principe, *J. V. Poncelet* cherche à le justifier par analogie avec la méthode des coordonnées, c'est-à-dire avec l'algèbre[40]). Et pour

38) *G. Darboux,* Dével. méthodes géom.[13]), p. 8; Bull. sc. math. (2) 28 (1904), p. 237/8.

39) Cf. Propriétés projectives[20]), 2$^{\text{e}}$ éd.) introduction, p. XIII et suiv. Pour d'autres détails sur le principe de continuité, cf. „Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques“ [Applications d'analyse et de géométrie 2, Paris 1864, p. 296/312].

40) On sait qu'il existe un grand nombre d'opérations analytiques qui ne sont possibles que dans le domaine complexe et conduisent à un résultat simple toujours valable; toutes les fois que la solution analytique d'un problème de géométrie se ramène à un problème de ce genre, comme cela se produit à tout instant en géométrie algébrique, à cause de l'intervention du théorème fondamental de l'algèbre [I 9, n$^{\text{os}}$ **80 à 88**] on ne pourra exprimer le résultat, en particulier le nombre de solutions existantes, sans y ajouter un grand nombre de cas d'exception, à moins d'interpréter les solutions imaginaires éventuelles au moyen d'éléments également „imaginaires“ (assimilés aux réels).

C'est pourquoi il est utile de regarder, de prime abord, dans les développements analytiques de ce genre, l'espace ponctuel comme l'ensemble de tous les groupes de trois nombres complexes ou non, et de définir tout groupe constitué par trois nombres non tous réels, comme représentant un point „imaginaire“ ou „complexe“, introduction purement formelle, mais cependant rigoureuse des éléments imaginaires, qui est permise en géométrie analytique.

En géométrie synthétique, il est d'abord nécessaire de faire une extension correspondante des notions de point, de droite, etc., comme l'a fait *K. G. Chr. von Staudt* [n° **14**].

rester fidèle à *l'analogie entre les idées et la langue*[41]) il parle sans plus de *corde idéale* commune à deux sections coniques et de *points d'intersection imaginaires* et reconnaît dans ces *expressions purement figurées, mais fondées sur des rapports exacts et rigoureux*[42]) le seul moyen par lequel la géométrie synthétique puisse s'élever à une généralité aussi complète que l'analyse. Il arrive ainsi à cette remarque[43]) que tous les cercles d'un plan *ont idéalement deux points imaginaires communs à l'infini* et que[44]) deux quelconques de ces cercles ont une corde commune réelle ou imaginaire à distance finie, qui va elle aussi à l'infini dans le cas de cercles concentriques. De même, deux sphères[45]) et plus généralement deux quadriques homothétiques, ont une courbe d'intersection plane réelle ou idéale située à l'infini. On voit par là que les notions d'ombilics d'un plan et d'ombilicale dans l'espace, d'une importance capitale pour le développement ultérieur de la science, se trouvent déjà sous une forme précise chez *J. V. Poncelet,* et sont employées par lui, pour interpréter projectivement des relations métriques.

8. Möbius. „Les travaux de *J. V. Poncelet* suscitèrent partout les recherches les plus approfondies. On chercha à étudier sous toutes leurs faces les principes qu'il avait découverts et à en tirer toutes les conséquences.

Mais il faut, dès maintenant, noter une différence fondamentale

41) Propriétés projectives[20]), (2$^{\text{e}}$ éd.) 1, p. 27.

42) Id. (2$^{\text{e}}$ éd.) 1, p. 35.

43) Id. (2$^{\text{e}}$ éd.) 1, p. 47/8.

44) Id. (2$^{\text{e}}$ éd.) 1, p. 44.

45) Id. (2$^{\text{e}}$ éd.) 1, p. 370.

entre les tendances des grands géomètres. Les uns, comme *M. Chasles* et *J. Steiner*, *K. G. Chr. von Staudt* plus tard, se consacrèrent uniquement aux recherches de pure géométrie et se proposèrent de constituer une doctrine autonome, rivale de l'analyse cartésienne. Les autres, *J. D. Gergonne*, *E. Bobillier*, *J. Ch. F. Sturm*, et en Allemagne *A. F. Möbius* et *J. Plücker* surtout, perfectionnaient l'instrument de *R. Descartes* et découvraient de nouvelles méthodes s'adaptant en quelque sorte aux travaux de *J. V. Poncelet.*

Partout on note la plus grande activité, et comme signe de cette activité mathématique, on peut relever la grande quantité de journaux scientifiques qui prirent alors naissance. *J. D. Gergonne* avait fondé les „Annales de mathématiques" publiées à Nîmes de 1810 à 1831. *A. Quetelet* créait en Belgique la „Correspondance mathématique et physique". *A. L. Crelle* faisait paraître à Berlin dès 1826 son célèbre journal et y publiait les oeuvres de *N. H. Abel*, de *C. G. J. Jacobi* et de *J. Steiner.*

En Allemagne en particulier, les idées nouvelles et fondamentales de *J. V. Poncelet* trouvent le meilleur accueil et elles sont poursuivies et reliées à la géométrie analytique.*

Dans le domaine de la géométrie synthétique, on doit citer ici *A. F. Möbius* qui fut aussi analyste, et *J. Steiner.*

Dans son „Calcul barycentrique"[46]), *A. F. Möbius* étudie[47]) la relation homographique la plus générale entre deux figures planes ou de l'espace, relation qu'il détermine d'une façon unique par quatre ou cinq couples de points correspondants en position générale. On doit y remarquer l'ébauche[48]) de la *classification des propriétés des figures géométriques* suivant les correspondances (homographie, corrélation, similitude) pour lesquelles ces propriétés sont „invariantes"; il y fait souvent intervenir le „double rapport" qui apparaît comme l'invariant fondamental des relations homographiques.

La *réciprocité des figures planes*[49]) permet à *A. F. Möbius* d'établir, à côté de chaque proposition de géométrie plane concernant des relations de position, la proposition „corrélative" sans se servir de la polarité par rapport à une figure du second degré,

46) *A. F. Möbius*, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827; Werke 1, Leipzig 1885, p. 25/388.

47) Der baryr. Calcul[46]), p. 301/68; Werke 1, p. 266/318.

48) Der baryc. Calcul[46]), p. 363/8; Werke 1, p. 315/8.

49) Der baryc. Calcul[46]), p. 433/53; Werke 1, p. 371/87.

c'est-à-dire d'établir le *principe de dualité* dans sa forme la plus générale.

9. Steiner. Dans son ouvrage intitulé „Développement systématique"[50]), *J. Steiner* s'était proposé de réunir les résultats des recherches faites dans le domaine de la géométrie depuis quelques dizaines d'années, et de les enchaîner de manière à en faire un exposé méthodique. Des cinq chapitres projetés, un seul a été publié; il contient l'exposé suivant de la géométrie projective:

1°) Énumération des *formes fondamentales* de divers rangs (ponctuelles, faisceau de droites, etc.).

2°) Considération de leur *position perspective* et des correspondances univoques qui en résultent, complétées par la considération des éléments infiniment éloignés.

3°) Notion de *correspondance projective* ou *homographique* entre des formes de première espèce. Partant de la considération de deux formes en position perspective, il maintient la correspondance univoque ainsi établie entre ces formes quand celles-ci (chacune étant considérée comme un système rigide) prennent de nouvelles positions, en particulier une position *oblique*, dans laquelle les éléments correspondants ne passent plus l'un par l'autre.

4°) Dans deux formes projectives de première espèce, deux systèmes correspondants de quatre éléments ont le même rapport anharmonique et *leur relation est déterminée d'une façon unique par trois couples d'éléments correspondants.* Sur ces bases, *J. Steiner* développe d'une façon détaillée la théorie des relations homographiques et les constructions qui s'y rapportent.

5°) La génération des sections coniques par des faisceaux projectifs de droites, et de leurs enveloppes de tangentes par des séries homographiques de points sur deux droites, est étudiée directement dans le cas du cercle, puis étendue par projection à toutes les sections coniques et aux surfaces coniques. On peut déduire de cette génération presque toutes les autres propriétés des sections coniques dans un vaste enchaînement méthodique et d'une manière particulièrement simple et claire.

6°) Trois générations différentes sont aussi indiquées pour l'hyperboloïde à une nappe[51]):

a) Par deux ponctuelles projectives sur deux droites non situées dans un plan.

50) Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832; Werke 1, Berlin 1881, p. 237/458.

51) Syst. Entw.[50]), § 50 et suiv.; Werke 1, p. 365 et suiv.

b) Par deux faisceaux de plans projectifs dont les axes ne se rencontrent pas.

c) Par l'ensemble des droites qui rencontrent trois droites fixes dont deux quelconques ne sont pas situées dans un même plan[52]).

Comme cas particulier est indiqué[53]) le paraboloïde hyperbolique.

10. Continuation du programme de Steiner. L'ouvrage cité[51]) de *J. Steiner* contient l'ébauche d'un vaste programme général, celui de la *définition purement synthétique des figures géométriques, donnée en considérant ces figures comme engendrées par des formes fondamentales projectives.*

Ce programme fut plus tard poursuivi par d'autres géomètres, en particulier par *F. Seydewitz*[54]) qui a étudié d'une façon approfondie les relations homographiques entre deux formes de rang un et les involutions, les appliqua à la théorie des coniques[55]), les correspondances projectives et quadratiques entre les formes de rang deux[56]), la génération des quadriques par deux gerbes réciproques[57]) et la construction des quadriques passant par neuf points donnés[58]), la génération des courbes gauches du troisième ordre par deux gerbes homographiques[59]).

H. Schröter reprend ensuite la génération des surfaces du troisième ordre au moyen de trois gerbes de plans homographiques[60]), poursuit l'étude des quadriques et retrouve, par voie géométrique, les propriétés, déjà obtenues analytiquement, des courbes planes du troisième ordre et de la courbe gauche du quatrième ordre de première espèce [61]); puis vient

52) La génération c) se trouve chez *G. Monge* [géométrie descriptive, (2e éd.) Paris an VI, additions, 2]. Les deux autres n'étaient connues que dans des cas métriques particuliers [*E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1898), éd. 1901, p. 76/8] et ont seulement été rendues accessibles à la méthode projective générale par *J. Steiner*.

53) Syst. Entw.[50]), § 52; Werke 1, p. 374/82.

54) Archiv Math. Phys. (1) 4 (1844), p. 246.

55) Id. (1) 5 (1844), p. 225.

56) Id. (1) 7 (1846), p. 113; (1) 8 (1846), p. 1.

57) Id. (1) 9 (1847), p. 158/87.

58) Id. (1) 17 (1851), p. 275; cf. note 57.

59) Id. (1) 10 (1847), p. 203. La génération des courbes gauches du troisième ordre au moyen de trois faisceaux de plans projectifs apparaît seulement chez *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 45 (1857), p. 189.

60) J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 265. En ce qui concerne *H Grassmann*, voir J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 47/65; en part. p. 59/65; Werke 2¹, publ. par *E. Study*, *G. Scheffers* et *F. Engel*, Leipzig 1904, p. 180/98 en partic. p. 192/8.

61) Cf. *J. Steiner*, Vorlesungen über synthetische Geometrie 2, réd. par *H. Schröter*: Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften, Leipzig 1867; (2e éd.) Leipzig 1876; (3e éd.) revue par *R. Sturm*, Leipzig 1898; *H. Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, Leipzig 1880; Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, Leipzig 1888; Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies, Leipzig 1890.

Th. Reye dont la „Géométrie de position" dans ses éditions successives[62]) réunit tous ces exposés, et contient d'autres développements (complexe tétraédral, congruences de droites les plus simples, surface de Kummer); enfin *F. Schur* qui reprit la même voie au point où s'était arrêté *Th. Reye* et envisagea, en se plaçant au point de vue de *J. Steiner*, les courbes planes du troisième ordre, les courbes gauches d'ordre six et de genre trois[63]), et les surfaces du quatrième ordre qui contiennent de telles courbes gauches[64]). Mais certains inconvénients qui tenaient à la nature même des choses ne pouvaient être évités et il n'était pas toujours possible d'atteindre par cette voie à une généralité absolue des figures engendrées. La notion fondamentale pour la théorie steinérienne des relations projectives[65]) était toujours le rapport anharmonique qui avait encore pour point de départ la considération des longueurs et des angles, c'est-à-dire des notions métriques; la génération des lieux géométriques par des formes projectives ne conduisait pas encore aux courbes et surfaces les plus générales d'un ordre déterminé; enfin les éléments imaginaires se dérobaient complètement à la méthode.

11. Chasles. En même temps que *J. Steiner*, *M. Chasles* suivait les voies de la géométrie pure. Son œuvre est basée sur trois notions:

1°) Le „rapport anharmonique" de quatre éléments d'une forme simple;

2°) Les relations projectives ou *divisions homographiques* qu'il définit par l'égalité des rapports anharmoniques de quadruples correspondants;

3°) La relation d'involution entre six éléments d'une forme de première espèce.

Ces notions apparaissent à chaque instant dans son „Aperçu

62) Die Geometrie der Lage, (1re éd.) 1, Hanovre 1866; 2, Hanovre 1868; (2e éd.) 1, Hanovre 1877; 2, Hanovre 1880; (3e éd.) 1, Leipzig 1886; 2, Leipzig 1892; 3, Leipzig 1892; (4e éd.) 1, Leipzig 1899; 2, Stuttgard (Leipzig) 1907; 3, Leipzig 1910; (5e éd.) 1, Leipzig 1909; trad. *O. Chemin*, Leçons sur la géométrie de position 1, Paris 1881; 2, Paris 1882.

63) *Courbes du sixième degré ayant sept points doubles apparents [*F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 1/37].*

64) *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 1/27.

65) *Th. Reye* [Geometrie der Lage[62])] adopte toutefois la définition de la relation projective au moyen de *jets harmoniques* („Wurf" de *K. G. Chr. von Staudt*).

historique"[66]), surtout dans les notes, et sont développées dans son „Traité de géométrie supérieure"[67]). Dans le „Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie" paru après l'„Aperçu historique" mais rédigé déjà en 1829, *M. Chasles* étudie en détail les relations réciproques et homographiques des figures de l'espace[68]); c'est là[69]) que, partant de la considération d'un mouvement infinitésimal ou de celle d'un système de forces, il fait remarquer le cas du système réciproque[70]) ou focal[71]). Dans le „Traité des sections coniques" la théorie de ces courbes est développée en partant de la génération projective[72]).

*En ce qui concerne les éléments imaginaires, *M. Chasles* dans sa préface du „Traité de géométrie supérieure" avait nettement indiqué, en même temps que l'utilité de l'introduction du principe des signes, celle de l'introduction des imaginaires, si l'on veut obtenir des démonstrations aussi générales que celles de la géométrie analytique.* En général, il voit dans l'algèbre et dans la possibilité d'appliquer indifféremment les opérations analytiques aux nombres réels et aux nombres complexes, la véritable justification de l'introduction des éléments imaginaires en géométrie.* Il a su, par des exemples du plus grand intérêt, montrer toute l'utilité de cette introduction. Nous ne citerons ici que la théorie des surfaces homofocales du second degré, où il établit toutes les propriétés de ces surfaces en les considérant comme inscrites dans une même développable circonscrite au cercle de l'infini. Malheureusement il se borna à considérer les éléments imaginaires par couples d'éléments conjugués.* Pour ces couples *M. Chasles* indique des *représentations réelles*[73]), au moyen de leur point milieu (réel) et du produit des distances à une origine fixe[74]); plus loin, il parle aussi de cercles imaginaires d'un plan réel: il les représente par le centre réel et le carré (négatif) du rayon[75]), et il les utilise pour établir les propriétés des cônes à base circulaire. Il remarque aussi que la polarité par rapport à un cercle imaginaire peut être obtenue comme section plane de la polarité orthogonale autour d'un centre déterminé[76]); mais la véritable signification de ce point, d'être l'un ou l'autre des deux cônes isotropes (Nullkugeln) du faisceau de sphères déterminé par le cercle donné, ne fut reconnue que plus tard[77]) par *A. F. Möbius*[78]).

66) *L'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie" n'a été publié qu'en 1837 [Mém. couronnés Acad. Bruxelles in 4°, 11 (1837)] à cause des notes, mais les deux mémoires qui le composent ont été envoyés en 1830 à l'Academie de Bruxelles; (2e éd.) Paris 1875; (3e éd.) Paris 1889.* Voir à ce sujet *G. Darboux,* Dével. méthodes géom.[13]), p. 9; Bull. sc. math. (2) 28 (1904), p. 238.

67) Traité de géométrie supérieure, (1re éd.) Paris 1852; (2e éd.) Paris 1880.

68) Pour les figures planes, voir *M. Chasles,* Géom. sup.[67]) (2e éd.) p. 329/456.

69) Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie, rédigé en 1829, publié en 1837 à la suite de l'Aperçu historique[66]).

70) *Ensemble composé d'un plan qui se déplace et du foyer de ce plan. Si l'on considère un système de forces quelconques, on peut réduire ces forces à deux dont une a pour support une droite arbitrairement donnée. L'autre est alors parfaitement déterminée. Si la première se déplace dans un plan, la seconde tourne autour d'un point du plan, qui est le foyer (Nullpunkt) du plan.*

71) Cf. note 94.

72) *M. Chasles,* Traité des sections coniques, Paris 1865.

73) „Les imaginaires, qui se présentent toujours par couples, comme dans les racines d'une équation du second degré, n'offrent aucune difficulté dans leur interprétation, et se trouvent toujours représentées par des éléments réels" . . . [Rapport sur les progrès de la géométrie, Paris 1870, chap. 4, p. 220/1].

74) Géom. sup.[67]), (1re éd.) p. 56/66; (2e éd.) p. 54/63.

75) Id. (1re éd.) p. 546/79; (2e éd.) p. 502/32.

76) *Si l'on considère un point A et sa polaire a par rapport à un cercle imaginaire, et un point S situé sur l'axe du cercle à une distance R du centre, la droite SA est perpendiculaire au plan Sa.*

77) Ber. Ges. Lpz. 9 (1857), math. p. 38; Werke 2, Leipzig 1885, p. 315.

78) A ce propos, on peut encore remarquer que *E. N. Laguerre* [Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 7 (1870), p. 95; Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 14, 108, 241; Œuvres 2, Paris 1905, p. 109, 238] représente des points imaginaires conjugués de l'espace au moyen du cercle réel commun aux cônes isotropes (Nullkugeln) ayant ces points pour sommets [III 30]. Cette représentation se trouve aussi chez *W. Fiedler*, Cyklographie, Leipzig 1882, p. 138 et suiv. En parcourant le cercle de Laguerre dans un sens déterminé, on sépare les deux points imaginaires conjugués. Considérations analogues de *E. N. Laguerre* [Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p. 163/241; Œuvres 2, Paris 1905, p. 83/98] pour les points imaginaires du plan.

Développement correspondant de la géométrie analytique.

12. Möbius et Plücker. En géométrie analytique, tout rayonne jusqu'en 1825 autour des élégants mémoires de *J. D. Gergonne*[79]) *de *E. Bobillier** et, de l'„Examen des différentes méthodes" de *G. Lamé*[80]). Par le développement synthétique de la géométrie projective, la géométrie analytique reçut une impulsion considérable; de nouveaux problèmes se présentaient à elle, et pour les traiter il fallait créer de nouvelles méthodes. C'est encore *A. F. Möbius*[77]) et avec lui *J. Plücker*[81])

79) Ces mémoires sont, pour la plupart, contenus dans les Annales de mathématiques pures et appliquées.

80) Examen des différentes méthodes employées pour résondre les problèmes de géométrie, Paris 1818; (2e éd.) Paris 1903.

81) On trouve une appréciation détaillée des travaux de *J. Plücker* dans le discours prononcé par *A. Clebsch* à sa mémoire [Abh. Ges. Gött. 16 (1871), éd. 1872, math. mém. nº 1; réimp. par les soins de *A. Schoenflies* dans *J. Plücker*, Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. IX]. En ce qui concerne les œuvres scientifiques posthumes de *J. Plücker,* voir *A. Schoenflies*, Math. Ann. 58 (1904), p. 385.

qu'il faut citer ici en première ligne, et leur œuvre principale peut se résumer dans les points suivants:

1°) *Pour la première fois on emploie les coordonnées homogènes,* ce qui permet d'introduire l'infiniment éloigné dans la Géométrie analytique. *A. F. Möbius*[82]) le fait par ses *coordonnées barycentriques*: chaque point D d'un plan peut être regardé comme le centre de gravité de trois autres points quelconques A, B, C du plan non en ligne droite, ayant des poids p, q, r dont les rapports sont déterminés; ils sont proportionnels aux aires des triangles

$$DBC,\ DCA,\ DAB;$$

p, q, r s'appellent alors les „coordonnées barycentriques homogènes" de D, et l'on écrit

$$D = pA + qB + rC.$$

Chez *A. F. Möbius* se trouve aussi en quelque sorte la notion de l'*équation de la droite infiniment éloignée* en ce sens qu'il remarque que, lorsque $p + q + r = 0$, le point

$$pA + qB + rC$$

est infiniment éloigné dans une direction déterminée[83]). La notion d'*équation homogène d'une courbe plane* sous la forme

$$f(p, q, r) = 0$$

apparaît seulement chez *J. Plücker*[84]) qui introduit sous le nom de *coordonnées triangulaires* d'un point les distances de ce point aux trois côtés d'un triangle fixe; *J. Plücker* insiste souvent sur les nombreuses concordances de ses résultats avec les remarques de *J. V. Poncelet* sur l'infiniment éloigné.

2°) Dans un travail de l'année 1830, *J. Plücker*[85]) remarque que l'on peut regarder les constantes de l'équation d'une droite comme les coordonnées de cette droite, et il obtient de cette façon un *nouveau mode de représentation des courbes par des équations,* en les considérant comme enveloppes de leurs tangentes. C'était un premier pas dans la considération d'*éléments quelconques* de l'espace et leur représentation par des coordonnées[86]) [cf. III 7]. Et, dans ces remarques que point et droite peuvent être de prime abord regardés, tous deux également, comme éléments fondamentaux en géométrie plane, que la condition de leur liaison a la forme symétrique

$$ux + vy + 1 = 0,$$

qu'une chaîne quelconque d'équations algébriques à deux variables est susceptible d'une double interprétation, l'une en coordonnées ponctuelles et l'autre en coordonnées tangentielles, *J. Plücker* voit tout le secret du principe de dualité, et il le met en relief à diverses reprises[87]).

3°) En même temps que *J.D. Gergonne*[88]) et *E. Bobillier*[89]), *J. Plücker*[90]) a introduit en géométrie analytique la *méthode de la notation abrégée* et il en a souvent tiré parti. Elle consiste à employer des abréviations pour des fonctions tout entières des coordonnées, sur lesquelles on doit effectuer de nombreuses opérations. **E. Bobillier*[91]) lui avait déjà, il est vrai, consacré des pages absolument neuves. Il avait aussi généralisé le système de *R. Descartes* en représentant un point mobile par ses distances à un nombre quelconque n de droites ou de plans fixes liées par $n-2$ ou $n-3$ relations linéaires, et montré que le calcul reçoit ainsi une grande souplesse en même temps qu'une grande sobriété.* Cela revient à considérer le plan ou l'espace ordinaire euclidien dans un espace linéaire à n dimensions.

4°) La représentation analytique de *l'homographie* dans le plan et

82) Der baryc. Calcul[46]), p. 32/43; Werke 1, p. 50/60.

83) Der baryc. Calcul[46]), p. 34; Werke 1, p. 52/4.

84) J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 1; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 124.

85) J. reine angew. Math. 6 (1830), p. 107; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 178. Beaucoup plus détaillé: Analytisch-geometrische Entwickelungen 2, Essen 1831, p. 1/241.

86) Les coordonnées de plans dans l'espace et la nouvelle représentation des surfaces et développables qui en résulte sont étudiées par *J. Plücker* [J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 124; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 224] et avec plus de détails [System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846; (2e éd.) Düsseldorf 1852], où il remarque aussi (nº 258) que la ligne droite peut être déterminée dans l'espace par quatre coordonnées.

87) Analyt.-geom. Entw.[85]) 2, préface, p. VIII; voir aussi la note hors texte p. 283/4; System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, p. 1/83. Cf. aussi: *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5^2 (1896), éd. Leipzig 1901, p. 169 (en note).

88) Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 214.

89) Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 320.

90) J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 268; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 159; Application aux courbes du troisième ordre: J. reine angew. Math. 34 (1847), p. 329; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 404. Il faut regarder comme point de départ de cette méthode la remarque de *G. Lamé* d'après laquelle toute courbe contenant tous les points d'intersection de deux courbes du même ordre $E = 0$, $E' = 0$ peut être représentée par l'équation $mE + m'E' = 0$ [Ann. math. pures appl. 7 (1816/7), p. 229; Examen des différentes méthodes[60]), p. 28].

91) *Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 324.*

dans l'espace par des coordonnées barycentriques triangulaires ou tétraédriques se réduit à ce fait que les coordonnées d'un point quelconque de l'un des deux systèmes sont des fonctions linéaires des coordonnées du point correspondant dans l'autre système[92]).

5°) *J. Plücker*[93]) représente la *correspondance réciproque* par une *équation bilinéaire* et arrive par cette voie au *principe de réciprocité*, dans lequel il voit d'une seconde façon la base de la dualité. Cette équation bilinéaire se présente aussi chez *A. F. Möbius*[94]), en particulier pour la réciprocité de l'espace dans laquelle chaque point appartient au plan correspondant, c'est-à-dire pour le *système focal.*

6°) Quant aux *éléments imaginaires*, on opère sur eux en géométrie analytique, à partir de *J. Plücker*[95]), tout aussi bien que sur les éléments réels; on dira, par exemple, que toutes les sphères de l'espace passent par la courbe fixe

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \ t = 0$$

von Staudt. En particulier, figures du second degré et théorie des imaginaires avec extensions.

13. von Staudt. „Ces nouvelles méthodes analytiques et synthétiques, les géomètres vont alors les appliquer à l'étude des courbes et des surfaces. Pendant ce temps, moins préoccupés de chercher des applications brillantes, d'autres géomètres, continuateurs de *M. Chasles* et de *J. Steiner*, et à leur tête *K. G. Chr. von Staudt*, cherchaient à constituer la géométrie sur une base solide, complètement indépendante de l'analyse. Mais tandis qu'on peut reprocher à *M. Chasles*, d'une part la considération des éléments imaginaires seulement par leurs fonctions symétriques, d'autre part l'emploi constant du rapport anharmonique, ce qui donne à la „Géométrie supérieure" un caractère presque exclusivement métrique, *K. G. Chr. von Staudt* se rapproche plus nettement de *J. V. Poncelet* en s'attachant à constituer une géométrie affranchie de toute relation métrique et basée uniquement sur des rapports de situation."

La „Géométrie de position" de *K. G. Chr. von Staudt*[96]) et ses „Compléments" firent faire un pas très important et définitif à la géométrie projective. Les deux idées directrices de la „Géométrie de position" sont les suivantes:

1°) Utilisation des théorèmes sur les triangles et quadrilatères homologiques établis par des considérations de géométrie de l'espace, et de toute la théorie des figures harmoniques fondée sur ces théorèmes, pour définir d'une nouvelle manière la relation homographique entre deux formes fondamentales de première espèce: il suffit, dans le cas d'éléments réels, qu'à des formes harmoniques correspondent toujours des formes harmoniques[97]).

2°) Considération du système polaire général dans le plan, par lequel on peut définir simultanément la section conique comme lieu de ses points, et comme enveloppe de ses tangentes. On englobe aussi de cette façon le cas de la section conique complètement imaginaire (mais à polarité réelle), qui échappe à la génération par les faisceaux projectifs[98]).

92) *A. F. Möbius,* Der baryc. Calcul[46]), p. 301/30; Werke 1, p. 266/89. Pour l'homographie dans l'espace voir *J. Plücker*, System der Geometrie des Raumes, § 1.

93) Indication à ce sujet: J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 26 et suiv.; on trouve plus de détails: Analytisch-geometrische Entwickelungen 2, p. 259 et suiv.

94) J. reine angew. Math. 10 (1833), p. 317; Werke 1, Leipzig 1885, p. 489. Auparavant déjà, *G. Giorgini* [Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (detta dei XL) (1) 20 (1828), mat. p. 243/54 [1827]], par des considérations mécaniques, était arrivé à cette relation particulière [cf. IV 4, **27**]. En ce qui concerne *M. Chasles* voir le présent article n° **11**. Comme précurseur de la théorie du système focal, il faut regarder aussi le mémoire de *A. F. Möbius* sur les tétraèdres inscrits et circonscrits les uns dans les autres [J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 273; Werke 1, Leipzig 1885, p. 430].

95) Voir par ex. System analyt. Geom.[87]), p. 19 et suiv., et p. 32 et suiv.

96) Geometrie der Lage, Nuremberg 1847; Beiträge zur Geometrie der Lage 1, Nuremberg 1856; 2, Nuremberg 1857; 3, Nuremberg 1860.

97) La démonstration donnée par *K. G. Chr. von Staudt* du théorème fondamental, d'après lequel une relation homographique entre deux formes de rang un qui possède trois éléments doubles distincts est nécessairement identique [n° **106**], d'où résulte qu'une relation homographique est toujours déterminée par trois couples d'éléments correspondants, n'était pas irréprochable, mais elle a été complétée plus tard en faisant intervenir le principe de continuité [cf. I 3, n^os^ **7** et **8**; III 1, n^os^ **13**, **27**]. Cf. *F. Klein,* Math. Ann. 37 (1890), p. 544, 565 et suiv.; *G. Darboux,* Math. Ann. 17 (1880), p. 55. Si l'on admet des éléments imaginaires, il faut ajouter dans la définition de la relation homographique entre des formes de rang un, la condition que les jets correspondants, en ce qui concerne le sens, doivent être de même espèce [*K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geometrie der Lage[96]) 2, n° 215. Cf. aussi dans le présent article le n° **18**].

98) „Étant donnés deux triangles homologiques ABC, $A'B'C'$ cherchons à construire la conique par rapport à laquelle ils sont réciproques. Remarquons que sur la droite BC par exemple le point B est conjugué du point B_1 de rencontre de $A'C'$ (polaire de B) avec BC, le point C conjugué du point C_1 de rencontre de $A'B'$ (polaire de C) avec BC. Les points de rencontre de BC et de la conique sont les points doubles de l'involution déterminée par les deux

Dans le cas d'une dimension, les figures correspondantes sont les involutions (elliptiques et hyperboliques); dans le cas de trois dimensions, ce sont les surfaces du second degré (imaginaires, réelles et non réglées, réglées).

La méthode indiquée permet de construire la géométrie projective sans faire intervenir de notions métriques; et grâce à la considération du système polaire dans le plan et dans l'espace, la théorie générale des figures du second degré prend sa forme la plus simple et la plus rationnelle.

14. Théorie des imaginaires de von Staudt. C'est *K. G. Chr. von Staudt* aussi qui a donné dans les „Beiträge zur Geometrie der Lage" la première solution du problème suivant: „Définir les éléments imaginaires par des figures géométriques réellement existantes, et de telle façon qu'ils puissent être complètement assimilés aux éléments réels"[99]).

Au § 7, *K. G. Chr. von Staudt* définit „l'élément imaginaire de première espèce (point, droite plan)" par une involution elliptique (c'est-à-dire ne possédant pas d'éléments doubles) sur une forme de rang un (ponctuelle, faisceau de rayons, faisceau de plans) en tenant bien compte de l'un des deux sens opposés qu'on peut distinguer dans la forme[100]).

couples BB_1, CC_1. On déterminera de même les points de rencontre de la conique et de CA. Mais si les deux involutions ainsi déterminées n'ont pas d'éléments doubles, la conique n'existe pas. Les droites BCB_1 et $A'CB_1$ sont en effet conjuguées par rapport à la conique et l'on sait que de deux droites conjuguées une seulement peut être extérieure à la conique. La conique n'a donc aucun point réel. Mais même dans ce cas on peut obtenir par une construction linéaire la polaire (réelle) d'un point quelconque du plan, ou le pôle (réel) d'une droite quelconque du plan. Cet ensemble de pôles et de polaires définit un système polaire qui est ainsi parfaitement déterminé au moyen des deux triangles homologiques. Si la conique fondamentale correspondante existe, elle est le lieu des pôles situés sur leurs polaires, ou l'enveloppe des droites qui contiennent leur pôle. On arrive à des conclusions analogues si l'on cherche à construire une conique par rapport à laquelle un triangle donné ABC est conjugué et admettant un point D pour pôle d'une droite d.*

99) Pour la justification, la représentation, et le calcul géométrique sur les *nombres* imaginaires voir l'article I, 5.

100) La considération du sens apparaît tout d'abord quelque peu arbitraire. Essayons de la justifier d'après des éclaircissements donnés par *F. Klein* dans son cours. On sait que la recherche des points doubles d'une involution elliptique sur une ponctuelle conduit en géométrie analytique à une équation du second degré à racines imaginaires conjugués $a \pm bi$. Supposons cette involution située sur l'axe des x du plan $x + yi$. Les deux points $a \pm bi$ du plan $x + yi$ [I 5, **3**] sont précisément ceux d'où l'on peut projeter l'involution donnée par une involution de rayons rectangulaires; il semble donc assez naturel de représenter ces deux points $a \pm bi$ par l'involution considérée. Mais ces deux points sont en même temps les points bases du faisceau de cercles qui a l'axe des x pour axe central et qui découpe sur la droite l'involution proposée. Décrivons autour de ces points $a \pm bi$ deux cercles dans le même sens, par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre, et étendons par voie de continuité le sens des cercles à l'axe des x; nous obtiendrons sur celui-ci les deux sens opposés.

*C. Stephanos [Bull. sc. math. (2) 7 (1883), p. 204/14] a tenté de justifier la théorie de *K. G. Chr. von Staudt* par des considérations de nature essentiellement différente (Note de *G. Loria*).*

Quant à la „droite imaginaire de seconde espèce" il la définit par l'ensemble d'une involution elliptique sur un système réglé et d'un sens déterminé sur ce dernier. Les deux éléments imaginaires constitués par une même involution avec les deux sens différents sur la forme à laquelle l'involution appartient s'appellent „conjugués".

Soient AA_1, BB_1 deux couples quelconques de l'involution elliptique; les deux sens différents sont alors les sens ABA_1, AB_1A_1, et les éléments imaginaires conjugués correspondants sont représentés respectivement par les séries d'éléments ABA_1B_1 et AB_1A_1B. Si les couples AA_1, BB_1 sont harmoniques, la représentation s'appelle aussi harmonique. Parmi les représentations d'un élément imaginaire déterminé, qui ont un premier élément donné A, il y en a toujours une et une seule qui soit harmonique.

La théorie de K. G. Chr. von Staudt est donc une théorie des involutions et des sens dans les formes de rang un; les théorèmes qui s'y rapportent pourraient être énoncés en parlant uniquement de points, de droites et de plans réels.

L'incidence des éléments réels et imaginaires, ainsi que des éléments imaginaires entre eux, est définie de telle façon que tous les théorèmes concernant la détermination unique et les intersections de droites et de plans subsistent également dans le domaine imaginaire.

K. G. Chr. von Staudt appelle *jet* (*Wurf*) l'ensemble de quatre éléments d'une forme de rang un, considérés dans un ordre déterminé[101]). Deux jets correspondants dans deux figures projectives s'appellent aussi projectifs ou égaux. En partant de définitions appropriées pour les opérations fondamentales *K. G. Chr. von Staudt*[102]) développe un „calcul des jets" et fait correspondre à chaque ensemble de jets égaux entre eux un nombre[103]) qui se confond avec

101) *On a employé aussi le mot *quaterne* [cf. III 1, **26**] et les mots groupe, homozygie [cf. *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 313].*

102) Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 2, Nuremberg 1857, p. 166 et, plus généralement § 19 à 21.

103) Id. fasc. 2, p. 259 (§ 27 et 28).

le rapport anharmonique des quatre éléments (défini au moyen de relations métriques).

Par l'œuvre de *K. G. Chr. von Staudt,* la théorie géométrique des éléments imaginaires conquit sa forme rigoureuse et définitive. *Désormais, on peut assimiler à tous égards éléments réels et éléments imaginaires,* fait d'une importance capitale surtout pour la géométrie algébrique [III_3 et III_4], de même que, dans les développements analytiques, on peut regarder les coefficients et les variables comme des nombres quelconques (réels ou imaginaires). C'est *K. G. Chr. von Staudt* qui a complété la théorie des correspondances projectives et des sections coniques, en tenant compte des imaginaires; il a montré que les exceptions que la considération exclusive des éléments réels laisse subsister disparaissent, et a établi aussi la concordance de ses résultats avec ceux de la géométrie analytique [voir aussi nº **15**].

15. Perfectionnement et développement ultérieur de la théorie des imaginaires. Cette œuvre fondamentale fut malheureusement méconnue au début, et on ne lui accorda pas toute l'attention qu'elle méritait. C'est seulement dans la „Neuere Geometrie" de *H. Pfaff*[104]) que fut adoptée, avec des modifications insignifiantes, la définition des éléments imaginaires donnée par *K. G. Chr. von Staudt. O. Stolz*[105]) poursuivit analytiquement les considérations de *K. G. Chr. von Staudt,* et montra qu'on peut représenter les éléments imaginaires par des systèmes de nombres complexes tels que les relations entre les premiers se trouvent représentées analytiquement par les relations habituelles entre les derniers.

F. August[106]) introduisit les droites imaginaires de seconde espèce comme intersections de plans imaginaires dont les supports réels (lignes droites) ne se rencontrent pas, c'est-à-dire de plans qui n'ont aucun point réel commun.

F. Klein[107]) a proposé une modification essentielle à la conception *K. G. Chr. von Staudt.* Deux points imaginaires conjugués peuvent toujours être considérés, sur la droite réelle qui les joint, comme les éléments doubles d'une projectivité cyclique d'ordre quelconque n[108]), et un cycle quelconque de cette projectivité, parcouru dans un sens déterminé, peut servir de représentation à un de ces points imaginaires, tandis que son conjugué sera représenté par le même cycle parcouru en sens opposé. Le cas le plus simple correspond à $n = 3$, puisque tout système de trois points d'une droite se correspond à lui-même dans une homographie cyclique, et cela d'une seule façon[109]). Le point imaginaire est alors représenté par *trois points réels quelconques d'une droite réelle pris dans un certain ordre,* c'est-à-dire par un terne

$$abc \equiv bca \equiv cab,$$

tandis que son conjugué est[110])

$$bac \equiv acb \equiv cba.$$

Cet ensemble de trois points pris dans un ordre déterminé contient déjà tout ce qui est nécessaire à la représentation du point imaginaire et rien de plus, les trois points a, b, c pouvant être pris d'une façon quelconque sur la droite.

La notion de „séries cycliquement projectives" comprend aussi la *représentation harmonique* de *K. G. Chr. von Staudt* pour les éléments imaginaires. Soit en effet $abcd$ une telle représentation; les deux couples ac, bd sont alors harmoniques, et il s'ensuit que l'on a, en représentant la projectivité par le symbole $\barwedge$,

$$abcd \barwedge adcb \barwedge bcda;$$

il existe donc une relation homographique admettant les quatre couples (ab), (bc), (cd), (da): c'est donc enfin que a, b, c, d déterminent une série cycliquement projective du quatrième ordre.

Deux travaux de *J. Lüroth*[111]) marquèrent un nouveau progrès dans la théorie des imaginaires. Dans le premier, *J. Lüroth* montra que le calcul des jets introduit par *K. G. Chr. von Staudt* peut être perfectionné et généralisé, en sorte que le théorème fondamental de l'algèbre s'étende à une équation algébrique où l'inconnue est un jet,

104) Progr. Erlangen 1867, en partic. première partie § 9/10.

105) Math. Ann. 4 (1871), p. 416.

106) Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie, Progr. Berlin 1872.

107) Nachr. Ges. Gött. 1872, p. 373; reimpr. Math. Ann. 22 (1883), p. 242.

108) *Imaginons sur une même droite deux divisions homographiques $(a)(b)$. A un point a_1 de la première correspond un point b_1 de la seconde. Au point b_1 considéré comme appartenant à la première correspondra un point b_2 de la seconde ... A un point b_{n-1} considéré comme appartenant à la première correspondra un point b_n de la seconde. Si, quel que soit le point a_1 de la première division, le point b_n se confond avec le point a_1, les deux divisions forment une projectivité cyclique d'ordre n.*

109) Pour $n = 2$ il se correspond à lui-même d'une infinité de manières; ce cas ne conviendrait donc pas à la représentation de *F. Klein.*

110) Analytiquement, ces deux points imaginaires conjugués sont représentés par le covariant de *L. O. Hesse* de la forme cubique qui représente le terne abc [Math. Ann. 22 (1883), p. 245].

111) Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen [Math. Ann. 8 (1875), p. 145; 11 (1876), p. 84]. Cf. aussi un article précédent, Nachr. Ges. Gött. 1873, p. 767/79 [III 1, **26**].

et où les coefficients sont tous également des jets: „Il y a toujours un jet, et par suite aussi n jets, pour lesquels une fonction donnée de degré n d'un jet inconnu devient égale au jet nul." Pour les points et les droites d'un plan il introduit des coordonnées projectives (qui sont les valeurs de certains jets), et il montre que la condition de leur incidence (point sur droite) peut être représentée par une équation bilinéaire. Le second travail contient des développements relatifs à la théorie de *F. Klein* mentionnée plus haut. *R. Sturm*[112]) a apporté des simplifications au premier mémoire de *J. Lüroth* et établi l'équation linéaire d'un plan ou d'un point en coordonnées de jets.

W. Fiedler[113]) a donné un exposé détaillé de la théorie de *K. G. Chr. von Staudt* et introduit les coordonnées projectives dans les formes fondamentales de rangs un, deux et trois. Dès lors il est possible d'appliquer dans la géométrie de position les méthodes analytiques sans que cela suppose préalablement des notions métriques.

F. Enriques[114]) arrive plus directement au même résultat pour l'espace, en établissant entre celui-ci et „l'espace analytique" considéré comme ensemble des quadruples de nombres homogènes (x_1, x_2, x_3, x_4) une collinéation dans laquelle à cinq points indépendants de l'espace correspondent autant de points analytiques indépendants, par exemple les points
$$(1000),\ (0100),\ (0010),\ (0001),\ (1111).$$

La théorie de *K. G. Chr. von Staudt* se simplifie beaucoup, quand on se borne à considérer des couples d'éléments imaginaires conjugués, car alors la considération du sens n'intervient plus. *C. Segre*[115]) a fourni une étude détaillée de ce cas. Dans les formes fondamentales de rang un, les couples harmoniques (réels ou imaginaires) sont représentés par des involutions permutables (hyperboliques ou elliptiques)[116]); les éléments doubles d'une projectivité non involutive sont représentés par la seule involution permutable avec cette projectivité (involuzione unita)[117]). Un couple de droites imaginaires conjuguées de deuxième espèce est défini par un système involutif gauche de l'espace qui ne possède ni points doubles, ni plans doubles; une conique imaginaire par un système polaire qui ne possède pas de courbe directrice. Les théorèmes de Desargues et de Sturm subsistent aussi dans le domaine imaginaire.

A. Ramorino a donné un exposé d'ensemble des théories géométriques des imaginaires et indiqué une bibliographie plus complète[118]).

112) Math. Ann. 9 (1876), p. 333.

113) Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, (2e éd.) Leipzig 1875; (3e éd.) 3, Leipzig 1888, p. 67 et suiv.

114) Lezioni di geometria proiettiva, Bologne 1898; (2e éd.) Bologne 1904; (3e éd.) Bologne 1909; trad. allemande par *H. Fleischer*, Leipzig 1903, suppl. IV, V.

115) Le coppie di elementi imaginari nella geometria projettiva sintetica [Mem. Accad. Torino (2) 38 (1888), p. 3/24 [1886]].

116) *Deux correspondances univoques sont dites permutables lorsque chacune d'elles est transformée en elle-même par l'autre. Pour deux involutions ce n'est possible que lorsque les deux couples représentés par ces correspondances sont harmoniques.*

16. Extensions ultérieures. Configurations hyperalgébriques et éléments bicomplexes. Représentons la totalité des ∞^{2r} éléments complexes d'une forme fondamentale F de rang r (et aussi d'une variété quelconque à r dimensions) par une configuration réelle Φ_{2r} d'un nombre de dimensions double. C'est ce que l'on fait, par exemple, dans le cas d'une forme de rang un en recourant au plan réel ou à la sphère. Nous pouvons alors considérer dans Φ_{2r} des configurations quelconques G_k composées de $\infty^k (k<2r)$ éléments réels, et chercher leurs représentations g_k sur la forme F; elles seront composées de ∞^k éléments complexes[119]). Ces configurations g_k seront non seulement des lignes, des surfaces, etc., mais encore nombre d'autres configurations, dont l'exemple le plus simple (pour $r=1$, $k=1$) est donné par les *chaînes* de *K. G. Chr. von Staudt* [n° **15**][120]). C'est là un vaste programme, qui fut esquissé et développé jusqu'à un certain point par *C. Segre*[121]).

117) *Étant donnée une projectivité quelconque, si l'on prend le conjugué harmonique de chaque élément par rapport aux deux éléments qui lui correspondent dans la projectivité donnée et dans son inverse, cet élément lui sera conjugué dans une involution bien déterminée: involution unie (involuzione unita). En partant de la projectivité
$$axy + bx + cy + d = 0$$
on arrive à l'involution
$$axy + \frac{b+c}{2}(x+y) + d = 0.\text{*}$$

118) Gli elementi imaginari nella geometria [Giorn. mat. (2) 4 (1897), p. 242; (2) 5 (1898), p. 317]. *Voir aussi *Cl. Servais*, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 49 (1896), mém. n° 3, p. 3/64 [1893]; 52 (1894/5), mém. n° 2, p. 3/51 [1894].*

119) C'est-à-dire d'éléments dont l'ensemble peut être rapporté, d'une façon continue, au système des valeurs de k nombres réels variables.

120) Beiträge zur Geometrie der Lage 2, Nuremberg 1857, p. 137 (§ 15).

121) Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici [Math. Ann. 40 (1892), p. 413]; Un nuovo campo di recerche geometriche [Atti Accad. Torino 25 (1889/90), p. 276, 430; 26 (1890/1), p. 35, 592]. Concernant ces derniers travaux, voir le n° **18**.

On peut souvent obtenir, d'une forme fondamentale *imaginaire* F, une représentation réelle Φ_{2r}, en choisissant, comme représentation de chacun des éléments complexes de F, l'élément réel unique d'espèce déterminée qui lui appartient; par exemple, en choisissant pour chaque point la droite réelle qui le joint à son imaginaire conjugué. Comme représentations réelles les plus importantes d'une forme de rang un, on obtient:

1°) *l'ensemble des points réels d'un plan réel*[122]);

2°) *la congruence linéaire de droites à directrices imaginaires conjuguées*;

3°) *la surface du second degré non réglée*, en particulier *la sphère* (*reelle*)[123]).

D'après le même principe, on peut construire, dans les espaces à plusieurs dimensions, des représentations réelles des formes fondamentales de rang deux et au-dessus[124]).

Les g_k mentionnés ci-dessus sont nommés „fils" (fili, Fäden), pour $k = 1$, „tissus" (tele, Gewebe) pour $k = 2$, etc. Une „ligne" (ou un système réglé, etc.) de la forme fondamentale F est donc un tissu particulier, une surface est un g_4 particulier; quant aux chaînes de *K. G. Chr. von Staudt*, ce sont des fils.

Dans le cas de k impair, nous avons affaire à des figures qui ne s'étaient pas présentées jusqu'ici en géométrie. Si la configuration réelle G_k est algébrique (ce qui arrive toujours quand g_k est algébrique, mais non réciproquement), on dit que g_k est une configuration *hyperalgébrique* (et cette définition est indépendante de l'espèce particulière de Φ_{2r} que l'on a choisie pour représenter la forme fondamentale F); les configurations algébriques sont donc comprises parmi les hyperalgébriques. On désigne aussi sous le nom de „correspondances hyperalgébriques" celles qui sont représentées sur Φ_{2r} par des correspondances algébriques.

Si l'on veut étudier les intersections des configurations hyperalgébriques g_k, en particulier si l'on veut établir pour ces configurations la notion d'*ordre*, il paraît naturel d'étendre aux g_k les notions et les théorèmes correspondants relatifs à leurs représentations algébriques G_k. Mais une difficulté se présente alors: jusqu'ici on n'a considéré dans les G_k que les éléments réels, tandis que les théorèmes qu'il faut faire intervenir n'ont leur pleine validité que dans le domaine complexe; de là des cas d'exception, des théorèmes imprécis et compliqués.

Ces difficultés peuvent être écartées en étendant encore la notion d'éléments. On considère Φ_{2r} et G_k, supposées réelles jusqu'ici, comme comprenant l'ensemble de tous leurs éléments aussi bien réels que complexes, et l'on fait correspondre à ces éléments complexes de nouveaux éléments de la forme F et de g_k, définis de façon convenable: ce sont les éléments „bicomplexes". Pour définir ceux-ci géométriquement, il n'y a qu'à étendre à la forme F une des définitions réelles des éléments complexes de Φ_{2r}. Ainsi dans un plan, par exemple, considéré comme la représentation réelle d'une droite complexe, un couple de points imaginaires conjugués peut être défini par un faisceau de cercles réels; de même nous définirons sur la droite complexe un couple de „points jumeaux bicomplexes" (*coppia di punti bicomplessi gemelli*) par un „faisceau de chaînes" sans éléments fondamentaux, ou encore par une involution sans éléments doubles sur l'une de ces chaînes. En faisant intervenir les deux sens dans la chaîne, on peut aussi séparer ce couple en ses deux éléments. *L'ordre d'une configuration hyperalgébrique* g_1 sur une ligne droite est alors égal à la moitié du nombre de ses points d'intersection avec une chaîne.

17. Développements analytiques correspondants. Nombres bicomplexes. Analytiquement, ces considérations reviennent à séparer chaque coordonnée d'un élément imaginaire de la forme fondamentale F, supposée complexe $x + yi$, en ses deux parties x, y, et à faire entrer toutes ces variables, en nombre double de celui des coordonnées primitives, d'une façon absolument quelconque dans les équations (ce qui revient à faire entrer dans les équations, en même temps que chaque coordonnée $x + iy$, la variable complexe conjuguée $x - iy$, considérée, elle aussi, comme variable indépendante[125]). Si les

122) Un cas particulier de cette représentation est celui des variables complexes $x + yi$ dans le plan, tel que l'ont conçu *C. Wessel*, *J. R. Argand* et *C. F. Gauss* [I 5, 3]. Cette génération du plan $x + yi$ se trouve aussi dans *F. Klein*, Riemannsche Flächen 1 (cours autographié) Göttingue 1891/2; réimpr. 1, Göttingue 1906, p. 267 et suiv.].

123) Dans les deux dernières représentations, il n'y a pas d'éléments fondamentaux, c'est-à-dire que la représentation de F par la forme Φ_{2r} est, sans exception, univoque. Dans la première représentation, il y a, au contraire, une droite réelle (dans le plan des variables complexes, la droite de l'infini) dont tous les points correspondent à un élément unique de la forme fondamentale.

124) Quelques ensembles de ce genre, analogues à la sphère de *B. Riemann* et *F. Neumann*, ont été indiqués par *C. Segre* dans un autre article [Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi, Rend. Circ mat. Palermo 5 (1891), p. 192]. Cf. en partic. n° 9.

125) Il en résulte que ces recherches peuvent être utiles partout où à côté de chaque variable complexe intervient la variable complexe conjuguée, ce qui arrive fréquemment dans la théorie des fonctions (par ex. dans la théorie des

équations considérées en x, y (ou en $x \pm iy$) sont algébriques, on a affaire à des configurations hyperalgébriques.

A l'introduction des éléments bicomplexes on peut faire correspondre une extension équivalente de la notion de nombre, en supposant que les deux parties x, y de chaque nombre complexe (c'est-à-dire de chaque coordonnée) $x + iy$ soient complexes elles aussi et de la forme

$$x = x_1 + hx_2, \qquad y = y_1 + hy_2,$$

h désignant une nouvelle unité imaginaire différente de $+i$ et de $-i$ et qui remplit également la condition $h^2 = -1$.

On a ainsi des nombres bicomplexes

$$x_1 + hx_2 + iy_1 + ihy_2$$

et si les règles ordinaires du calcul des nombres réels doivent conserver pour ces nombres leur validité, il faut que le système contienne des *racines de zéro*[126]) [I 5, **25**]; il y a même deux systèmes différents de ces racines de zéro, qui[127]) s'annulent les uns pour $h = +i$, les autres pour $h = -i$. Dans une forme de rang un il y a deux systèmes particuliers de fils, appelés „protofili", qui jouissent de la propriété suivante: les points bicomplexes d'un même „protofilo" ont toujours des coordonnées dont la différence est égale à une racine de zéro, de l'un ou de l'autre système[128]).

---

fonctions automorphes, celles de la représentation conforme, des surfaces minima). Cf. aussi n° **18.** En particulier, dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, les figures Φ_{2r} considérées plus haut [n° **16**] peuvent jouer le même rôle que le plan ou la sphère pour les fonctions d'une variable.

126) *Si l'on fait le produit de deux quantités bicomplexes z, t de la forme ci-dessus, le produit zt est une quantité bicomplexe de la même forme. En annulant cette dernière on obtient quatre équations que l'on peut considérer comme homogènes en x_1, x_2, y_1, y_2. Le déterminant des coefficients se met aisément sous une forme de somme de deux carrés ce qui conduit aux deux solutions

$$\begin{cases} x_1' = y_2' \\ x_2' = -y_1' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1' = -y_2' \\ x_2' = y_1'. \end{cases}$$

Chacune d'elles est donc alors une racine de zéro. Il y en a de deux formes

$$x_1 + hx_2 - ix_2 + ihx_1 \quad \text{et} \quad x_1 + hx_2 + ix_2 - ihx_1;$$

la première disparaît pour $h = i$, la seconde pour $h = -i$.*

127) *C. Segre* [Math. Ann. 40 (1892), p. 457 (n°s 29 à 31)].

128) Le système mentionné des nombres complexes supérieurs [I 5, **12** et suiv.] reçoit ainsi une interprétation géométrique directe. D'autres systèmes de nombres complexes ont été également appliqués en géométrie, dès *H. Grassmann* et *W. R. Hamilton*, en raison de ce fait que le calcul avec leur aide peut servir d'algorithme pour simplifier des formules et des développements analytiques. Une application de ce genre a été faite par *E. Study* qui a utilisé pour la représentation des lignes droites dans l'espace les „grandeurs duelles", c'est-à-dire trois nombres complexes de la forme $a + b\varepsilon$ considérées comme coordonnées homogènes avec l'hypothèse $\varepsilon^2 = 0$ [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 199 et suiv.; cf. article III 5]. Voir aussi *J. Grünwald*, Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie [Monatsh. Math. Phys. 17 (1906), p. 81].

Comme conséquence immédiate de l'introduction des éléments et des nombres bicomplexes, nous ne sommes plus tenus de nous borner aux figures g_k de la forme fondamentale F dont les représentations correspondantes G_k dans Φ_{2r} sont réelles; nous pouvons choisir à l'intérieur de Φ_{2r} des figures complexes quelconques (en particulier algébriques) et étudier leurs représentations dans F; elles seront bicomplexes (en particulier hyperalgébriques). Nous arrivons ainsi à une „Géométrie bicomplexe générale" qui s'ajoute comme un troisième degré à la géométrie „réelle" et à la „géométrie complexe".

On se rend compte aussi qu'un passage comme celui des éléments et nombres complexes aux bicomplexes, et de la géométrie complexe à la géométrie bicomplexe, est susceptible d'être répété autant de fois qu'on le veut.

18. Étude directe des figures hyperalgébriques; leur relation avec les formes d'Hermite. *C. Segre*[129]) a étudié les configurations hyperalgébriques directement, au lieu de prendre pour point de départ leurs représentations réelles; et cela aussi bien analytiquement, c'est-à-dire par leurs équations, que par des considérations synthétiques; il s'est attaché surtout aux configurations qui peuvent être engendrées par des *correspondances hyperalgébriques*, en particulier par les correspondances „antiprojectives" qui jouent un rôle tout à fait analogue aux projectives.

Une correspondance univoque et continue entre deux configurations complexes de rang un, qui fait correspondre à tout jet harmonique un jet harmonique, n'est pas nécessairement homographique, puisqu'elle peut transformer un jet non „neutre" (c'est-à-dire non réel) en un jet de sens contraire (c'est-à-dire en son imaginaire conjugué)[130]). Dans ce cas la correspondance s'appelle *antiprojective*[131]). De même,

---

129) Un nuovo campo di ricerche geometriche [Atti Accad. Torino 25 (1889/90), p. 276, 430, 592; 26 (1890/1), p. 35].

130) *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 2, Nuremberg 1857, p. 147, § 16 (n° 225).

131) Sur la droite complexe il n'y a donc, en dehors des correspondances projectives et antiprojectives, aucune correspondance continue transformant les jets harmoniques en jets harmoniques. La question de savoir si la continuité de la relation peut aussi dans le domaine complexe se déduire de la propriété harmonique a été soulevée par *C. Segre* [Atti Accad. Torino 25 (1889/90), p. 288], mais elle est jusqu'ici restée sans réponse.

dans les configurations de rang supérieur les correspondances antiprojectives se distinguent des projectives uniquement par ce fait que les jets correspondants non neutres sont d'espèces contraires[132]). Les théorèmes relatifs à la détermination des correspondances projectives par trois, quatre, cinq couples d'éléments correspondants en position générale, ainsi que les constructions les plus simples, peuvent être immédiatement étendus aux correspondances antiprojectives; il se présente au contraire des différences en ce qui concerne les éléments doubles. L'étude des „antiinvolutions" (c'est-à-dire des correspondances antiprojectives qui se confondent avec leurs inverses) [cf. n^os **11** et suiv.] conduit à la généralisation de la notion de „chaîne" de *K. G. Chr. von Staudt*; *une chaîne d'espèce r* est, au point de vue de la géométrie projective, identique à l'ensemble des éléments réels d'une forme fondamentale réelle de rang *r*.

Ces correspondances (mais non les antipolaires, dont il va être question) avaient été étudiées peu de temps auparavant par *C. Juel*[133]) sous le nom de „symétralités"; mais les recherches de *C. Segre* sont indépendantes de celles de *C. Juel* et plus approfondies.

*Elles ont été poursuivies par *G. Sforza*[134]).*

Les correspondances „antipolaires" du plan et de l'espace engendrent les „hyperconiques" et les „hypersurfaces du second degré"[135]) qui comprennent l'ensemble (∞^3 ou ∞^5) des points autoréciproques de la forme fondamentale, quand il en existe.

On peut former avec ces figures des faisceaux et des systèmes linéaires supérieurs dont les éléments peuvent être engendrés dans certains cas, mais non toujours, par des faisceaux antiprojectifs de droites ou de plans; c'est là une nouvelle différence par rapport à la géométrie projective.

Au contraire la théorie des transformations linéaires qui transforment en elle-même une hyperconique ou une hypersurface du second degré (c'est-à-dire les antipolarités qui les définissent) se rattache assez étroitement à la géométrie projective des sections coniques et des surfaces du second degré[136]).

Analytiquement, ce sont les transformations linéaires automorphes,

132) *C. Segre,* Atti Accad. Torino 26 (1890/1), p. 592.

133) Bidrag til den imaginäre Linies og den imaginäre Plans Geometri, Diss. Copenhague 1885; Über einige Grundgebilde der projectiven Geometrie, Acta math. 14 (1890/1), p. 1.

134) *Giorn. mat. (1) 30 (1892), p. 159/87 (Texte et note de *G. Loria*).*

135) *C. Segre,* Atti Accad. Torino 26 (1890/1), p. 592.

136) Cf. III 18, **36**, **37** et III 4.

étudiées à nouveau plus tard par *A. Loewy*[137]), d'une forme d'Hermite, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire

$$\sum_{(i,k)} a_{ik} x_i \bar{x}_k$$

à variables et coefficients complexes conjugués, en sorte que l'on ait

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki};$$

les groupes qui en résultent ont été indiqués par *G. Fubini*[138]) et *E. Study*[139]).

Comme applications de ces notions, nous pouvons citer les suivantes:

1°) *G. Fubini*[140]) et *E. Study*[141]) ont fondé sur les formes d'Hermite une sorte de détermination métrique projective[142]) analogue à celle fondée sur les formes quadratiques; et en particulier une *détermination métrique hermitienne elliptique* et une *détermination hyperbolique*, en prenant comme base une forme d'Hermite définie positive

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

ou une forme indéfinie du type

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_{n-1}\bar{x}_{n-1} - x_n\bar{x}_n,$$

enfin une *détermination parabolique* comme cas limite des précédentes. Dans les deux premiers cas, les homographies (collinéations) et antihomographies (anticollinéations) qui transforment en lui-même le système polaire de *Ch. Hermite* peuvent être interprétées les unes comme mouvements hermitiens, les autres comme des „opérations de seconde espèce" qui laissent de même invariable la „distance" de deux points, convenablement définie. Comme cas limites de ces transformations, on obtient les mouvements hermitiens paraboliques et des opérations de seconde espèce correspondantes. En séparant les variables imaginaires en leurs éléments réels, on peut regarder ces groupes d'opérations de *Ch. Hermite* comme des groupes projectifs d'espaces supérieurs.

137) Math. Ann. 50 (1898), p. 557; Nova Acta Acad. Leopold. 71 (1898), n° 8; Math. Ann. 52 (1899), p. 588.

138) Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tali forme [Atti Accad. Gioenia Catania (4) 17 (1904), mém. n° 4; en partic. p. 36 et suiv.]; Sulle metriche definite da una forma Hermitiana [Atti Ist. Veneto (8) 6 (1903/4), p. 501].

139) Kürzeste Wege im komplexen Gebiet [Math. Ann. 60 (1905), p. 321]. Voir aussi Verhandl. des 3. internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, publ. par *A. Krazer*, Leipzig 1905, p. 513.

140) Atti Accad. Gioenia Catania (4) 17 (1904), mém. n° 4; Atti Ist. Veneto (8) 6 (1903/4), p. 501.

141) Math. Ann. 60 (1905), p. 321; Verhandl.[139]) 3. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, p. 313.

142) Cf. III 5.

2°) *Applications à la théorie des fonctions.* Les fonctions „hyperfuchsiennes" à deux variables étudiées par *E. Picard*[143]) admettent des groupes de transformations linéaires à coefficients entiers, que l'on peut regarder comme des homographies du plan avec une hyperconique invariante. Et de même que *F. Klein* et *R. Fricke*[144]) ont défini les domaines fondamentaux des groupes proprement discontinus de transformations linéaires d'une variable, en particulier des groupes à cercle principal, qui sont assimilables aux groupes projectifs d'une forme complexe de rang un avec une chaîne invariante, de même *G. Fubini*[145]) et *E. Study*[146]) ont établi la même notion pour les groupes discontinus avec une forme d'Hermite invariante; et *G. Fubini* a aussi démontré l'existence de fonctions hyperfuchsiennes correspondantes. Ces groupes (dont quelques-uns se laissent caractériser d'une manière simple par l'arithmétique) peuvent être étendus, comme dans le cas d'une variable, par des opérations de seconde espèce. Bien qu'en grande partie le cas de $n = 2$ variables soit seul envisagé, la dernière méthode s'applique à n quelconque. Plus tard, *A. Hurwitz*[147]) s'est occupé d'établir, d'une façon générale, un domaine fondamental pour un groupe donné de transformations linéaires de plusieurs variables. Les groupes discontinus considérés par *G. Fubini*, qui transforment en lui-même un système de formes d'Hermite, reçoivent d'autres applications dans le cas des fonctions qui comportent des transformations linéaires de variables distinctes ou de séries distinctes de variables[148]).

3°) *Applications à la théorie des nombres.* La théorie de l'équivalence et la réduction des formes binaires de Lejeune Dirichlet [I 16, **26**]

143) Acta math. 1 (1882/3), p. 297; 2 (1883), p. 114; 5 (1884/5), p. 121; Ann. Éc. Norm. (3) 3 (1886), p. 357; Essai d'une extension à n variables par *W. Wirtinger*, Sitzgsb. Akad. Wien 108 IIᵃ (1899), p. 1239.

144) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen 1, Leipzig 1890; 2, Leipzig 1892; Vorlesungen über automorphe Funktionen 1, Leipzig 1897; 2, Leipzig 1901 (livre 1). Voir aussi II 12.

145) Atti Accad. Gioenia Catania (4) 17 (1904), mém. n° 4; Applicazioni analitiche dei gruppi di projettività trasformanti in sè una forma Hermitiana, Atti Accad. Gioenia Catania (4) 17 (1904), mém. n° 9.

146) Math. Ann. 60 (1905), p. 321; Verhandl.[139]) 3. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, p. 313.

147) Math. Ann. 61 (1905), p. 325.

148) Ces applications sont dues à *E. Picard* [J. math. pures appl. (4) 1 (1885), p. 87] et *H. Bourget* [Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 12 (1898), mém. n° 4, p. 1]; un cas particulier inspiré par *D. Hilbert* est envisagé par *O. Blumenthal*, Math. Ann. 56 (1903), p. 509; 58 (1904), p. 497; Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 13 (1904), p. 120. Voir aussi *G. Fubini*, Ann. mat. pura appl. (3) 10 (1904), p. 1; (3) 11 (1905), p. 159, en partic. p. 184 (§ 8).

et des formes hermitiennes [I 16, **28**] à coefficients complexes entiers, telle qu'elle a été développée par *G. Lejeune Dirichlet*, *Ch. Hermite*, *E. Picard*, *F. Klein*, *R. Fricke* et *L. Bianchi*, peut, d'après *A. Lœwy* et *G. Fubini*[149]), être étendue aux formes d'Hermite à plusieurs variables, en prenant pour base la considération des groupes qui les reproduisent et des domaines fondamentaux de ces derniers.

Théorie générale des courbes et surfaces algébriques.

19. Théorie analytique des courbes planes algébriques. La théorie des courbes planes algébriques d'ordre supérieur au second [III 19] a déjà été abordée au 17ième siècle par *I. Newton*[150]) qui donna trois théorèmes généraux sur les courbes algébriques, puis au 18ième siècle par *C. Maclaurin*[151]), *L. Euler*[152]) et *G. Cramer*[153]). Plus tard, *G. Lamé*[154]), *J. V. Poncelet*[155]) et *E. Bobillier*[156]) ont traité des questions particulières[154]).

Jusqu'au milieu du 19ième siècle, ces courbes furent surtout traitées analytiquement, et cela n'est pas étonnant, puisque la notion fondamentale de „courbe algébrique" et celle d'„ordre" peuvent être établies très simplement par l'analyse, tandis que la notion générale de courbe algébrique manquait aux géomètres qui se plaçaient au point de vue de la géométrie synthétique, et que la notion d'ordre d'une courbe algébrique ne devint accessible à la géométrie pure, d'une façon vraiment rigoureuse, qu'après l'introduction des éléments imaginaires [n° **14**].

149) Ann. mat. pura appl. (3) 10 (1904), p. 1; (3) 11 (1905), p. 159.

150) Enumeratio linearum tertii ordinis, Londres 1704 (en appendice à la première édition anglaise du traité d'Optique de *I. Newton*); Opera, éd. *S. Horsley* 1, Londres 1779, p. 531. Cet ouvrage a peut-être été rédigé dès 1678; cf. *W. W. Rouse Ball*, Proc. math. Soc. London (1) 22 (1890/1), p. 104/43; Bibl. math. (2) 5 (1891), p. 35/40.

151) Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, Londres 1720; De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus, appendice à: A treatise of algebra, Londres 1748; trad. *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, Mélanges de géométrie pure, Paris 1858, p. 197/261.

152) Introductio in analysin infinitorum 2, Lausanne 1748; trad. *J. B. Labey*, Introduction à l'analyse infinitésimale 2, Paris an V.

153) Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750.

154) Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818; (2ᵉ éd.) fac-simile de la première, Paris 1903; on doit à *G. Lamé* la proposition connue sous le nom de „principe de Lamé".

155) *J. V. Poncelet* [Ann. math. pures appl. 8 (1817/8), p. 213] envisage les courbes de classe n.

156) *E. Bobillier* [id. 18 (1827/8), p. 89, 157, 253; 19 (1828/9), p. 106, 138, 302] étudie la théorie des polaires.

A. F. Möbius[157]) a considéré les courbes décrites par un point variable

$$fA + gB + hC,$$

où f, g, h désignent des fonctions entières quelconques de degré n d'un même paramètre. Mais dans le cas où $n > 2$, ces courbes ne sont pas les courbes les plus générales d'ordre n, comme *A. F. Möbius* l'a d'ailleurs reconnu lui-même; on n'obtient ainsi, en effet, que des courbes rationnelles [III 20 et III 21].

La théorie générale analytique des courbes planes algébriques remonte à *J. Plücker*. C'est à lui que l'on doit la notion d'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles[85]). Il a donné aussi[158]) une théorie complète et une classification des courbes planes du troisième ordre ainsi que des indications sur les courbes de troisième classe *(la notion de classe avait été introduite par *J. D. Gergonne*)*; on y voit déjà une méthode générale pour étudier les courbes d'ordre supérieur, au sujet desquelles il établit[159]) quelques théorèmes généraux, entre autres celui qui concerne le nombre des points d'inflexion d'une courbe d'ordre n. Il reprit plus tard ces recherches[160]) et obtint plusieurs nouveaux résultats. Nous signalerons surtout ici:

1°) ses *théorèmes sur les points d'intersection*[161]) dans lesquels il établit les relations entre les mn points d'intersection de deux courbes algébriques d'ordres m et n[162]), relations dont il se sert pour étudier les „branches infinies" des courbes planes et leurs asymptotes;

2°) la théorie *des points singuliers*, en particulier les relations entre les nombres des singularités d'une courbe quelconque, auxquelles on a donné le nom de *formules de Plücker*[163]);

157) Der baryc. Calcul[46]), p. 80 et suiv.; Werke 1, p. 90 et suiv.

158) System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, troisième partie.

159) Id. § 6, en partic. p. 264.

160) Theorie der algebraischen Curven gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie, Bonn 1839.

161) Alg. Kurven[160]), p. 7/13 (Einleitende Betrachtungen). Voir aussi Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 97.

162) Déjà *L. Euler* et *G. Cramer* [cf. *Charlotte A. Scott*, Bull. Amer. math. Soc. 4 (1897/8), p. 260/73] avaient abordé cet ordre de recherches que *C. G. J. Jacobi* [J. reine angew. Math. 15 (1836), p. 285; Werke 3, Berlin 1884, p. 329] devait reprendre plus tard.

163) Alg. Kurven[160]), p. 207 (section 2, § 4). Les formules de Plücker sont établies [p. 211 (n° 68)] dans le cas où la courbe considérée ne possède que des points doubles et des points de rebroussement, des tangentes doubles et des tangentes d'inflexion; mais il y a déjà quelques indications concernant le cas où la courbe possède des singularités d'ordre supérieur.

3°) la discussion et l'énumération des différentes courbes planes du quatrième ordre [cf. III 20].

J. Plücker n'envisage ordinairement que le „cas général", et dans ses démonstrations il se contente souvent de compter les constantes figurant dans les équations envisagées; il faut donc presque toujours reprendre et compléter ses démonstrations[164]).

Dès 1844, *L. O. Hesse*[165]) montra comment on peut se servir systématiquement de la théorie des équations algébriques pour établir une théorie générale des courbes et des surfaces. L'usage magistral qu'il fit des déterminants, que l'algèbre avait désormais à son entière disposition, lui permit de donner à toutes ses considérations et démonstrations une élégance tout à fait remarquable. On reconnut ainsi qu'un grand nombre de vérités géométriques n'étaient que la traduction immédiate de certaines *identités algébriques;* ce fait a trouvé plus tard de nombreuses applications dans la géométrie analytique, et surtout dans la théorie des invariants[166]).

On doit en particulier à *L. O. Hesse*[167]) une étude approfondie des points d'inflexion et des tangentes doubles des courbes planes[168]); les points d'inflexion y apparaissent pour la première fois comme les points d'intersection de la courbe donnée avec sa „hessienne" dont l'équation est obtenue sous la forme bien connue de déterminant[118]). Le traité de *G. Salmon*[169]), paru en 1852, a beaucoup contribué à

164) Au sujet des compléments à apporter aux démonstrations ne reposant que sur l'énumération des constantes, voir *E. Lasker*, Math. Ann. 58 (1904), p. 434.

165) La plupart de ces articles sont publiés dans le Journal für reine und angewandte Mathematik de 1844 à 1860 et sont reproduits dans *L. O. Hesse*, Werke, Munich 1897.

166) *W. F. Meyer* [Ueber das Wesen mathematischer Beweise; Verhandl.[139]) 3. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, p. 667] a récemment appelé l'attention sur ce point; et, dans une série de travaux cités dans cet article, il a bien montré l'utilité du „principe d'identité". Voir aussi *W. F. Meyer*, Monatsh. Math. Phys. 18 (1907), p. 138; Sitzgsb. Akad. Wien 116 II^a (1907), p. 669; Archiv Math. Phys. (3) 12 (1907), p. 1, 151; Ber. Ges. Lpz. 59 (1907), math. p. 229. Le principe de la méthode consiste à exprimer complètement les propriétés fondamentales de certaines figures par des identités, en particulier par l'évanouissement identique d'invariants simultanés des éléments donnés. L'avantage de cette méthode dont la portée est bien plus grande que celle de *L. O. Hesse*, consiste en ce qu'elle est applicable à tous les cas particuliers et limites, dans la mesure où ils sont compatibles avec les conditions de la figure

167) J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 276/7; Werke, Munich 1897, p. 268/70.

168) *J. Steiner avait déjà étudié par la géométrie pure les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre.*

169) A treatise on higher planes curves, (1re éd.) Dublin 1852; (2^e éd.) Dublin

répandre ces études. On trouvera certains détails relatifs au développement de cette théorie dans l'article III 19; les résultats de *A. Clebsch*, qui se plaça à un point de vue plus avancé, seront mentionnés aux n^os **22** et **31** de l'article actuel. Tous ces travaux ont été réunis plus tard, avec de nouveaux développements, dans un traité publié par *F. Lindemann*[170]).

20. Surfaces. La tendance à la généralisation, par laquelle s'est manifestée l'influence de l'analyse sur les recherches géométriques, devait nécessairement conduire à étudier les figures de l'espace qui présentent de l'analogie avec les courbes planes. Cela pouvait se faire dans deux directions différentes. Si l'on remarque qu'une courbe plane est représentée par une équation entre les coordonnées d'un point du plan, on est amené à envisager comme figures plus générales les *surfaces*, chaque surface étant représentée par une équation entre les coordonnées d'un point dans l'espace. En regardant au contraire une courbe plane comme une suite continue de ∞^1 points, on peut généraliser la théorie en n'imposant plus à ces points la condition d'être situés dans un plan: on est alors amené à la théorie des *courbes gauches* ou *à double courbure*.

La théorie analytique des surfaces se rattache au début assez étroitement à celle des courbes planes. Certaines questions élémentaires peuvent être traitées simultanément pour les courbes planes et pour les surfaces; mais dans des questions moins simples la théorie des surfaces reste souvent en arrière, les moyens dont elle dispose n'étant pas aussi perfectionnés.

*L'étude des surfaces du second ordre, commencée par *G. Monge*, continuée par *M. Chasles* et *E. Bobillier*, a été développée surtout par *L. O. Hesse*, puis par *P. Serret*[8]) qui, suivant la voie de *E. Bobillier*, établit sans effort de nombreuses propriétés et constructions de courbes et de surfaces du second ordre.

L'étude des surfaces du troisième ordre a été poursuivie systématiquement et analytiquement par *J. Steiner*, *A. Cayley* et *L. Cremona*, celle de certaines surfaces du quatrième ordre, à points ou à lignes multiples (surface des ondes, surface de Steiner), par *J. Steiner*, *E. E. Kummer*, *A. Cayley*, *Th. Moutard*, *E. N. Laguerre* et *L. Cremona*, enfin celle des surfaces réglées par *M. Chasles*, *A. Cayley*, *L. Cremona*, *G. Salmon* et *J. Maillard de la Gournerie*.

1873; trad. par *O. Chemin*, Géom. analyt. des courbes planes, (2^e éd.) Paris 1903; trad. allemande par *W. Fiedler*, (1^re éd.) Leipzig 1873; (2^e éd.) Leipzig 1882.

170) *A. Clebsch*, Vorles. über Geometrie, publ. par *F. Lindemann*, (1^re éd.) 1, Leipzig 1876; (2^e éd.) 1¹ I, Leipzig 1906; (1^re éd.) 2¹, Leipzig 1891.

Dans un ordre d'idées un peu différent, *M. Chasles* a obtenu ses beaux théorèmes sur le déplacement d'un corps solide et *L. Poinsot* a développé la théorie de la rotation d'un corps. Enfin, par une méthode un peu particulière, *A. Mannheim* a étudié la surface des ondes, le déplacement d'une figure de forme invariable et les surfaces réglées.*

Pour les surfaces d'ordre quelconque, *J. D. Gergonne*[171]) et *M. Chasles*[172]) établirent déjà certaines propriétés; *J. V. Poncelet*[173]) détermina la classe de la surface algébrique générale du $n^{\text{ième}}$ ordre, tandis que *J. Plücker*[174]) et *C. G. J. Jacobi*[162]) donnaient des théorèmes sur les points d'intersection. *G. Salmon* et *A. Cayley* apportèrent ensuite à cette théorie des contributions importantes; c'est au premier, en particulier, que nous devons un exposé d'ensemble de la théorie des surfaces[175]).

Pour les détails et le développement ultérieur concernant cette théorie, cf. III 23.

21. Courbes algébriques gauches. Les courbes gauches du quatrième ordre et de première espèce ont d'abord été étudiées par les méthodes de la géométrie descriptive en les considérant comme intersections de deux surfaces du second ordre, en particulier de cônes ou de cylindres[176]); *J. N. P. Hachette*[177]) envisage aussi le cas où cette intersection se décompose en une droite et une courbe du troisième ordre.

A. F. Möbius[178]) a représenté par des expressions barycentriques

$$pA + qB + rC + sD$$

à un paramètre variable, les courbes rationnelles gauches d'ordre quelconque, étudiant en particulier le cas le plus simple, celui de la courbe gauche du troisième ordre.

171) Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 255.

172) Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie [Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, (2^e éd.) Paris 1875, p. 627/33, 722 et suiv.].

173) Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques [J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 30].

174) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 129; J. reine angew. Math. 16 (1837), p. 47; System der Geom. des Raumes[86]), p. 36 (introduction § 3) [cf. note 33].

175) *G. Salmon*, A treatise on the analytical geometry of three dimensions, (1^re éd.) Dublin 1862; (4^e éd.) Dublin 1882; trad. *O. Chemin*, Traité de géométrie analytique à trois dimensions, (1^re éd.) 1, Paris 1882; 2, Paris 1891; 3, Paris 1892; (2^e éd.) 1, Paris 1899; 2, Paris 1903; trad. *W. Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes, (1^re éd.) 1, Leipzig 1863; 2, Leipzig 1865; (4^e éd.) 1, Leipzig 1898; (3^e éd.) 2, Leipzig 1880.

176) *G. Monge*, Géom. descriptive[14]), chap. 3.

177) Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 368.

178) Der baryc. Calcul[46]), p. 114; Werke 1, p. 116.

Mais les recherches concernant les propriétés générales des courbes algébriques gauches ont présenté de grandes difficultés. Ce n'est que fort tard que l'on a reconnu qu'une courbe gauche n'est pas toujours l'intersection complète de deux surfaces[179]), et que par suite deux (ou même trois) équations ne suffisent pas toujours à la représenter analytiquement[180]), tandis que quatre équations suffisent toujours; que même la considération simultanée de l'ordre et des points doubles éventuels ne suffit pas non plus pour établir une classification des courbes gauches, car il y a déjà deux espèces de courbes gauches du quatrième ordre sans points doubles[181]); enfin que, à partir du neuvième ordre, même l'adjonction du nombre des points doubles apparents ne permet pas d'établir une classification complète de ces courbes[182]). La théorie générale et la classification des courbes algébriques ne pouvaient donc offrir une analogie complète avec les théories précédentes.

Des résultats essentiels concernant les courbes algébriques gauches sont cependant dûs à *A. Cayley.* En 1845, il établit les relations, analogues à celles de Plücker, existant entre les nombres des singularités d'une courbe gauche[183]). Pour représenter ces courbes analytiquement, il les considéra d'une part comme intersection d'une „monoïde“ (c'est-à-dire d'une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre ayant un point multiple d'ordre $n-1$) et d'un cône, qui n'ont en outre en commun qu'un certain nombre de droites[184]); et d'autre part il eut recours à l'équation

179) *A. Cayley,* Note sur les hyperdéterminants [J. reine angew. Math. 34 (1847), p. 148; en partic. p. 152; Papers 1, p. 352].

180) *L. Kronecker,* Festschrift zu E. E. Kummers 50. Doktorjubiläum, September 1881, éd. Berlin 1882 [Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen]; J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 27; *J. Molk,* Thèse, Paris 1884, p. 107; Acta math. 6 (1885), p. 107; *K. Th. Vahlen,* J. reine angew. Math. 108 (1891), p. 346.

181) *G. Salmon,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 53; *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 133/41 en partic. p. 138; Werke 2, Berlin 1882, p. 651/9 en partic. p. 656.

182) La courbe la plus générale d'ordre 9 et de genre 10 (avec 18 points doubles apparents, et dépendant de 36 constantes) peut être de deux espèces différentes: soit une courbe (3,3) intersection de deux surfaces du $3^{\text{ième}}$ ordre, ou une courbe (2,6) intersection d'une quadrique et d'une surface du $6^{\text{ième}}$ ordre avec trois cordes six-sécantes (dont chacune s'appuie sur six points de la courbe) comme intersection restante. Voir à ce sujet les études de *G. H. Halphen* [J. Éc. polyt. (1) cah. 52 (1882), p. 166] et de *M. Nöther* [Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven, Abh. Akad. Berlin 1882, Phys.-math. Klasse, math. Abh.; Extraits: J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 101].

183) J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 245; Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 18.

184) C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 55, 396, 672; id. 58 (1864), p. 994; Papers 5, Cambridge 1892, p. 7, 24.

du complexe formé par toutes les droites rencontrant la courbe considérée[185]).

Deux mémoires fondamentaux de *G. H. Halphen*[186]) et *M. Nöther*[187]), couronnés en 1882 par l'académie de Berlin, marquèrent ensuite un véritable progrès dans la théorie des courbes algébriques gauches, dont l'étude fera l'objet de l'article III 25[188]).

22. Rapports avec la théorie des invariants. La *théorie des formes algébriques* ou *théorie des invariants* [I 11] doit une impulsion importante aux recherches analytiques sur la géométrie projective des courbes et surfaces algébriques; elle eut à son tour, par son développement ultérieur, une grande part au perfectionnement de la théorie analytique des figures algébriques. On concevait bien qu'on pourrait représenter les propriétés métriques d'une figure quelconque par des formules ou des équations invariantes par rapport aux transformations linéaires des variables, qui correspondent aux transformations de coordonnées; et leurs propriétés projectives par des formules ou équations invariantes par rapport à une transformation linéaire tout à fait générale. Le rapport anharmonique en fournissait l'exemple le plus simple. La théorie des courbes planes algébriques avait aussi conduit à plusieurs figures (courbes de Hesse, de Steiner, de Cayley) [III 19, 7], qui ont une relation invariante avec une courbe donnée. *Les polaires de *E. Bobillier* avaient conduit *G. Boole* à la première notion du covariant.* La question surgit alors de savoir quelles formations invariantes peuvent se déduire, en général, d'une équation ou d'une forme algébrique donnée, et comment.

En partant d'autres points de vue, dès 1845 environ, plusieurs mathématiciens anglais, en particulier *A. Cayley, G. Salmon, J. J. Sylvester,* et d'autre part aussi *Ch. Hermite* et *F. Brioschi* [Cf. I 11] avaient fourni d'importantes contributions à cette question, lorsqu'en 1858 *S. Aronhold,* dans ses recherches sur la forme cubique ternaire[189]), mit en plein relief les rapports de ce domaine avec la géométrie projective. Il exposa un peu plus tard[190]) ses idées sous une forme plus

185) Quart. J. pure appl. math. 3 (1860), p. 225; id. 5 (1862), p. 81; Papers 4, Cambridge 1891, p. 446, 490.

186) Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques [J. Éc. polyt. (1) cah. 52 (1882), p. 1].

187) Alg. Raumkurven[182]); J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 271/318.

188) *G. Salmon* [Analyt. geom. of three dimensions[175]); trad. *O. Chemin* 2] consacre plusieurs chapitres à la théorie des courbes algébriques gauches.

189) J. reine angew. Math. 55 (1858), p. 79.

190) Id. 62 (1863), p. 281.

générale. Après lui, *A. Clebsch*[191]) reprit ces recherches algébrico-géométriques, et se rattachant aux mathématiciens anglais, ayant aussi recours très souvent à la théorie des déterminants (et en particulier au théorème de la multiplication des déterminants), il arriva à concevoir les problèmes généraux sur les courbes et les surfaces algébriques du véritable point de vue de la théorie des invariants. *La théorie des invariants fournit un principe général*, qui avait manqué jusqu'alors, *permettant de découvrir des vérités géométriques par voie analytique*, puisqu'elle donne des méthodes générales [Cf. I 11] pour déduire d'une forme donnée f ses invariants et covariants; en annulant ceux-ci, on obtient exclusivement et complètement les équations qui expriment des propriétés projectives de la figure $f = 0$ et celles qui représentent d'autres figures liées projectivement à $f = 0$ [III 5].

23. Génération géométrique des courbes et des surfaces par Grassmann. Dans la géométrie synthétique, on n'a pu que difficilement s'élever à la notion générale de courbe algébrique; aussi, pendant longtemps, les théories „géométriques" des courbes et surfaces ne furent pas purement synthétiques. Elles furent aussi le plus souvent incomplètes.

H. Grassmann[192]) remarqua en 1846 que la géométrie projective ordinaire suffit bien à la théorie générale des courbes du second ordre, mais qu'elle ne suffit plus pour les courbes d'ordre supérieur, parce qu'on n'arrive, au moyen de la génération par formes projectives, qu'à des courbes particulières. Pour la génération des courbes les plus générales d'ordre n il établit le théorème fondamental suivant (énoncé dès 1844 dans son „Ausdehnungslehre") [cf. III 19]:

Si un point mobile X d'un plan se déplace de telle façon qu'un point et une droite, déduits de ce point X et d'une série de points et de droites fixes par des constructions linéaires, soient incidents (c'est-à-dire que le point se trouve sur la droite) le point X décrit une courbe algébrique; la courbe est d'ordre n, si dans ces constructions le point mobile est employé n fois[193]).

Il énonce aussi le théorème par dualité, concernant la génération

191) Cf. Math Ann. 7 (1874), p. 13 et suiv.

192) Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse [J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 111; Werke 2^1, publ. par *E. Study, G. Scheffers* et *F. Engel*, Leipzig 1904, p. 49].

193) Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844; (2e éd.) Leipzig 1878, §§ 145/9; Werke 1^1, publ. par *F. Engel*, p. 245 et suiv.

d'une courbe de la $n^{\text{ième}}$ classe comme enveloppe d'une droite mobile dans le plan.

Dans un autre mémoire, *H. Grassmann*[194]) établit le théorème inverse, d'après lequel toute figure formée de points (ou de droites) du $n^{\text{ième}}$ ordre (ou de la $n^{\text{ième}}$ classe) peut être engendrée de la manière indiquée. La démonstration de ce théorème revient à déduire de l'équation $F(x, y) = 0$ de la courbe donnée une règle permettant de construire le mécanisme générateur. Les différentes générations sont discutées séparément pour les courbes du troisième et du quatrième degré[195]).

Pour les surfaces, il établit un théorème analogue[196]) où la condition qu'un point et une droite soient incidents est remplacée par la condition que deux droites obtenues par des constructions linéaires soient dans un même plan.

Mais ceci n'est encore qu'une „génération" géométrique des courbes générales d'un degré donné; leur „définition", ainsi que celle du degré, a toujours une base analytique. Même quand *H. Grassmann* engendre les courbes d'ordre $m + n$ par des faisceaux projectifs de courbes d'ordres m et n, et qu'il reconnaît que cette génération est toujours possible[197]), ce ne sont là que des recherches isolées, et il n'est pas encore question chez lui d'une théorie des courbes proprement dite.

J. Lüroth[198]) a montré dans sa théorie des jets que les courbes et surfaces de degré n de *H. Grassmann* sont rencontrées par toute droite en n points et que deux courbes de degrés m et n se coupent en mn points. On pourrait par conséquent établir une théorie géométrique des courbes planes algébriques en prenant comme définition leur génération d'après *H. Grassmann*, et en démontrant les théorèmes sur les intersections d'après *K. G. Chr. von Staudt* et *J. Lüroth*. Toutefois cette théorie n'a pas été développée. Il n'y serait, il est vrai, pas du tout question de relations métriques; mais il reste à savoir si une théorie qui a besoin du calcul des jets jusqu'aux problèmes d'élimination

194) J. reine angew. Math. 42 (1851), p. 187; Werke 2^1, publ. par *E. Study, G. Scheffers* et *F. Engel*, Leipzig 1904, p. 80.

195) J. reine angew. Math. 36 (1848), p. 177; 44 (1852), p. 1; 52 (1856), p. 254; Werke 2^1, p. 73, 109, 218.

196) J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 1 et diverses remarques jusqu'à la p. 65; Werke 2^1, p. 136/98.

197) Die höhere Projektivität und Perspektivität in der Ebene dargestellt durch geometrische Analyse [J. reine angew. Math. 42 (1851), p. 193]; Die höhere Projektivität in der Ebene dargestellt durch Funktionsverknüpfungen [id. p. 294]; Werke 2^1, p. 86, 89.

198) Math. Ann. 8 (1875), p. 145.

pourrait être appelée purement synthétique. *J. Lüroth*[199]) lui-même semble considérer la question ainsi posée comme non résolue.

24. Théories algébrico-géométriques. Cremona. Dans une communication présentée en 1848 par *J. Steiner*[200]) à l'académie de Berlin on trouve énoncés quelques théorèmes de la théorie des polaires des courbes planes, établis sans emploi de coordonnées et l'on voit en même temps apparaître les courbes remarquables covariantes à une courbe donnée, qui portent aujourd'hui les noms de courbes de Steiner, de Hesse, de Cayley. *M. Chasles*[201]) et *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[202]) concentrent toute leur attention sur la génération des courbes algébriques par des faisceaux projectifs de courbes d'ordres inférieurs, génération qu'ils imaginèrent sans doute indépendamment de *H. Grassmann*, et qu'ils appliquèrent à la construction de courbes passant par des points donnés, s'affranchissant ainsi, du moins en partie, des procédés purement analytiques.

Dans son „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane", *L. Cremona*[203]) démontre par une méthode uniforme et à beaucoup d'égards géométrique (mais qui n'est pas toujours irréprochable) tous les théorèmes importants obtenus jusqu'à lui par les méthodes analytiques et il y ajoute encore de nouveaux résultats. Peu après il fit le même travail pour les surfaces[204]).

Mais ces recherches reposent toujours d'une façon plus ou moins visible sur des notions et des théorèmes analytiques. Les deux théorèmes cités par *L. Cremona* dans son „Introduzione" aux n^os 36 et 37 comme „porismes de Chasles"[205]) équivalent à l'équation d'une courbe plane en coordonnées ponctuelles ou tangentielles. La théorie des polaires des courbes planes et des surfaces s'appuie sur la théorie des groupes polaires dans les formes de rang un, laquelle est basée sur des considérations analytiques. Le théorème d'après lequel deux faisceaux projectifs de courbes d'ordres m et n engendrent une courbe d'ordre $m+n$ invoque des considérations sur les involutions[206]) qui ont également un fondement analytique. En un mot ces théories reposent encore en grande partie sur le théorème fondamental de l'algèbre: nous avons affaire, pour ainsi dire, à une théorie algébrico-géométrique des courbes; ce qui a une apparence géométrique n'est le plus souvent qu'une traduction géométrique de considérations analytiques.

F. Schur[207]) a cherché à établir géométriquement la théorie des polaires des courbes planes en concluant du cas supposé connu de la courbe d'ordre n à celui de la courbe d'ordre $n+1$, mais il a dû emprunter encore à l'algèbre trois théorèmes fondamentaux. Et il est permis de douter que l'emploi de l'algèbre ait été ici limité à un champ plus étroit.

25. Esquisse de Thieme. *H. Thieme*[208]) a donné un essai d'une théorie purement géométrique des courbes planes algébriques d'ordre quelconque par la construction effective des systèmes polaires correspondants [cf. III 19].

Il se propose de construire des systèmes de groupes de points d'une droite, de courbes d'un plan et de surfaces qui constituent des systèmes de premières polaires par rapport à des figures (de la même dimension) et d'ordre plus élevé d'une unité. On arrive bien ainsi à donner une définition purement géométrique de ces figures, en les considérant comme „figures directrices" de leurs systèmes polaires, comme *K. G. Chr. von Staudt* l'a fait pour les courbes et surfaces du

199) Math. Ann. 8 (1875), p. 148/9.

200) Ber. Akad. Berlin 1848, p. 310; imprimé sous le titre: Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Kurven [J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 1/6; Werke, publ. par *K. Weierstrass* 2, Berlin 1882, p. 493/500]. Voir aussi J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 7; Werke 2, p. 503.

201) C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 943; 37 (1853), p. 272, 372, 437; 41 (1855), p. 1102, 1190; 45 (1857), p. 318, 1061; J. math. pures appl. (1) 19 (1854), p. 366.

202) Mélanges de géométrie pure, Paris 1856 (voir en partic. chap. 4); Essai sur la génération des courbes géométriques [Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 16 (1862), p. 159; rapport de *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 45 (1857), p. 318]; Application aux courbes du troisième et du quatrième ordre [J. math. pures appl. (2) 1 (1856), p. 411; (2) 2 (1857), p. 153, 249, 267].

203) Memorie Ist. Bologna (1) 12 (1861), p. 305; trad. par *M. Curtze*, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven, Greifswald 1865. Dans la seconde section (théorie des polaires) les propositions de *J. Steiner*[200]) sont aussi démontrées.

204) Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologne 1866; [Memorie Ist. Bologna (2) 6 (1866), p. 91; (2) 7 (1867), p. 29]; trad. par *M. Curtze*, Grundzüge der allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, Berlin 1870.

205) *M. Chasles*, Aperçu hist.[15]), (2^e éd.) p. 280.

206) *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, Mélanges de géom.[202]), p. 174; *L. Cremona*[203]), Memorie Ist. Bologna (1) 12 (1861), p. 346, 323. Ces considérations furent formulées plus tard par *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 1175 dans le principe dénommé d'après lui „principe de correspondance" [III 4, n^os 12 et suiv.] et érigées en méthode générale de démonstration. Voir aussi *C. Segre*, Bibl. math. (2) 6 (1892), p. 33.

207) Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften der ebenen Kurven [Z. Math. Phys. 22 (1877), p. 220/33 (1876)].

208) Die Definition der geometrischen Gebilde durch Konstruktion ihrer Polarsysteme [Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 221/9]; voir aussi Math. Ann. 20 (1882), p. 144.

second ordre. Et effectivement, *H. Thieme* construit l'ensemble des surfaces d'ordre n qui sont polaires des points de l'espace par rapport à une surface d'ordre $n+1$, puis aussi un faisceau, un réseau et un système linéaire quelconque de tels ensembles, en supposant, ce qui a lieu pour $n=2$, que les constructions et les propriétés correspondantes sont déjà connues pour les surfaces d'ordre n. Mais *il ne considère là que les eléments réels*; et le théorème relatif aux points d'intersection d'une droite avec une courbe plane ou une surface n'apparaît chez lui que sous la forme: „Les courbes et les surfaces d'ordre $n+1$ contiennent au plus $n+1$ points d'une droite donnée, ou elles contiennent la droite toute entière"[209]. Sans doute, sa théorie pourrait être conservée en grande partie dans le cas d'éléments complexes, mais la difficulté principale, la démonstration du théorème sur la constance du nombre des points d'intersection (réels ou imaginaires), serait encore à surmonter.

Dans un mémoire ultérieur, *H. Thieme*[210] traite ce problème particulièrement pour les surfaces du troisième ordre, en prenant comme point de départ la théorie des surfaces du second ordre et de leurs systèmes linéaires.

Bien qu'incomplet, l'essai de *H. Thieme* était rationnel. Pour pouvoir considérer les figures algébriques du troisième ordre et au-dessus, à l'exemple de *K. G. Chr. von Staudt*, sans sortir du domaine des éléments réels, il fallait commencer par s'élever des systèmes polaires ordinaires, c'est-à-dire des correspondances bilinéaires, aux correspondances „trilinéaires"

$$\sum a_{ihk} x_i x_h' x_k'' = 0,$$

et ainsi de suite. Les systèmes polaires mentionnés plus haut constituent un premier pas dans cette voie[211].

209) *H. Thieme,* Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 284.

210) Die Flächen dritter Ordnung als Ordnungsflächen von Polarsystemen [Math. Ann. 28 (1887), p. 133/51].

211) Les correspondances linéaires d'ordre n dans les formes de rang un ont été étudiées, surtout pour $n=3$, dans plusieurs travaux. On trouve déjà des indications sur ce sujet dans *F. August* [De superficiebus tertii ordinis, Diss. Berlin 1862] et d'une façon plus détaillée et plus systématique dans *J. Rosanes* [Ueber linear-abhängige Punktsysteme, J. reine angew. Math. 88 (1880), p. 241, § 9]; *H. Schubert* [Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden, Math. Ann. 17 (1880), p. 457]; *B. Klein* [Theorie der trilinear symmetrischen Elementargebilde, Habilitationsschrift Marbourg 1881]; *C. Le Paige* [Mém. couronnés et savants étrangers Acad. Belgique in 4°, 42 (1879), mém. n° 4, p. 1/71; *F. Folie* et *C. Le Paige* [Mém. Acad. Belgique 43 (1880/2), 2e partie, mém. n° 2, p. 1/43; 45 (1882/4), mém. n° 1, p. 3/45; *C. Le Paige,* Bull. Acad. Belgique (3) 5 (1883), p. 25/30, 85/112]; *G. Castelnuovo* [Studio sulle omografie di 2a specie, Atti Ist. Veneto (6) 5 (1886/7), p. 1041]; *F. London* [Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufigen Grundgebilde, Math. Ann. 44 (1894), p. 345].

G. Hauck [J. reine angew. Math. 95 (1883), p. 1, surtout § 3; 97 (1884), p. 261; 98 (1885), p. 304; 108 (1891), p. 25; 111 (1893), p. 207] s'est occupé longtemps de la théorie des correspondances trilinéaires planes à laquelle il arriva tout d'abord en étudiant du point de vue de la géométrie descriptive les relations qui existent entre trois projections planes d'une même figure (plane ou gauche).

R. de Paolis reprit ces recherches d'une façon plus approfondie et plus systématique, mais malheureusement il mourut avant de pouvoir en venir à bout [cf. n° **27**].

26. Théorie purement synthétique des courbes planes par Kötter. Les nombreux essais faits en vue de fonder une théorie purement synthétique des courbes et surfaces algébriques ne furent couronnés de succès que lorsqu'en 1884 et 1886 l'académie de Berlin décida d'attribuer le prix Steiner au meilleur travail sur ce sujet. L'ouvrage de *E. Kötter*[212] couronné en 1886 [cf. III 19] renferme en effet une théorie synthétique des courbes planes, qui peut être considérée dans son ensemble comme satisfaisante.

E. Kötter part de la remarque suivante. En géométrie analytique la grande simplicité des théorèmes et des démonstrations sur les courbes algébriques repose sur ces deux faits: en premier lieu, les grandeurs imaginaires sont déjà introduites dans les fondements de la géométrie; en second lieu, avant d'aborder la géométrie analytique, on a à sa disposition la théorie des fonctions rationnelles entières d'une et de plusieurs variables. En particulier, on suppose connu le théorème fondamental de l'algèbre [I 9, **80**] d'après lequel une fonction rationnelle entière d'une variable de degré n possède n zéros en général différents, et le théorème de Bézout [I 9, **51**, note 389] d'après lequel deux fonctions rationnelles entières de deux variables de degrés m et n s'annulent en même temps pour mn couples de valeurs des variables.

En ce qui concerne le premier point, la théorie des éléments imaginaires de *K. G. Chr. von Staudt* donne la traduction géométrique de la théorie analytique et, dès le second chapitre de son ouvrage, *E. Kötter* ne fait pas de distinction entre éléments réels et imaginaires.

La théorie des fonctions rationnelles entières est remplacée dans le mémoire de *E. Kötter* par la *théorie des involutions.* De même qu'un groupe de points peut être représenté analytiquement par une équation de degré n, de même il peut être déterminé géométriquement comme

212) Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven [Abh. Akad. Berlin 1887, Phys. math. Klasse, Math. Abh. mém. n° 4].

„groupe de coïncidence" de *deux involutions projectives*, c'est-à-dire comme formé des éléments dont chacun est commun à deux groupes correspondants de deux involutions projectives I_m et I_{n-m}. Sa méthode générale de démonstration consiste à conclure de n à $n+1$, le cas de $n=2$ étant bien connu par la géométrie projective ordinaire.

A la théorie des involutions succède celle des „réseaux d'involutions" de rang deux et de rangs plus élevés, qui correspondent aux systèmes linéaires de formes binaires. De ces réseaux on peut extraire des séries ∞^1 de groupes de points, „les involutions de rang μ", qui sont aux réseaux eux-mêmes ce qu'une section conique ou une courbe gauche du troisième ordre est au plan ou à l'espace. Deux involutions, l'une d'ordre m et de rang μ, l'autre d'ordre n et de rang ν, peuvent être rapportées projectivement l'une à l'autre, et ont en général $m\nu + n\mu$ points communs.

Le quatrième chapitre contient les propositions (toujours démontrées en concluant de n à $n+1$) relatives à la génération des courbes algébriques, à leurs points d'intersection et à leur réunion en faisceaux, réseaux, etc.... Deux faisceaux projectifs de courbes d'ordres m et $n-m$ engendrent une courbe d'ordre n (c'est-à-dire une courbe qui est rencontrée en n points par une droite arbitraire). Deux courbes d'ordres m et n, dont les points d'intersection sont simples pour toutes les deux, et qui possèdent en tous ces points des tangentes différentes, ont toujours mn points d'intersection.

Suivent d'autres théorèmes sur les intersections de deux courbes et sur la théorie des polaires; enfin la construction linéaire, déjà donnée par *H. Grassmann*, des courbes d'ordre n est généralisée et étendue au cas d'une correspondance linéaire générale d'ordre n dans le plan; et partant de là, *E. Kötter* arrive à construire la courbe d'ordre n passant par $\frac{n(n+3)}{2}$ points donnés[213]).

27. Recherches de Paolis. La théorie des courbes planes de *E. Kötter* peut être regardée comme rentrant dans l'ordre d'idées de *J. Steiner* [n^{os} **9**, **10**, **24**], puisque *E. Kötter* reste attaché au principe de la génération des courbes algébriques par des faisceaux projectifs de courbes d'ordre inférieur. La solution que *R. de Paolis* imagina en même temps se rapproche au contraire davantage de la définition des sections coniques par les systèmes polaires, due à *K. G. Chr. von Staudt.*

213) *E. Kötter* [Math. Ann. 34 (1889), p. 123] a fourni des compléments à ses recherches (génération des courbes à points multiples, théorie des polaires, jacobienne d'un réseau, hessienne d'une courbe donnée).

Malheureusement la mort vint prématurément interrompre ses recherches en 1892.

R. de Paolis avait reculé son point de départ plus encore que ne l'avait fait *E. Kötter*, et était parti des fondements même de la géométrie [cf. III 19].

Sa „teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi[214])" contient des considérations d'analysis situs [III 6], en particulier sur la connexion des surfaces, avec des démonstrations purement géométriques de théorèmes relatifs aux correspondances continues, équivalents à des théorèmes analytiques de *K. Weierstrass* et de *G. Cantor*. Ces considérations peuvent être regardées comme constituant la partie de la géométrie qui correspond à la „théorie générale des fonctions".

Le second mémoire de *R. de Paolis* „le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie[215])" correspond à la théorie des fonctions algébriques d'une variable. La base de cette théorie est fournie par une étude purement géométrique des correspondances n-linéaires entre n formes de rang un; dans cette étude, les éléments de ces formes sont associés en multiplicités ∞^{n-1} de groupes de n éléments, „aggruppamenti proiettivi di ordine n", caractérisés par ce fait que, si l'on suppose fixes dans les formes correspondantes $n-2$ éléments d'un groupe (ou d'un n-tuple de points), les deux autres décrivent toujours des séries projectives. C'est là l'image géométrique de l'équation n-linéaire

$$a_x a_y a_z \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = 0$$

qui comprend, comme cas particuliers, les équations polaires dans les formes de première espèce, de même que l'équation de la correspondance générale (m, n). Dans le cas de formes superposées, les „aggruppamenti proiettivi" mentionnés plus haut fournissent les involutions d'ordre n et de rang $n-1$, et comme intersections de ces dernières on obtient celles de rang inférieur.

Deux involutions l'une d'ordre n et de rang $n-1$, l'autre d'ordre n et de rang un (non contenue dans la première), ont toujours un groupe de points communs et un seul. C'est ce théorème qui remplace le théorème fondamental de l'algèbre et fournit la base nécessaire pour les recherches synthétiques à venir. De même qu'on ne peut

214) Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (3) 7 (1890), mém. nº 6; Extraits complétés par de nouvelles recherches [Ann. mat. pura appl. (2) 18 (1890), p. 93].

215) Mem. Accad. Torino (2) 42 (1892), p. 495; compte-rendu par *C. Segre* [Atti Accad. Torino 27 (1891/2), p. 366].

établir d'une manière purement algébrique le théorème fondamental de l'algèbre, de même on est obligé de déduire la démonstration de ce théorème des considérations sur les correspondances continues exposées dans le mémoire précédent[214]).

Ces deux travaux formaient la première et la deuxième partie d'un manuscrit présenté en 1887 à l'„Accademia dei Lincei". La troisième partie contenait seulement une esquisse, publiée par *C. Segre* après la mort de l'auteur[216]), des recherches ultérieures en vue d'une théorie purement synthétique des courbes planes algébriquee. Cette esquisse contient la définition géométrique des courbes d'ordre n par une sorte de correspondance n-linéaire, et le théorème de Bézout sur les intersections de deux courbes d'ordres m et n[217]).

Géométrie algébrique à plusieurs dimensions.

28. Essais sur la conception analytique d'espaces à plusieurs dimensions. Si, en géométrie, on s'est borné pendant longtemps à considérer trois dimensions au plus, cela tient simplement à la limitation correspondante de notre faculté de perception. Mais l'application de l'algèbre à la géométrie ayant montré comment les résultats analytiques liés à la théorie des fonctions d'une, de deux, ou de trois variables sont susceptibles d'une représentation géométrique accessible aux sens, il était naturel de chercher également une représentation géométrique pour le cas d'un plus grand nombre de variables, et par suite, pour conserver aussi l'analogie de langage, de ne pas parler seulement de „multiplicités s'étendant à volonté" mais aussi d'„espaces à un nombre quelconque de dimensions" [III 1, **22**; III 26]. Et c'est ce qui arriva sans que l'on se préoccupât même tout d'abord de l'existence de tels espaces (question que l'on regardait comme plutôt métaphysique que mathématique); que cette représentation pût être perceptible aux sens ou suprasensible, on la trouva utile et on en fit un usage répété. C'est probablement *A. Cayley* qui dans ses „chapters on the analytical geometry of (n) dimensions[218])" a eu la première idée d'une telle conception; mais il ne la développa qu'en 1869 dans son „Memoir on abstract geometry[219])". *A. L. Cauchy*[220]) remarqua aussi combien la géométrie à plusieurs dimensions est propre à „éclaircir un grand nombre de questions délicates" et à „guider le calculateur au milieu des difficultés"[220]). La notion d'ensemble à n dimensions a été établie d'une façon générale par *H. Grassmann*[221]) dès 1844; ses „systèmes de rang n" procèdent d'une figure génératrice quelconque à laquelle il applique „n lois différentes de variations". Cette génération apparait aussi dans *B. Riemann*[222]), qui indique comme caractère essentiel d'une multiplicité à n dimensions la condition „que la détermination du lieu dans celle-ci puisse être ramenée à n déterminations de grandeurs". *B. Riemann* étudie surtout les „rapports métriques" d'une telle multiplicité, dont la théorie s'est ensuite développée dans bien des directions [cf. III 1, n^os^ **33** à **38**; III 38].

Une notion importante due à *B. Riemann* est celle des différentes courbures d'une multiplicité; grâce à lui et à *E. Beltrami*[223]) un grand intérêt se concentre sur les multiplicités à „courbure constante", qui permettent un groupe de déplacements à $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres.

H. von Helmholtz[224]) essaie, au contraire, de caractériser une multiplicité par l'existence de ce groupe de déplacements et de conclure de là aux relations métriques qui y ont lieu, problème qui fut plus tard traité en toute rigueur par *S. Lie*[225]) [cf. III 1, n^os^ **39** à **42**] et dans des hypothèses plus générales encore, par *D. Hilbert*[226]).

216) Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni [Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 3 II (1894), p. 225 [30 décembre 1887]].

217) Voir aussi *C. Segre*, Rend. Circ. mat. Palermo 6 (1892), p. 208.

218) Cambr. math. J. 4 (1843/5), p. 119; Papers 1, Cambridge 1889, p. 55.

219) Philos. Trans. London 160 (1870), p. 51; Papers 6, Cambridge 1893, p. 456.

220) Mémoire sur les lieux analytiques [C. R. Acad. sc. Paris 24 (1847), p. 885; Œuvres (1) 10, Paris 1897, p. 292/5].

221) Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844; Werke 1¹, publ. par *F. Engel*, Leipzig 1894, p. 1.

222) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen [Habilitationsschrift, Göttingue 1854; Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. p. 133; Werke, publ. par *H. Weber*, (1^re^ éd.) Leipzig 1876, p. 254; (2^e^ éd.) Leipzig 1892, p. 272 et suiv.; trad. française par *L. Laugel*, Paris 1898, p. 280]. Voir aussi la „Commentatio mathematica" [Werke, (2^e^ éd.) p. 403 [1861]]. La condition énoncée a été reconnue depuis insuffisante; il faut encore que la correspondance soit réversible, univoque et continue.

223) Teoria fondamentale degli spazi di curvatura constante [Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 232; Opere 1, Milan 1902, p. 406].

224) Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen [Nachr. Ges. Gött. 1868, p. 193/221; Wiss. Abh. 2, Leipzig 1883, p. 618]. Voir aussi Verhandl. des natur. histor.-mediz. Vereins Heidelberg (1) 4 (1865/8), p. 197; (1) 5 (1869/70), p. 31; Wiss. Abh. 2, Leipzig 1883, p. 613. Des explications géométriques sur le problème de Helmholtz ont été fournies par *F. Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie (cours autographié Göttingue) 1 (1889/90); (2^e^ éd.) 1, Göttingue 1894, p. 261 et suiv.

225) *S. Lie* et *F. Engel*, Theorie der Transformationsgruppen 3, Leipzig 1893, p. 393 (section 5). Voir aussi divers mémoires cités dans cet ouvrage, en partic. *H. Poincaré*, Bull. Soc. math. France 15 (1886/7), p. 203.

226) Grundlagen der Geometrie, (2^e^ éd.) Leipzig 1903, p. 121; (3^e^ éd.) Leipzig 1909.

29. Espaces à plusieurs dimensions nés de la considération d'éléments quelconques. La génération des „systèmes de rang n“ de *H. Grassmann* contenait aussi une idée géométrique, encore assez vague. *J. Plücker* formula cette idée d'une façon précise, en remarquant qu'on peut attribuer à notre espace un nombre quelconque de dimensions en choisissant convenablement la figure géométrique que l'on considère comme élément générateur. Dès 1868 *J. Plücker*[227]) appliqua cette idée, quoique encore par des méthodes analytiques, au cas de la ligne droite dans l'espace. De même *A. Cayley*[228]) considéra les sections coniques d'un plan par des points d'un espace à cinq dimensions, et *G. H. Halphen*[229]) établit sur les systèmes de courbes planes des théorèmes qui équivalent à des théorèmes bien connus sur les multiplicités du second et du troisième degré. Cette idée a trouvé des applications de plus en plus nombreuses; elle a donné naissance, entre autres, à la géométrie des sphères, à la géométrie des cercles et des sections coniques [Voir à ce sujet III 7 et III 37]. En particulier, on peut considérer tout système linéaire ∞^n de formes algébriques (groupes de points sur une droite, courbes planes, surfaces, formes bilinéaires, connexes etc.) comme un espace linéaire à n dimensions, ce qui donne naissance à un grand nombre de cas particuliers et d'applications.

30. Perfectionnement et développement de la conception projective. Les recherches de géométrie à n dimensions ne reçurent une forte impulsion que lorsque les géomètres, poussés par les considérations précédentes, se proposèrent d'étendre la géométrie élémentaire et projective du plan et de l'espace au cas de n dimensions. Cela revenait à abandonner dans la géométrie ordinaire le postulat de la triple dimension de l'espace (et à modifier en conséquence les théorèmes sur les intersections de droites et de plans).

C. F. Gauss, d'ailleurs, considérait déjà les trois dimensions de l'espace comme „une conception particulière à l'esprit humain“[230]). Et dès 1846, *A. Cayley*[231]) avait remarqué que les considérations de

227) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Leipzig 1869. On trouve déjà une indication sur ces idées [System der Geometrie des Raumes, Dusseldorf 1846, n° 258] cf. n° **12.** Voir aussi *J. Plücker*, Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 462/585.

228) On the curves which satisfy given conditions [Philos. Trans. London 158 (1868), p. 75; Papers 6, Cambridge 1893, p. 191].

229) Recherches de géométrie à n dimensions [Bull. Soc. math. France 2 (1873/4), p. 34].

230) *Sartorius von Waltershausen*, Gauss zum Gedächtnis, Leipzig 1856, p. 81.

géométrie à n dimensions permettent de simplifier certaines recherches sur des configurations, puisque l'on peut déduire celles-ci, par des sections planes, d'autres configurations plus simples contenues dans des espaces supérieurs. Mais quoiqu'il n'y eût là aucune difficulté de principe[232]), ce n'est que plus tard que l'on donna suite à cette idée.

Vers 1870, la géométrie à plusieurs dimensions commence à être une véritable science autonome avec des travaux analytiques au début, mais à tendance géométrique de plus en plus accusée par la suite. Nous ne rappellerons ici que les travaux qui frayèrent la voie, et nous renverrons pour les autres à l'article III 26.

Dans ses recherches sur les correspondances univoques entre courbes et surfaces algébriques, *M. Nöther*[233]) prend déjà en considération le cas de n dimensions. *A. Clebsch*[234]) fait intervenir le point de vue des invariants, et nous apprend ainsi à déterminer par des coordonnées, dans un espace à n dimensions, des espaces linéaires de moindre dimension. *G. H. Halphen*[229]) et *M. Nöther*[235]) considèrent l'intersection générale de deux multiplicités algébriques dans l'espace à n dimensions, même dans le cas où il y a des points multiples; *C. Jordan* développe la géométrie métrique de l'espace à n dimensions en coordonnées cartésiennes[236]), tandis que *E. d'Ovidio*[237]) achève la détermination métrique projective générale dans l'espace à n dimensions. Dans les travaux de *F. Klein*[238]) apparaissent à chaque instant des considérations de géométrie à n dimensions, surtout à propos des multiplicités du second degré et des problèmes qui s'y rattachent concernant

231) Sur quelques théorèmes de la géométrie de position [J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 217; Papers 1, Cambridge 1889, p. 321].

232) Les propriétés métriques essentielles de l'espace à n dimensions sont contenues dans un mémoire présenté en 1852 par *L. Schläfli* à l'Académie de Vienne, mais publié seulement en 1901 par *J. H. Graf* [Theorie der vielfachen Kontinuität, Neue Denkschriften schweizerische Naturf. Ges. 38 (1901)].

233) Math. Ann. 2 (1870), p. 293.

234) Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie [Abh. Ges. Gött. 17 (1872), math. mém. n° 1; Math. Ann. 5 (1872), p. 427]. Une indication relative aux coordonnées d'espaces de dimensions inférieures contenus dans un espace à n dimensions se trouve dans *H. Grassmann*, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, p. 163; (2e éd.) Leipzig 1878; Werke 1^1, publ. par *F. Engel*, Leipzig 1894, p. 188.

235) Sitzgsb. phys.-medic. Soc. Erlangen 9 (1876/7), p. 66/9 [4 décembre 1876]; Math. Ann. 11 (1877), p. 571/4.

236) C. R. Acad. sc. Paris 75 (1872), p. 1614; Bull. Soc. math. France 3 (1874/5), p. 103.

237) Le funzioni metriche fondamentali [Atti R. Accad. Lincei, *Memorie mat.* (3) 1 (1876/7), p. 133/93.

238) Nachr. Ges. Gött. et Math. Ann. de 1868 à 1872.

la géométrie réglée[239]), la projection stéréographique, la détermination métrique projective générale. Dans son programme d'Erlangen[240]) *F. Klein* envisage également l'espace à n dimensions.

Dans le mémoire fondamental de *W. K. Clifford* „on the classification of loci"[241]), qui aborde l'étude générale des courbes dans un espace quelconque, les considérations synthétiques alternent déjà avec des considérations analytiques. La géométrie projective purement synthétique de l'espace à n dimensions commence en 1881 avec un mémoire de *G. Veronese*[242]), où l'espace à n dimensions est engendré géométriquement par projection d'un espace à $n-1$ dimensions d'un point pris hors de celui-ci[243]); les opérations fondamentales de la projection et de la section y sont appliquées systématiquement pour obtenir des figures d'un espace quelconque, en particulier d'un espace à trois dimensions, comme projections d'autres figures d'un espace supérieur, et pour déduire les propriétés des premières de celles des dernières. Certains chapitres de ce mémoire sont consacrés aux correspondances projectives de deux espaces à n dimensions, à la génération des multiplicités algébriques par des formes fondamentales projectives, aux multiplicités quadratiques à $n-1$ dimensions d'un espace à n dimensions; dans le quatrième chapitre, les *formules de Plücker-Cayley* relatives aux singularités d'une courbe plane ou gauche [nos **19** à **21**] sont étendues aux courbes de l'espace à n dimensions.

Ce mémoire de *G. Veronese* inaugura en Italie une ère de grande

239) „La géométrie réglée est la géométrie d'une multiplicité quadratique à quatre dimensions M_4^2 dans l'espace à cinq dimensions" [Math. Ann. 5 (1872), p. 261 et suiv.].

240) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Progr. Erlangen 1872; réimpr. Math. Ann. 43 (1893), p. 63; trad. italienne par *G. Fano*, Ann. mat. pura appl. (2) 17 (1889/90), p. 307; trad. française par *H. Padé*, Ann. Éc. Norm. (3) 8 (1891), p. 87/102, 173/99.

241) Philos. Trans. London 169 part II (1879), p. 663; Papers, Londres 1882, p. 303.

242) Math. Ann. 19 (1882), p. 161.

243) *Considérons un espace S_n à n dimensions. Si l'on suppose les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liées par p relations linéaires, on obtient un espace linéaire S_{n-p} à $n-p$ dimensions contenu dans S_n. Si l'on prend alors un point arbitraire A de S_n on peut par A et S_{n-p} faire passer un espace linéaire S_{n-p+1} à $n-p+1$ dimensions. En prenant l'intersection de ce dernier avec un espace S_{p-1} à $p-1$ dimensions on n'obtient en général qu'un seul point A' qui s'appelle la projection de A sur l'espace S_{p-1}, le point de vue étant l'espace S_{n-p}. Dans cette perspective généralisée le point de vue est un espace linéaire S_{n-p} et l'on projette sur un espace linéaire S_{p-1}. Si l'on prend $p=n$ le point de vue se réduit à un point et l'on projette sur un espace S_{n-1} à $n-1$ dimensions. En particulier pour $n=3$, on a la projection conique habituelle sur un plan.*

activité dans le domaine de la géométrie projective et algébrique à plusieurs dimensions. Elle eut à sa tête *C. Segre*, et fut marquée par l'emploi continuel aussi bien des méthodes synthétiques que des méthodes analytiques. Ces recherches ont été particulièrement utiles pour la „géométrie sur une multiplicité (courbe, surface) algébrique" [cf. III 19 et III 23; voir aussi l'article actuel nos **31** à **32**]. C'est aussi à l'instigation de *C. Segre*[244]) que l'on s'est posé le problème: „définir un espace à n dimensions par un système de postulats indépendants de telle sorte qu'on puisse en déduire la détermination de ses points par des coordonnées", question aujourd'hui entièrement résolue, et de plus d'une façon [cf. III 1].

Géométrie sur une variété algébrique.

31. Appel aux fonctions transcendantes. La situation de Clebsch. La théorie des courbes et surfaces algébriques, purement projective jusque vers 1860, s'est développée aussi, depuis lors, dans une autre direction, grâce à de nouveaux points de vue.

D'une part, *A. Clebsch*[245]) a appliqué à la géométrie la théorie des fonctions, considérablement perfectionnée depuis quelques dizaines d'années, en particulier la théorie des fonctions d'une variable complexe; et il a montré comment la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes peut s'appliquer à la géométrie des courbes algébriques. Son mémoire „Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie"[246]) est inspiré de l'idée qu'on peut considérer l'équation que *N. H. Abel* prend pour définir la „classe" (c'est-à-dire l'irrationalité) dans les intégrales abéliennes comme l'équation d'une courbe plane algébrique; partant de là, il reconnaît dans les théorèmes sur les points d'intersection connus depuis longtemps une conséquence immédiate du théorème d'Abel, qui donne non seulement le nombre des relations entre les points d'intersection de deux courbes algébriques, mais encore ces relations elles-mêmes sous la forme la plus simple. *A. Clebsch* rapproche le nombre p des intégrales indépendantes et restant partout finies du nombre des points doubles de la courbe plane correspondante, et établit ainsi la notion de *genre* d'une courbe algébrique; genre qui a la même valeur pour toutes les courbes

244) Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche [Rivista mat. 1 (1891), p. 42].

245) Cf. Math. Ann. 7 (1874), p. 20 et suiv. Voir aussi pour ce chapitre: *A. Brill* et *M. Nöther*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/3), éd. 1894, p. 318/30, 330/47.

246) J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 189.

planes ou gauches qu'on peut déduire l'une de l'autre par une „transformation univoque" (en tenant compte des éléments complexes)[247]. Quoique cette notion ne fût pas nouvelle et que le théorème d'invariance ait déjà été formulé d'une autre façon par *B. Riemann*[248]), c'est *A. Clebsch* qui en a donné l'interprétation géométrique la plus générale et en a reconnu la grande portée. Ce théorème appartenait à un domaine alors peu exploré, celui *des propriétés des équations algébriques qui sont invariantes par rapport à toutes les transformations birationnelles,* domaine auquel appartenait aussi la question des „modules" d'une classe de fonctions algébriques dont *B. Riemann* avait déterminé le nombre dans le cas général[249]). Ce domaine, où la théorie des fonctions et la théorie des courbes algébriques apparaissent comme fondues l'une dans l'autre, fut ouvert et parcouru en tous sens par les travaux de *A. Clebsch.* Comme extension naturelle aux formes à deux dimensions, *A. Clebsch* établit aussi la notion de *genre d'une surface,* abordant ainsi la recherche des propriétés d'une surface qui sont invariantes par rapport aux transformations univoques de cette surface[250]) [I 10].

D'autre part, en géométrie aussi, la théorie des transformations [III 23] avait suffisamment progressé. Après s'en être longtemps tenu aux transformations projectives et quadratiques, la notion générale de transformation ponctuelle birationnelle dans le plan avait été établie en 1863 par *L. Cremona*[251]) et de 1869 à 1871 étendue à l'espace par *A. Cayley*[252]), *L. Cremona*[253]) et *M. Nöther*[254]) La considération

247) J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 98.

248) Theorie der Abelschen Funktionen [J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 115/55, en partic. p. 133; Werke, publ. par *H. Weber*, (2e éd.) Leipzig 1892, p. 88/144, en partic. p. 119; trad. *L. Laugel,* Paris 1898, p. 89/164, en partic. p. 131].

249) J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 136.

250) La possibilité de la représentation uniforme de deux surfaces l'une sur l'autre dépend, il est vrai, de toute une série de questions dont on n'avait alors aucune idée et qui ne sont même pas encore définitivement résolues aujourd'hui. Mais ici encore c'est *A. Clebsch* qui a fait le premier pas en établissant la notion du „genre" d'une surface [C. R. Acad. sc. Paris 67 (1868), p. 1238] dont l'invariance par rapport aux transformations univoques fut démontrée par *M. Nöther* [Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen, Math. Ann. 2 (1870), p. 293/316; 8 (1875), p. 501/8]. La notion du genre „numérique" (p_n) d'une surface est due à *A. Cayley* [Philos. Trans. London 159 (1869), p. 227; Math. Ann. 3 (1871), p. 256; Papers 6, Cambridge 1893, p. 355; 8, Cambridge 1895, p. 394] et son invariance a été démontrée par *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 4 (1871), p. 21 et *M. Nöther,* id. 8 (1875), p. 495 (§ 9).

251) Memorie Ist. Bologna (2) 3 (1863), p. 385/98; (2) 5 (1865), p. 3/35; réimpr. Giorn. mat. (1) 1 (1863), p. 305; (1) 3 (1865), p. 269, 363.

des courbes et des systèmes de courbes situées sur des surfaces particulières avait conduit à des „représentations" remarquables de ces surfaces, entre autres à la représentation plane d'une surface du second ordre, et à celle des surfaces du troisième ordre, effectuée par *A. Clebsch*[255]) et *L. Cremona*[256]). Dans ces exemples de transformations univoques, dont les dernières n'avaient pas trait à tout l'espace, mais seulement à des surfaces particulières, on avait aussi les éléments géométriques nécessaires pour aborder la „géométrie sur une multiplicité algébrique" (courbe, surface, etc.).

32. Géométrie sur une courbe ou sur une surface algébrique. Dans la géométrie sur une variété algébrique simplement infinie, c'est-à-dire sur une courbe algébrique [I 10; III 19], on étudie les „fonctions rationnelles des coordonnées d'un point de cette courbe", et par conséquent les séries linéaires (ou involutions) de groupes de points de la courbe: le système des „points de niveau" d'une fonction rationnelle est en effet l'involution rationnelle ∞^1 la plus générale.

Cette théorie a été développée par diverses méthodes:

1) *La méthode fonctionnelle,* d'après la „Theorie der Abelschen Funktionen" de *B. Riemann,* qui étudie, du point de vue de la théorie des fonctions, les fonctions rationnelles de la courbe donnée, c'est-à-dire les fonctions algébriques appartenant à une certaine „classe", et leurs intégrales, c'est-à-dire les intégrales abéliennes de cette classe.

2) *La méthode algébrico-géométrique,* d'après un mémoire fondamental de *A. Brill* et *M. Nöther*[257]). On représente alors la multiplicité algébrique proposée par une courbe plane, sur laquelle on peut toujours découper les involutions rationnelles par des courbes „adjointes". *E. Bertini*[258]) a donné un exposé d'ensemble de ces recherches.

3) *La méthode algébrico-arithmétique,* d'après *L. Kronecker*[259]) et

252) On the rational tranformations between two spaces [Proc. London math. Soc. 3 (1869/71), p. 127; Papers 7, Cambridge 1894, p. 189].

253) Nachr. Ges. Gött. 1871, p. 129/48; réimpr. Math. Ann. 4 (1871), p. 213; Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 4 (1871), p. 269, 315; Ann. mat. pura appl. (2) 5 (1871/3), p. 131.

254) Math. Ann. 3 (1871), p. 547.

255) J. reine angew. Math. 65 (1866), p. 359.

256) Dans son mémoire couronné en 1866 par l'Académie de Berlin [J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 1].

257) Ueber die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie [Math. Ann. 7 (1874), p. 269].

258) Ann. mat. pura appl.(2) 22 (1894), p. 1.

259) Cette méthode a été développée d'abord par *L. Kronecker* dans ses cours professés à l'Université de Berlin. Cf. *L. Kronecker,* J. reine angew. Math. 91

aussi *R. Dedekind* et *H. Weber* [260]), dans laquelle on applique aux différentes „classes“ de fonctions algébriques les méthodes arithmétiques de la théorie des corps de nombres algébriques [I 18].

4) *La méthode géométrique pure,* qui fait intervenir l'espace à n dimensions, en „représentant“ les involutions d'ordre n et de dimension k par des courbes d'ordre n de l'espace à k dimensions, sur lesquelles les groupes de l'involution sont découpés par les espaces à $k-1$ dimensions. Ce sont les géomètres italiens, surtout *C. Segre* et *G. Castelnuovo* qui ont fourni à cette théorie les contributions les plus importantes; à *C. Segre* nous devons aussi un exposé d'ensemble de la même théorie [261]).

En ce qui concerne les figures à deux dimensions, c'est-à-dire les surfaces algébriques, on a aussi eu recours d'une part à une méthode analytique ou transcendante (correspondant à celle de *B. Riemann*), et d'autre part à une méthode algébrico-géométrique. Les recherches les plus anciennes du domaine transcendant sont dues à *M. Nöther* [262]); il introduisit les intégrales doubles de différentielles algébriques, qui restent partout finies sur la surface, et qui sont les analogues des intégrales abéliennes de première espèce sur les courbes algébriques. Plus tard *É. Picard* [263]) considéra sur les surfaces dont la „connexion linéaire“ est >1 les intégrales simples de différentielles totales, et *G. Humbert* [264]) étudia des surfaces particulières, entre autres les „surfaces hyperelliptiques“.

Les géomètres italiens, en particulier *G. Castelnuovo* et *F. Enriques*, ont, au contraire, étudié les systèmes linéaires de courbes sur les surfaces, dont la théorie se trouvait déjà en partie esquissée par celle des systèmes de courbes planes, c'est-à-dire de courbes sur des

(1881), p. 301; Grundzüge [180]); J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 1. Voir aussi *K. Hensel* et *G. Landsberg*, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1903.

260) Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen [J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 181].

261) Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito [Ann. mat. pura appl. (2) 22 (1894), p. 41].

262) Math. Ann. 2 (1870), p. 293; 8 (1875), p. 495/533.

263) J. math. pures appl. (4) 1 (1885), p. 281; (4) 2 (1886), p. 329; (4) 5 (1889), p. 135 (dans ce dernier article, p. 175 introduction de la notion de la connexion linéaire); voir aussi C. R. Acad. sc. Paris 99 (1884), p. 961, 1147; 100 (1885), p. 843; 101 (1885), p. 734; 102 (1886), p. 250.

264) J. math. pures appl. (4) 9 (1893), p. 29, 351; (4) 10 (1894), p. 190; C. R. Acad. sc. Paris 117 (1893), p. 361; 120 (1895), p. 365, 425.

surfaces rationnelles. Par cette voie, ils sont arrivés à définir géométriquement et à faire ressortir un grand nombre de caractères invariants d'une surface.

*D'autres résultats de grande importance ont été établis par *F. Severi* [265]), qui à cet effet a eu aussi recours aux méthodes transcendantes.*

Un exposé d'ensemble des résultats obtenus jusqu'en 1896 a été donné par *G. Castelnuovo* et *F. Enriques* [266]), qui l'ont repris ensuite en 1901 [267]) et en 1906 [268]).

Tandis que certains théorèmes sur les courbes algébriques se transportent aisément aux surfaces et aux variétés à plusieurs dimensions, d'autres propriétés donnent lieu, au contraire, à des différences bien remarquables, lorsque la dimension s'accroît.

Voir à ce sujet les articles III 23, III 26 et III 28.

Géométrie énumérative.

33. But et principes généraux. Dans un système algébrique de ∞^r éléments géométriques, il y a un nombre fini d'éléments qui remplissent r conditions simples indépendantes. Or, il peut arriver qu'on ait intérêt, pour des conditions données, à connaître ce nombre sans avoir besoin de préciser les différentes solutions. C'est ce qui se présente, par exemple, quand on cherche uniquement le degré d'une courbe ou d'une surface engendrée d'une certaine manière. La détermination de ce nombre est souvent possible par des méthodes générales qui constituent la *géométrie énumérative* [III 4]. Ces problèmes énumératifs peuvent aussi être formulés algébriquement; car il s'agit, en somme, de connaître le nombre (supposé fini) de solutions d'un système d'équations algébriques. Cela revient, en dernier lieu, en imaginant que nous ayons éliminé toutes les inconnues sauf une, à déterminer le degré de l'équation résultante donnant cette dernière inconnue. Le degré de cette équation est égal au nombre de ses racines, à condition de compter k fois chaque racine de multiplicité k; si le

265) **F. Severi,* dans une série de mémoires dont il sera question dans les articles III_4 consacrés à la géométrie algébrique dans l'espace.*

266) Math. Ann. 49 (1897), p. 241.

267) Ann. mat. pura appl. (3) 6 (1901), p. 165.

268) *E. Picard* et *G. Simart*, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes 1, Paris 1897; 2, Paris 1906; appendice, note 5. Ce traité contient un exposé récapitulatif comprenant aussi les derniers résultats obtenus jusqu'en 1906 et indiquant la part due à chacune des deux directions de recherches.

degré s'est abaissé de h par suite des valeurs particulières attribuées aux grandeurs données, il faut aussi compter ∞ comme une racine de multiplicité h.

La géométrie énumérative a donc surtout son point de départ dans l'algèbre, en particulier dans le théorème fondamental de l'algèbre [I 9, **80**] et dans le théorème de Bézout qui en découle [I 9, **51**; III 19]. C'est sur le premier que repose le „principe de correspondance" dû à *M. Chasles* (mentionné en note au n° **24**) [cf. III 4, n° **13**], principe dont *J. Steiner* fit déjà probablement usage dans une série de théorèmes non démontrés (voir la première note du n° **24**) et qui reçut des applications multiples par *M. Chasles, J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* et *L. Cremona* [n° **24**]. Dans les applications ultérieures de ce principe surgissent de grandes difficultés à cause de la multiplicité de quelques solutions et de l'intervention éventuelle de solutions d'autres problèmes qui sont données par la même équation. L'application du principe de correspondance de *M. Chasles* n'en constitue pas moins une méthode essentielle des recherches énumératives, et elle a donné lieu à d'autres principes de correspondance sur une courbe algébrique (formule de Cayley-Brill) ou encore dans le plan, sur une surface algébrique, et dans l'espace à trois ou à plus de trois dimensions [cf. III 4, n^{os} **16**, **17**].

Pendant assez longtemps le „principe de continuité" de *J. V. Poncelet* [n° **7**] joua aussi un rôle important. On l'appliqua dans les problèmes relatifs aux courbes et surfaces algébriques, en décomposant ces dernières, d'une manière continue, en figures d'ordre inférieur et même en systèmes de droites et de plans. *H. Schubert*[269]) lui donna en 1874 le nom de „principe de la conservation du nombre" et l'énonça de la façon suivante: „un nombre se conserve ou ne peut que devenir infini, ceci soit lorsque les figures données viennent à occuper des positions particulières dans l'espace les unes par rapport aux autres, soit lorsque les figures, supposées d'abord générales, font place à d'autres figures plus particulières répondant à la même définition." *H. Schubert* en indiqua aussi la justification algébrique, qui a été ensuite reprise et précisée [cf. III 4, **33**], en tenant compte des objections formulées par *E. Study* et *G. Kohn*[270]).

269) Math. Ann. 10 (1876), p. 23; Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879, p. 12.

270) *E. Study,* Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 378; Archiv Math. Phys. (3) 8 (1905), p. 271; Verhandl. des 3. intern. Math.-Kongr. in Heidelberg 1904, publ. par *A. Krazer,* Leipzig 1905, p. 388; *G. Kohn,* Archiv Math. Phys. (3) 4 (1903), p. 312.

Le principe de la conservation du nombre suppose, en effet, que la détermination des figures demandées puisse être réduite à la résolution d'une équation algébrique, dont les coefficients contiennent des paramètres. Mais l'énoncé donné ci-dessus est encore quelque peu indéterminé, et ce n'est que tout récemment que *F. Severi*[271]) a indiqué les hypothèses sous lesquelles il peut être appliqué sans exception. Il faut pour cela que les conditions dont il s'agit soient exprimables par des sommes de conditions irréductibles d'une même dimension.

Dans les mémoires de *M. Chasles* et de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* il est souvent question de déduire certains nombres, relatifs à des systèmes de courbes et surfaces, d'autres nombres élémentaires dits *caractéristiques* de ces systèmes. Cette déduction a été présentée dans quelques cas par *G. H. Halphen*[272]) comme une sorte de multiplication symbolique, et *H. Schubert*[273]) en a tiré une méthode générale pour introduire successivement de nouvelles conditions, formées avec des conditions plus simples (il en est bien ainsi des sommes considérées ci-dessus), et obtenir les *modules* qui s'y rapportent en effectuant la dite multiplication sur les modules de ces conditions simples. Ce calcul lui permit de donner dans son „Kalkül der abzählenden Geometrie"[269]) un exposé tout à fait systématique de la géométrie énumérative. La formation des modules élémentaires qui lui sont nécessaires repose sur les deux méthodes principales dérivées de l'algèbre, le principe de la conservation du nombre et le principe de correspondance, qui fournissent respectivement les formules dites „d'incidence" et les „formules de coïncidence": on applique ensuite, à ces modules élémentaires, le calcul symbolique. Formules et calcul ont été plus tard étendus aux espaces à plusieurs dimensions [cf. III 4, **26**].

Géométrie infinitésimale.

34. Digression sur la théorie des fonctions. Les recherches de géométrie infinitésimale diffèrent des précédentes surtout en ce qu'elles ne se rapportent pas généralement à une figure toute entière (courbe, surface, etc.) mais seulement à un certain „domaine" entourant un élément. Peu importe donc pour la plupart de ces recherches que la figure à étudier soit ou ne soit pas algébrique ou même analytique.

Cette circonstance conduit à une division de la géométrie en deux

271) Rend. Circ. mat. Palermo 33 (1912), p. 313.

272) C. R. Acad. sc. Paris 76 (1873), p. 1074.

273) Math. Ann. 10 (1876), p. 1, 318; communications résumées Nachr. Ges. Gött. 1874, p. 267/83; 1875, p. 359/87.

parties, conformément à la division des fonctions en deux classes, comme nous allons le voir.

On sait que

$$w = f\ (z)$$

est une *fonction* de la variable réelle z[274]) quand, dans un certain intervalle, à toute valeur réelle de z correspondent une ou plusieurs valeurs réelles déterminées de w. Cette „dépendance" est la seule marque caractéristique de la notion de fonction; toutes les autres propriétés, dont il est ordinairement question à propos des fonctions, n'appartiennent qu'à des classes particulières de fonctions.

Parmi les fonctions d'une variable réelle, il y a

1°) des fonctions discontinues,

2°) des fonctions continues mais non dérivables,

3°) des fonctions continues, dérivables une ou plusieurs fois, ou même à l'infini, mais pas encore analytiques,

4°) des fonctions analytiques.

Mais si, au lieu de limiter la variabilité de z aux valeurs réelles, on admet aussi des valeurs complexes [II B], il convient de restreindre la notion de fonction, et de n'appeler ainsi que les *fonctions analytiques,* c'est-à-dire celles que l'on peut, à l'intérieur d'un certain contour, développer en série entière, uniformément convergente, dont les coefficients peuvent être, eux aussi, des nombres complexes.

La série entière

$$w = a + b(z - z_0) + c(z - z_0)^2 + \cdots\cdots,$$

supposée convergente à l'intérieur d'un cercle déterminé ayant son centre en z_0, définit alors d'après *K. Weierstrass*[275]) un „élément de fonction"; de cet élément on déduit la *fonction totale* correspondante par le *prolongement analytique* [II 8].

Il en est de même, d'une façon correspondante, pour les fonctions de plusieurs variables.

Si nous faisons abstraction des fonctions discontinues et des fonctions continues non dérivables de variables réelles, dont l'intervention en géométrie est étudiée dans l'article III 2, nous pouvons grouper comme il suit les autres fonctions de variables réelles et complexes:

1°) Les *éléments de fonction* c'est-à-dire d'une part les fonctions continues, dérivables une ou plusieurs fois, de variables réelles, mais pour lesquelles on n'exige pas encore la condition d'être développables en série entière dans le domaine de définition; et d'autre part les fonctions analytiques de variables réelles ou complexes, lorsqu'on en limite la considération à de simples séries entières;

2°) Les *fonctions totales*, définies dans le domaine circonscrit par leurs *limites naturelles* éventuelles [II 8; III 2, 8] pour toutes les valeurs complexes des variables et qui, à l'exception des points singuliers, sont partout continues, dérivables à l'infini, et développables en série entière.

35. La géométrie d'une portion limitée de l'espace opposée à la géométrie de l'espace tout entier. Conformément à ces deux dernières classes de fonctions, on peut diviser la géométrie en deux parties[276]):

1°) *géométrie dans une portion d'espace limitée* ou *géométrie infinitésimale,* ou encore *géométrie différentielle* au sens étroit du mot[277]), correspondant à l'emploi des éléments de fonction.

2°) géométrie de l'espace tout entier, correspondant à l'emploi des fonctions totales.

Cette division est applicable à toutes les branches de la géométrie [III 5, **3**].

A la première partie appartiennent la plupart des applications du calcul différentiel et du calcul intégral à la géométrie [voir les différents articles de géométrie infinitésimale, en partic. III 29 et III 30]. Ici on n'a affaire ordinairement qu'à des fonctions de variables réelles, auxquelles pour des valeurs générales des variables on impose seulement d'être dérivables un certain nombre (fini) de fois[278]). L'intro-

274) D'après *G. Lejeune-Dirichlet* [cf. II 1, **3**].

275) *K. Weierstrass,* Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen (cours ms. non publié) § 122. La définition d'une fonction de variable complexe

$$u + iv = f(x + iy)$$

fonction monogène d'après *A. L. Cauchy* [Exercices d'analyse et de phys. math. 4, Paris 1847, p. 346] et d'après *B. Riemann* [Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen komplexen Grösse, Diss. Göttingue 1851, p. 1/2; Werke (2ᵉ éd.), publ. par *H. Weber,* Leipzig 1892, p. 3/4; trad. *L. Laugel,* Paris 1898, p. 1/3] est basée au contraire sur la condition que les fonctions réelles u et v satisfassent aux équations différentielles [II 8]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cette définition est plus générale que celle de *K. Weierstrass.* Les fonctions monogènes mais non analytiques ont été envisagées récemment par *E. Borel* [C. R. Acad. sc. Paris 154 (1912), p. 568, 1491; Bull. Soc. math. France 40 (1912), p. 205].

276) *F. Klein,* Vorlesungen über höhere Geometrie (autographié) **1**, Göttingue 1892/3; réédité Göttingue 1907, p. 6 et suiv.

277) C'est-à-dire comme application du calcul différentiel et du calcul intégral à la géométrie, et non comme contrepartie de la „géométrie algébrique"

duction de variables complexes permet parfois de traiter les questions d'une façon plus commode et plus élégante par un algorithme convenable [cf. seconde note du n° **19**]; c'est ce qui arrive par exemple dans la *théorie de la représentation conforme des surfaces* [II 8; III 33] et dans la théorie des surfaces minima [III 32; III 33]; en particulier, pour les dernières, dans les formules dites *formules de Weierstrass.*

A cette branche de la géométrie appartiennent encore la plupart des recherches de *S. Lie* sur les groupes de transformations [II 23] et les transformations de contact [III 34]; *S. Lie*, en effet, n'a envisagé d'ordinaire que des fonctions à domaine de valabilité limité, sans prolongement analytique, et parfois même simplement une notion de fonction tout à fait imprécise[279]).

La géométrie de l'espace tout entier traite, au contraire, des questions où les figures géométriques sont considérées dans toute leur extension. Les fonctions qui y interviennent doivent donc se laisser prolonger, en partant de leurs éléments, en des fonctions totales bien définies, ce qui nécessite le caractère analytique. La géométrie de l'espace tout entier peut être appelée aussi *géométrie des figures analytiques*, c'est-à-dire des figures définies par des fonctions analytiques, ou des équations analytiques[280]). Dans le cas de variables complexes, ces figures possèdent la propriété caractéristique d'être définies complètement et d'une façon unique par une portion limitée quelconque (mais finie): c'est une conséquence immédiate du principe de la représentation des fonctions analytiques par des séries entières, et de leur prolongement analytique. Dans la géométrie de l'espace tout entier il y a donc intérêt à attribuer aux variables, de prime abord, une variabilité complexe, c'est-à-dire de regarder dans les figures les éléments réels et les éléments imaginaires comme tout à fait équivalents.

278) Cf. par ex. *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale, Pise 1894, p. 1, 60; (2e éd.) 1, Pise 1902; 2, Pise 1903; 3, Pise 1909; trad. allemande par *M. Lukat*, Leipzig 1910.

279) La géométrie infinitésimale a des rapports remarquables

1°) avec la géodésie [VI 1 et VI 2], à cause des théories relatives à une région limitée de la surface de la terre, dont s'occupe cette dernière;

2°) avec la physique mathématique, en particulier avec la théorie du potentiel [II 24] où l'on a constamment affaire à des représentations et à résoudre des problèmes de valeurs bordées;

3°) avec la mécanique analytique, puisque plusieurs problèmes de mécanique ont leur signification dans la géométrie infinitésimale. Ainsi, par exemple, le „principe de la moindre action“ de *C. G. J. Jacobi* [IV 1, **55**, **56**] conduit à la détermination des lignes géodésiques dans un espace où les variables de *J. L. Lagrange* sont envisagées comme des coordonnées.

280) Définition précise dans l'article II 8.

Parmi les fonctions analytiques les fonctions „algébriques“ [II 10] occupent une place particulière. Leur importance se manifeste dans la „théorie des figures algébriques“, c'est-à-dire des figures représentées par un système d'équations algébriques entre les coordonnées d'un élément variable; dans ces équations peuvent aussi entrer (mais ceci n'est pas essentiel) un nombre fini quelconque de paramètres arbitraires[281]). Dans la plupart des recherches sur les figures algébriques, par exemple dans leur détermination par un nombre suffisant de points, ou dans la détermination des points d'intersection de deux figures, nous considérons dans ces figures toute leur extension.

La géométrie algébrique est analysée dans les volumes III_3 et III_4, tandis que l'étude des courbes et surfaces transcendantes fait l'objet des articles III 31 et III 32.

Dans l'article actuel nous n'avons envisagé jusqu'au n° **33** que des question de géométrie de l'espace tout entier. Dans ce qui suit, nous allons jeter un coup d'œil d'ensemble sur la géométrie infinitésimale.

36. „Application de l'analyse à la géométrie“ de Monge. „Développements de géométrie“ de Dupin. Les recherches les plus anciennes relatives à la géométrie infinitésimale des courbes et surfaces [III 29 et III 30] remontent [cf. n° **5**] au 18ième siècle. A propos des courbes, apparaissent dès l'origine les notions de tangente, de plan osculateur (d'une courbe gauche), de cercle de courbure, de développée, de longueur d'arc. Quant aux surfaces, ce sont surtout les relations de courbure qui ont fait d'abord l'objet de recherches; ces recherches sont dues à *L. Euler*[282]) et à *J.-B. M. Meusnier*[283]). Mais la géométrie infinitésimale ne reçut son plein essor qu'à la suite de la publication de l'„Application de l'analyse à la géométrie“ par *G. Monge* et des „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ par *C. F. Gauss*[284]).

Dans l'ouvrage de *G. Monge* il faut mettre en relief les points suivants:

281) *C. Segre*, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito [Ann. mat. pura appl. (2) 22 (1894), p. 41].

282) Recherches sur la courbure des surfaces [Hist. Acad. Berlin 16 (1760), éd. 1767, p. 119/43 [1763]].

283) Recherches sur la courbure des surfaces [Mém. présentés Acad. sc. Paris (1) 10 (1785), p. 477/510 [1776]].

284) Présenté à l'académie des sciences de Göttingue en 1827; publié Commentat. Soc. Gott. recent. 6 (1823/7), éd. Göttingue 1828, math. mém. n° 4, p. 99 et suiv.; Werke 4, Göttingue 1873, p. 217 et suiv.; *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften n° 5, publ. par *A. Wangerin*, Leipzig 1889; (3e éd.) Leipzig 1905.

1°) La continuation des recherches sur la courbure d'une surface dans le voisinage d'un point quelconque et sur plusieurs questions qui s'y rattachent, en particulier la détermination des surfaces dont les deux rayons de courbure satisfont à une condition donnée (surfaces minima, surfaces dont l'un des rayons de courbure est constant, etc.).

2°) La *théorie des enveloppes* avec leurs caractéristiques et arêtes de rebroussement; parmi elles, développables, surfaces-canal, surfaces d'égale pente.

3°) L'application de la théorie des surfaces et surtout de la théorie des enveloppes à l'interprétation géométrique des équations aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables. *G. Monge* montre qu'il est parfois plus commode et plus utile, pour la détermination d'une famille de surfaces, d'avoir une équation différentielle que d'avoir une équation en termes finis; il montre aussi comment on peut non seulement passer de la seconde à la première, mais aussi inversement de la première à la seconde. Ce dernier passage équivaut à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles donnée.

Parmi les continuateurs de *G. Monge* dans les recherches de géométrie infinitésimale, on doit citer en premier lieu *Ch. Dupin*[285]) qui introduisit la notion de *tangentes conjuguées* en un point d'une surface, la notion de lignes à *tangentes asymptotiques* et la notion de l'*indicatrice* qui porte son nom, c'est-à-dire des notions „projectives" qui ont acquis un rôle prépondérant dans les recherches ultérieures. On lui doit aussi le théorème suivant: „les surfaces d'un système triple orthogonal se coupent suivant leurs lignes de courbure".

37. „Disquisitiones generales" de Gauss. *C. F. Gauss* introduit deux notions fondamentales auxquelles son nom est resté attaché:

1) Les *coordonnées curvilignes* sur une surface.

2) La *courbure totale* d'une surface en un point quelconque, qu'il définit comme l'inverse du produit des deux rayons de courbure principaux de la surface en ce point.

Dans l'expression de l'élément linéaire de la surface par les coordonnées curvilignes se présentent les coefficients E, F, G, dont il a fait ressortir l'importance fondamentale pour la théorie des surfaces applicables l'une sur l'autre [III 33]; on peut exprimer la courbure de Gauss au moyen de ces coefficients et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées.

285) Développements de géométrie, Paris 1813.

C. F. Gauss étudie en même temps les surfaces en se plaçant à un point de vue tout nouveau; il les considère comme des corps infiniment minces, des tissus flexibles et inextensibles; dans leurs déformations la courbure totale en un point quelconque reste invariante, et par suite l'égalité des courbures totales aux points correspondants est une condition nécessaire pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre. Mais cette condition n'est suffisante que pour les surfaces à courbure totale constante; dans les autres cas, il faut encore d'autres conditions, comme l'a fait remarquer *E. F. A. Minding*[286]) [III 33].

L'équation différentielle des lignes géodésiques sur une surface a été également établie par *C. F. Gauss* et utilisée par lui pour d'autres problèmes (coordonnées polaires, cercles géodésiques, courbes parallèles) [III 30].

38. Progrès de la théorie infinitésimale des courbes et surfaces. Les recherches de *G. Monge* et de *C. F. Gauss* exercèrent pendant plusieurs dizaines d'années une grande influence sur le développement de la géométrie infinitésimale, et elles sont aujourd'hui encore fondamentales pour la théorie infinitésimale des courbes et des surfaces [III 29 et III 30].

La théorie, due à *C. F. Gauss*, des coordonnées curvilignes sur une surface a donné aux mathématiciens l'idée de construire une théorie analogue pour l'espace (considéré comme une variété à trois dimensions). C'est ce que fit d'abord *G. Lamé*[287]) par l'introduction des coordonnées elliptiques; plus tard il s'éleva à une théorie générale des coordonnées curvilignes de l'espace[288]) et à la notion des paramètres différentiels qui lui avait été suggérée par ses études de physique mathématique. Il faut de même regarder l'„Habilitationsschrift" de *B. Riemann*, „Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen" [cf. n° 28], comme un premier pas vers l'extension de la théorie de *C. F. Gauss* au cas de n dimensions.

Il existe plusieurs traités et exposés généraux de la géométrie infinitésimale des courbes et surfaces [cf. III 29 et III 30], sans compter les traités de calcul différentiel et de calcul intégral [voir la bibliographie à la fin du volume 1 du tome II], qui font plus ou moins de place aux applications géométriques. Tous ces exposés sont presqu'exclusive-

286) J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 370.

287) Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 5 (1838), p. 174/219; J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 147.

288) Leçons sur la théorie des coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859.

ment analytiques; des recherches synthétiques de géométrie infinitésimale n'ont été faites jusqu'ici que dans une très faible mesure[289]).

*Il ne peut être question de rappeler ici, même sommairement, les autres directions suivant lesquelles la géométrie infinitésimale s'est développée et les problèmes les plus importants que l'on a ainsi étudiés. Nous renvoyons pour cela aux articles de géométrie infinitésimale d'une part, et d'autre part aux œuvres magistrales, telles que les traités de *G. Darboux* et de *L. Bianchi*[290]).*

Nous nous contenterons de donner ici un aperçu sur les recherches de *S. Lie*; ce géomètre occupe en effet une place tout à fait particulière dans le dernier tiers du 19ième siècle, et sa production appartient en grande partie à la géométrie infinitésimale.

39. Aperçu général sur les recherches de Lie. Dans ses recherches, *S. Lie* est parti de cette conception, qu'il serait désirable (à l'exemple de *G. Monge*) de mettre les notions géométriques au service de l'analyse. Des recherches géométriques le conduisirent dès 1869 à considérer quelques groupes continus finis. Puis il remarqua que la plupart des équations différentielles ordinaires dont l'intégration est possible par les méthodes anciennes restent invariantes par certains groupes de transformations, qui peuvent être facilement indiqués, et que ces méthodes d'intégration consistent même essentiellement à tirer parti de cette propriété; il remarqua aussi que la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre peut être interprétée comme une „géométrie des éléments de surface“ où la notion de „transformation de contact“ joue le rôle fondamental. C'est de là que sont nées comme sciences autonomes:

1°) La théorie générale des groupes continus finis [II 23];

2°) La théorie générale des transformations de contact [III 31];

3°) La théorie géométrique des équations différentielles [III 35].

289) *W. Schell*, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung, Leipzig 1859; (2° éd.) considérablement revue et augmentée, Leipzig 1898.

290) *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces 1, Paris 1887; 2, Paris 1889; 3, Paris 1894; 4, Paris 1896; *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale, Pise 1894; (2e éd.) 1, Pise 1902; 2, Pise 1903; 3, Pise 1909; trad. allemande par *M. Lukat*, Leipzig 1910. Voir aussi l'étude sur le développement des méthodes géométriques, lue par *G. Darboux*, au Congrès de St-Louis en 1904 et surtout le rapport du même auteur au 4ième congrès international des mathématiciens [Atti del quarto congresso internazionale dei matematici in Roma 1908, vol. 1, éd. Rome 1909, p. 105]; Les origines, les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale.*

Ces théories peuvent être rangées dans la géometrie infinitésimale, puisqu'on n'y a affaire, en général, qu'à des fonctions à domaine de valabilité limitée.

La théorie des groupes continus finis date des années 1873 et 1874; elle fut plus tard exposée dans les trois volumes de la „Theorie der Transformationsgruppen“[291]), dont le premier et le troisième contiennent la théorie générale de ces groupes. Les notions fondamentales de cette théorie sont celles de *transformation infinitésimale*, de la *composition du groupe*, et de sa *définition par des équations différentielles*.

La notion de transformation de contact s'est présentée à *S. Lie*[292]) tout d'abord géométriquement en poursuivant les idées de *J. Plücker* sur les transformations dans l'espace avec changement de l'élément fondamental. Dans l'espace à trois dimensions ce sont les transformations des cinq variables

$$x,\ y,\ z,\quad p=\frac{dz}{dx},\quad q=\frac{dz}{dy}$$

qui transforment en elle-même l'équation

$$dz-p\,dx-q\,dy=0$$

c'est-à-dire qui vérifient identiquement l'équation

$$dz'-p'dx'-q'dy'=\varrho(dz-p\,dx-q\,dy).$$

Dans ces transformations aux surfaces correspondent en général des surfaces (exceptionnellement des lignes ou des points), et à des surfaces tangentes d'autres surfaces tangentes.

Le second volume de la „Theorie der Transformationsgruppen“ contient la théorie générale des transformations de contact à n variables, de leurs invariants et des groupes continus finis de transformations de contact. Pour $n=2$ et $n=3$ les transformations de contact sont traitées géométriquement dans la „Geometrie der Berührungstransformationen“[10]).

La théorie géométrique des équations différentielles part de la con-

291) *S. Lie* et *F. Engel*, Theorie der Transformationsgruppen 1, Leipzig 1888; 2, Leipzig 1890; 3, Leipzig 1893. Voir aussi *S. Lie*, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, publ. par *G. Scheffers*, Leipzig 1893.

292) Over en classe geometriske Transformationer [Forhandlinger Videnskabs Selskabet Christiania 1871, éd. 1872, p. 67]; Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe [Math. Ann. 5 (1872), p. 145/256, en partic. p. 147/63].

ception de *G. Monge*[8]). L'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0$$

fait correspondre à chaque point (x, y) du plan une ou plusieurs directions déterminées $y' = \frac{dy}{dx}$; „intégrer" l'équation équivaut à „déterminer les courbes qui en tout point ont pour tangente une des directions y' correspondantes", c'est-à-dire à „grouper en courbes les ∞^2 éléments (x, y, y') qui vérifient l'équation $f = 0$": ces courbes, à l'exception des intégrales *singulières*, sont représentées par l'équation intégrée

$$F(x, y, k) = 0.$$

Cette manière de voir est en corrélation avec la théorie des connexes de *A. Clebsch*, car tout connexe d'un plan

$$\varphi(x, y, u, v) = 0$$

entraîne une équation différentielle qui représente son intersection (sa „coïncidence") avec le connexe principal

$$ux + vy + 1 = 0,$$

c'est-à-dire une équation dont les courbes intégrales sont définies par ce fait que, en chacun de leurs points, point et tangente vérifient l'équation du connexe $\varphi = 0$[293]).

Si un groupe de transformations transforme en elle-même l'équation différentielle donnée, le faisceau ∞^1 des courbes intégrales est également invariant, et cette propriété peut être utilisée pour l'intégration de l'équation différentielle[294]). Ces considérations s'appliquent aussi, *mutatis mutandis*, aux équations différentielles ordinaires

$$f(x, y, z, y', z') = 0$$

et aux équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

où

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}$$

qui font correspondre à chaque point (x, y, z) le cône enveloppé par les plans

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0,$$

293) *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, publ. par *F. Lindemann* 1, Leipzig 1876, p. 963, 1014 (section 7); *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie (autographié) 1, Göttingue 1892/3, p. 244 et suiv.; réédité Göttingue 1907.

294) Cette conception remonte aux années 1871 à 1874 et fut plus tard développée dans *S. Lie*, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, publié par *G. Scheffers*, Leipzig 1891.

en particulier un faisceau de plans dans le cas d'une équation linéaire. Le problème est donc celui-ci: grouper en surfaces les ∞^4 éléments (x, y, z, p, q) qui vérifient l'équation $f = 0$.

Autres généralisations analytiques.

40. La notion générale de courbe envisagée analytiquement [III 2]. D'autres domaines de la géométrie ont été abordés de nos jours par des méthodes analytiques; citons particulièrement l'„analysis situs" qui s'occupe des propriétés des figures géométriques (courbes, surfaces....) invariantes par rapport à toute déformation continue [III 6].

Ici on rencontre d'abord la *notion la plus générale de courbe et de surface*. La définition des courbes et surfaces dépasse notre intuition, puisque celle-ci n'a qu'une précision limitée. Pour rendre la définition exacte, il faut étayer l'intuition par des axiomes précis [cf. nº **1**], ce que l'on peut faire d'une part par la géométrie analytique, d'autre part par les développements récents de la théorie des ensembles [I 7]. L'un des problèmes les plus importants de l'analysis situs consiste précisément à éclaircir les relations existant entre les expressions analytiques et géométriques des mêmes notions et les propositions concernant la théorie des ensembles.

La définition analytique de la courbe plane par des fonctions

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

continues dans un certain intervalle réel $a < t < b$ s'est révélée trop générale. Il nous suffira d'indiquer l'exemple de la *courbe de Peano*[295]) qui recouvre toute une portion de surface, cas éclairci géométriquement par *D. Hilbert*[296]) et *F. Klein*[297]) [I 7, **5**; III 29], et le cas de l'épicycloïde [III 29; III 31] dont les points, lorsque les rayons des deux cercles générateurs sont dans un rapport irrationnel, forment, dans un anneau circulaire déterminé, un ensemble partout dense, sans que tout point de cet anneau fasse partie de la courbe. Si nous voulons nous en tenir à la notion de „courbe empirique", il y a donc intérêt à restreindre la définition analytique générale.

K. Weierstrass dans ses cours a déjà distingué les différentes espè-

295) Math. Ann. 36 (1890), p. 157.

296) Math. Ann. 38 (1891), p. 459.

297) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (cours autographié Göttingue 1901), éd. Leipzig 1902, p. 241 et suiv.; (nouv. éd.) Leipzig 1907.

ces de courbes, en s'appuyant sur leur définition analytique. Cette distinction a été reprise par *C. Jordan*[298]) avec plus de détails.

C. Jordan pose comme conditions que la courbe définie par les équations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

n'ait pas de points doubles dans l'intervalle $a < t < b$, c'est-à-dire que pour aucun couple de valeurs $t_1 \gtrless t_2$ (comprises chacune entre a et b) on n'ait en même temps

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \quad \psi(t_1) = \psi(t_2);$$

et en outre que la courbe soit fermée, c'est-à-dire que

$$\varphi(a) = \varphi(b), \quad \psi(a) = \psi(b).$$

Il montre alors que la courbe ainsi définie possède une des propriétés les plus importantes des courbes empiriques fermées: à savoir qu'elle *partage le plan en deux régions*, une région „intérieure" et une région „extérieure", conformément à la conception ordinaire [III 1, **20**; III 2, **8**].

Cette proposition rattache la définition analytique des courbes aux notions géométriques qui proviennent de la théorie des ensembles. Mais la réciproque du théorème de Jordan n'est pas vraie. Une figure de points qui partage le plan en une région extérieure et une région intérieure n'est pas toujours une courbe continue

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

La notion géométrique de „limite de région" ne se réduit à celle de courbe (définie analytiquement) que si d'autres conditions sont encore remplies, comme l'a fait remarquer *A. Schoenflies*[299]) [cf. III 2, **9**].

De plus la courbe de Jordan ne jouit pas, en général, des autres propriétés des courbes empiriques. La notion de „longueur d'arc" sur cette courbe ne peut être introduite que lorsque $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions bornées[300]), c'est-à-dire lorsque dans l'intervalle considéré les sommes de leurs accroissements positifs et négatifs, prises séparément, sont finies. Et, pour que la courbe ait une tangente, ou une courbure déterminée, il faut encore d'autres conditions; ainsi pour qu'elle ait une tangente il est suffisant, mais non nécessaire, que φ et ψ soient dérivables une fois dans l'intervalle considéré; et pour

298) Cours d'analyse, (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 90 et suiv.

299) Nachr. Ges. Gött. 1902, p. 185; Math. Ann. 58 (1904), p. 195 (voir en partic. § 7 et suiv.); 59 (1904), p. 129; 62 (1906), p. 286; Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 15 (1906), p. 557; Nachr. Ges. Gött. 1907, p. 28.

300) *C. Jordan*, Cours d'analyse, (3e éd.) 1, Paris 1909, p. 99 et suiv.

qu'elle ait une courbure il est suffisant, mais non nécessaire, que φ et ψ soient dérivables deux fois dans l'intervalle considéré, ce qui nous ramène aux éléments fonctionnels [n° **34**] c'est-à-dire à la géométrie différentielle[301]).

Pour l'étude axiomatique de la géométrie d'après *D. Hilbert*[302]), qui prend pour base la notion de groupe, comme l'avait déjà fait *H. von Helmholtz* [n° **28**], mais ne suppose pas dérivables les fonctions qui définissent le mouvement, on consultera l'article III 1, nos **39** à **42**.

Dans ces dernières années, d'autres développements analytiques et synthétiques ont fait l'objet de nombreux travaux [cf. III 2] mais nous ne les mentionnerons pas ici, puisque notre but était simplement de donner un aperçu général sur les développements des diverses méthodes géométriques dont on a fait usage dans le courant du 19ième siècle.

301) *F. Klein* dit plutôt „aux éléments fonctionnels réguliers" [Anwendung[297]), p. 255].

302) Math. Ann. 56 (1903), p. 381.

III 4. GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **H. G. ZEUTHEN** (COPENHAGUE)
PAR **M. PIERI** (PARME).

Généralités.[1])

1. Objet de la géométrie énumérative. Un grand pas est fait dans la solution d'un problème qui dépend d'une équation algébrique, quand on connaît le degré de cette équation. Les racines de cette équation algébrique, exprimées par les coefficients, ne peuvent en effet appartenir alors qu'à certaines classes connues de quantités irrationnelles; et la détermination des coefficients revient ensuite assez souvent à un problème beaucoup plus simple. Si l'équation est à plusieurs inconnues, sa forme rationnelle entière est encore déterminée quand on connaît son degré [I 9] ou bien encore son degré par rapport à chacune des inconnues; la connaissance d'un nombre fini de valeurs correspondantes des inconnues permet ensuite de calculer les coefficients.

Il y a donc grand intérêt à posséder des méthodes permettant de trouver le degré d'une équation en dehors de tout calcul algébrique. Et puisque le degré d'une équation est un nombre égal au nombre des racines, on voit que rechercher le degré revient à dénombrer les racines. Dans cette énumération, on doit compter r fois chaque racine d'ordre de multiplicité r; et on ne doit faire aucune distinction entre les racines réelles et les racines imaginaires. On doit, de plus, regarder l'infini ∞ comme racine multiple d'ordre r de multiplicité chaque fois qu'en attribuant des valeurs spéciales aux paramètres contenus dans l'équation, le degré de celle-ci par rapport à l'inconnue envisagée s'abaisse de r unités[2]). Si d'ailleurs on fait usage de variables homo-

1) Les considérations générales qui font l'objet de ce chapitre [nos **1** à **4**] sont reprises et développées dans *H. G. Zeuthen,* Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, (sous presse) Leipzig 1914, chap. 1.

2) Voir cependant n° **13** note 99, où l'on mentionne un cas où *M. Chasles* se refuse à se placer complètement au point de vue projectif dont nous parlons ici.

gènes, ces r solutions apparaîtront d'elles-mêmes. Enfin il faut observer qu'une équation algébrique, bien que ne possédant en général qu'un nombre fini n de solutions, peut néanmoins en avoir une infinité; ceci a lieu chaque fois qu'elle est satisfaite identiquement.

C'est surtout en géométrie qu'on a employé de telles énumérations; et c'est précisément pour se conformer au langage et à l'esprit géométrique que l'on parle de points, de droites, etc. *imaginaires* ou *à l'infini* toutes les fois que les quantités déterminant la position d'un point, d'une droite, etc. prennent des valeurs imaginaires ou expriment des distances infiniment grandes. Cette façon de parler géométrique s'étend même aux espaces à plusieurs dimensions [Voir l'article III 26].

2. Notions fondamentales. Théorèmes de Bézout. Non seulement la géométrie énumérative s'appuie sur la représentation algébrique, mais c'est aussi dans cette représentation algébrique qu'elle trouve son point de départ.

On appelle «courbe plane du $m^{\text{ième}}$ ordre» toute courbe représentée en coordonnées cartésiennes par une équation algébrique de degré m, et qui, par suite, rencontre en m points toute droite du plan. Le premier principe utilisé pour les recherches ultérieures fut le théorème de Bézout [I 9, **56**; III 19]: «deux courbes d'ordres respectifs m_1 et m_2 se coupent en $m_1 m_2$ points». Mais combien de fois faudra-t-il compter un point commun parmi les $m_1 m_2$ points d'intersection?

La règle suivante, due à *G. H. Halphen*[3]), fournit la réponse à cette question, à condition qu'on ait, par un changement de variables, remplacé chaque point d'intersection à l'infini s'il y en a, par un point proprement dit:

«Le nombre des points d'intersection de deux courbes planes qui sont confondus en un point commun A (on pourrait dire *absorbés* par le point A) est égal à la somme des ordres infinitésimaux de tous les segments situés sur une droite dont la distance à A est infiniment petite du premier ordre, et ayant leurs deux extrémités sur les deux courbes.»

De même on introduit la notion générale de surface du $m^{\text{ième}}$

3) Bull. Soc. math. France 3 (1874/5), p. 76; Mém. présentés Acad. sc. Institut France (2) 26 (1879), mém. n° 2, p. 13 [1874]. Dans les articles III 19 et III 28 (géométrie plane) ainsi que III 23 et III 28 (géométrie dans l'espace) se trouvent exposés de nombreux travaux ayant ce même objet, en particulier ceux de *M. Nöther.* Nous nous bornons ici, ainsi qu'au n° **3**, à mentionner les règles se prêtant particulièrement aux énumérations. Les ordres d'infiniment petits qu'on y rencontre s'obtiennent souvent à leur tour par des énumérations convenables.

ordre dans l'espace ordinaire [ainsi que celle plus générale de variété à $r-1$ dimensions dans l'espace à r dimensions]: c'est l'ensemble défini par une équation générale de degré m entre les coordonnées d'un point variable. Le nombre des points communs à trois (ou à r) de ces ensembles pourra se déterminer par une généralisation convenable du théorème de Bézout. Mais tandis que les propriétés d'une courbe plane ou d'une surface algébrique, complète ou décomposée, se retrouvent toujours dans la courbe plane ou la surface algébrique générale du même ordre, ce fait n'a plus lieu pour les courbes gauches ni en général, pour les variétés dépendant de plusieurs équations. En effet, les courbes gauches du $m^{\text{ième}}$ ordre, bien que possédant des propriétés dépendant uniquement du nombre m (par ex. le nombre de leurs points d'intersection avec une surface donnée), se classifient en différentes espèces [voir III 25] lesquelles, pour des valeurs assez grandes de m, ne sont plus caractérisées ni par ce seul nombre, ni par ce nombre et celui des points doubles apparents, ni, semble-t-il, par une suite finie de nombres[4]). On peut en dire autant de toute variété définie comme intersection de plusieurs variétés à plus de trois dimensions.

3. Les concepts de „général" et de „spécial"; formules de Plücker, Cayley, Salmon, etc. On appelle *classe* d'une courbe plane le nombre de ses tangentes qui passent par un point donné du plan. Conformément au principe de dualité, la définition d'une courbe plane par sa classe a le même degré de généralité que sa définition par son ordre.

Étant donnée une courbe plane du $m^{\text{ième}}$ ordre, par un point de son plan on peut toujours mener $m(m-1)$ droites telles que sur chacune d'elles, deux points d'intersection avec la courbe sont réunis en un seul. *J. V. Poncelet*[24]) qui a trouvé ce résultat donne aussi la raison du paradoxe[5]) qui consiste en ce qu'une courbe serait, en

4) Voir *G. H. Halphen,* Bull. Soc. math. France 2 (1873/4), p. 69.

Comme l'a fait remarquer *Ed. Weyr* [Diss. Prague 1873] on a, par exemple, deux espèces de courbes gauches du $9^{\text{ième}}$ ordre tout à fait distinctes quoique ayant les unes et les autres 18 points doubles apparents.

De là résulte que deux courbes gauches du même ordre m, ayant toutes deux le même nombre de points doubles apparents (ou du même genre p) peuvent avoir des propriétés bien différentes, même parmi celles qui rentrent dans le cadre de la géométrie énumérative. Une énumération relative à une courbe gauche ne conduira donc pas toujours à des expressions ne dépendant que de m et h (ou de m et p). Voir à ce sujet n° 9.

5) *J. V. Poncelet,* Traité des propriétés projectives des figures, (1^{re} éd.) Paris 1822; (2^e éd.) 1, Paris 1865; 2, Paris 1866, p. 67, 228; J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 12; 8 (1832), p. 392. C'est cette contradiction apparente qui avait amené *J. D. Gergonne* [Bull. sc. math. astr. phys. chim. 9 (1828), p. 302; 10 (1828), p. 285] à admettre que la classe de chaque courbe plane est égale à son ordre.

général, à la fois d'une classe plus élevée que son ordre et d'un ordre plus élevé que sa classe.

Les $m(m-1)$ droites en question seront en effet autant de tangentes à la courbe regardée comme cas spécial de la courbe générale du $m^{\text{ième}}$ ordre; tandis que si on l'envisage comme courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, on ne doit plus compter parmi ses tangentes que celles qui constituent, dans leur ensemble, une variété irréductible. Par suite, on doit diminuer le nombre des tangentes, parce que certaines des droites en question passent par un point double, ou multiple; et, dualistiquement, l'ordre d'une courbe est abaissé par la présence de tangentes singulières.

Ainsi le paradoxe s'explique par le fait que si $m>2\,(n>2)$, la courbe est nécessairement affectée de quelque point singulier ou de quelque tangente singulière. Ici, comme ailleurs [n^{os} **9, 20, 21, 31**], surtout lorsqu'il s'agit de figures définies par des nombres, les attributs de „général" et „spécial" sont à employer ou non, suivant la façon dont la question se pose[6]).

C'est par des considérations de cette nature que *J. Plücker* fut amené à introduire dans ses formules [III 19] envisagées comme générales, les quatre singularités, dites *singularités pluckériennes,* qui doivent se présenter pour une courbe plane quand on donne des valeurs assez grandes à sa classe ou à son ordre, savoir:

1°) points doubles,
2°) points de rebroussement,
3°) tangentes doubles,
4°) tangentes stationnaires.

Afin de les rendre valables aussi dans le cas d'une courbe douée de singularités arbitraires, *G. H. Halphen* [III 19] a donné aux règles exprimées par les formules de Plücker les formes suivantes, assez commodes pour les énumérations[7]):

«Si, pour chaque droite a, issue d'un point P donné hors de la courbe, et rencontrant cette courbe en des points confondus, on calcule

6) C'est pour celà que *H. G. Zeuthen* [Math. Ann. 4 (1871), p. 633; 10 (1876), p. 446], en définissant les caractères projectifs d'une surface, distingue nettement les singularités d'une surface en singularités provenant de la spécialisation de la surface envisagée comme un lieu de points et en singularités provenant de la spécialisation de la surface envisagée comme une enveloppe de plans.

7) Voir les mémoires cités n° **2**, note 3.

la somme des ordres de toutes les cordes infiniment petites déterminées par la courbe sur une autre droite issue du même point et inclinée d'un angle infiniment petit du premier ordre sur a, le double de cette somme fera connaître le nombre de fois que la droite a doit être comptée parmi les $m(m-1)$ tangentes menées du point P à la courbe». Il est facile d'énoncer la règle qui se déduit de la précédente par dualité; nous en laissons le soin au lecteur[8]).

«En désignant par m et n l'ordre et la classe d'une courbe plane, par μ la multiplicité ponctuelle d'un de ses éléments ou cycles [III 19], c'est-à-dire le nombre des points confondus où il est coupé par une droite passant par le point singulier et ne coïncidant pas avec la tangente, et par ν la multiplicité tangentielle de cet élément ou cycle, c'est-à-dire le nombre qui correspond à μ par dualité, on a toujours

$$3(n-m)=\sum(\nu-\mu),$$

la somme étant étendue à tous les cycles pour lesquels $\nu \gtrless \mu$.» A cette proposition se rattache la règle suivante[9]):

«Un cycle dont les multiplicités sont μ et ν est coupé par sa tangente en $\mu+\nu$ points confondus.

C'est précisément dans le but de rendre applicables à toute courbe algébrique les formules premières de *J. Plücker* que l'on a imaginé[10]) les équivalents *pluckériens* d'une singularité supérieure; ils indiquent pour combien de points doubles ou de rebroussement, et pour combien de tangentes doubles, ou stationnaires, on peut compter cette singularité, de façon que les trois formules de Plücker et la formule du genre [nº **18**] soient toujours vérifiées. A l'origine l'intérêt que l'on attachait à cette énumération n'allait pas au-delà de ces formules; il s'accrut

8) Nous ferons souvent de même dans ce qui suit, en particulier quand l'application du principe de dualité pour passer d'une propriété d'une figure à la propriété correspondante de la figure corrélative ne peut offrir aucune difficulté.

9) *G. H. Halphen*[5]); *O. Stolz,* Math. Ann. 8 (1875), p. 415; *M. Nöther,* id. 9 (1876), p. 166.

F. Schuh [K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen natuurk. Afdeeling 13 (1904/5), p. 133]; *R. Mehmke* [Z. Math. Phys. 49 (1903), p. 62] et *H. G. Zeuthen* [Lehrbuch[1]), nºˢ 14 et 15] appliquent la règle de *G. H. Halphen* à une courbe gauche de l'espace ordinaire ou d'un espace à $n>3$ dimensions.

10) C'est *A. Cayley* [Quart. J. pure appl. math. 7 (1866), p. 212; Papers 5, Cambridge 1892, p. 520] qui a, le premier, envisagé ces „équivalents". Mais il faut surtout signaler à cet égard un mémoire de *H. J. S. Smith,* Proc. London math. Soc. (1) 6 (1874/5), p. 153/82; Papers 2, Oxford 1894, p. 101/31. Cf. III 19.

W. A. Versluys [K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen natuurk. Afdeeling 14 (1905/6), p. 482; 15 (1906/7), p. 342; Archives Teyler (2) 10 (1906), p. 253] a effectué une recherche analogue dans le cas des courbes gauches.

quand *A. Brill* démontra la possibilité d'obtenir au moins chaque courbe rationnelle douée de singularités supérieures, comme limite de courbes où toutes les singularités pluckériennes indiquées par les équivalents se présentent séparément[11]).

A côté des formules de *J. Plücker* apparaissent d'abord celles de *A. Cayley* pour les courbes gauches et les surfaces développables [III 25] ainsi que leur généralisation aux espaces à plusieurs dimensions [III 26], puis celles de *G. Salmon* et *A. Cayley* et autres concernant les surfaces [III 23]. On a aussi établi des relations numériques relatives aux complexes et aux congruences de droites [III 27] ainsi que pour les transformations géométriques, surtout *crémoniennes* [III 28]; et en général pour les différentes configurations de points, droites, plans etc.

Ces formules s'obtiennent par l'Analyse aussi bien que par les méthodes énumératives dont nous parlerons plus loin; toutefois les résultats sont toujours du domaine de la géométrie énumérative et pourront être utilisés à leur tour, pour en déduire d'autres résultats de même nature. C'est bien dans ce sens que l'on a toujours employé le théorème de Bézout; que des formules de Plücker on a tiré celles de Cayley; que les formules de Salmon ont fait découvrir immédiatement les 27 droites d'une surface du troisième ordre [III 24] et ainsi de suite.

4. Emploi synthétique de résultats acquis antérieurement. A une époque où il n'était pas encore rigoureusement démontré, on

11) Math. Ann. 16 (1880), p. 348.

Il ne faudrait pas conclure de là que, en géométrie énumérative, chaque singularité peut toujours être représentée par ses équivalents pluckériens, ou chaque courbe par les nombres de Plücker qui en découlent. En effet, parmi les courbes affectées des mêmes nombres de Plücker, il y en a vraisemblablement qui sont d'espèces tout à fait différentes [cf. nºˢ **2** et **9**]. D'autre part, lorsqu'on envisage une courbe comme un cas spécial d'une autre courbe n'ayant que des singularités plückériennes, il arrive parfois que les solutions d'un problème par rapport à des courbes douées de singularités supérieures ne se présentent qu'associées avec des solutions étrangères. Une troisième raison s'ajoute d'ailleurs aux deux précédentes: un problème énumératif peut fort bien ne viser que des courbes qui tout en appartenant à une espèce définie par ses nombres de Plücker constituent dans cette espèce une classe spéciale définie par des modules particuliers [cf. nº **17**, notes 134, 136 et, au nº **32**, note 249, les théorèmes de *G. H. Halphen* à ce sujet]. On peut enfin remarquer que ce ne sont pas toujours les mêmes équivalents plückériens qui sont utiles dans l'étude de courbes se présentant comme des cas spéciaux d'autres courbes ayant même ordre et même classe qu'elles, sans avoir cependant le même genre [cf. *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 10 (1876), p. 210, 446]. On consultera aussi à ce sujet *A. Brill* et *M. Nöther,* Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit [Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/3), éd. 1894, p. 393].

trouve le théorème de Bézout déjà utilisé par *C. Maclaurin*[12]) et *W. Braikenridge*[13]) pour la détermination numérique des ordres de certaines courbes, que ces auteurs venaient de rencontrer en se proposant de généraliser la description organique des courbes du troisième ordre à point double, donnée par *I. Newton*[14]) [III 19]. *W. Braikenridge*, par exemple, part du théorème:

«Si les trois côtés d'un triangle ABC tournent autour de trois points fixes E, F, G tandis que les sommets A et B glissent le long de deux droites fixes a et b, le troisième sommet C décrit une section conique.»

W. Braikenridge en déduit, par le dénombrement des points d'intersection avec une droite arbitraire, que la courbe devra être d'ordre $2m$ ou $2mn$, si l'on remplace la droite a par une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré ou les droites a et b par deux courbes du $m^{\text{ième}}$ et du $n^{\text{ième}}$ degré. En cherchant ensuite de combien de manières différentes le point mobile C peut coïncider avec E ou avec F, il trouve que, dans le dernier cas, ces deux points seront multiples d'ordre mn de la courbe. Enfin, il discute les cas où des droites se détachent du lieu, par suite des positions particulières que l'on peut donner aux points fixes; et dans chacun de ces cas il détermine le degré de la courbe résiduelle.

Ce sont des procédés semblables qui ont été utilisés plus tard par *J. Steiner*[15]) dans ses recherches énumératives, commencées en 1845, et concernant soit les courbes et surfaces algébriques générales, soit les courbes et surfaces de degré peu élevé. A l'aide d'énumérations successives, il réussit à déterminer les ordres, les classes et autres caractères numériques de certaines courbes, telles que les courbes polaires, le lieu géométrique du milieu des cordes déterminées par une courbe sur les droites d'un faisceau, l'enveloppe des cordes dont les milieux se trouvent sur des courbes données, etc.

En effet, des théorèmes de Bézout et de Plücker, *J. Steiner* déduit immédiatement de nouveaux nombres utilisables à leur tour pour d'autres déterminations, et ainsi de suite. On entrevoit ce procédé à travers la succession de ses résultats donnés pour la plupart sans démonstration. L'emploi systématique de méthodes plus spéciales n'y est point indiqué, car en général il passe sur les détails; d'ailleurs il semble n'avoir suivi que très rarement une voie bien méthodique; il a plutôt recours pour chaque problème aux ressources les mieux appropriées à la nature de ce problème. Sans dédaigner l'usage des équations algébriques, il ne développe cependant les calculs que dans la mesure exigée par le but qu'il poursuit. Quelques-uns de ses artifices particuliers seront mentionnés dans la suite [n$^{\text{os}}$ **6**, **12** et **20**]. Parmi les autres, nous indiquerons la façon dont il fait apparaître le nombre m^2, comme nombre des normales que l'on peut mener d'un point P à une courbe plane du $m^{\text{ième}}$ degré; pour cela, il dénombre les points où la courbe est coupée par la courbe que l'on en déduit par une rotation infiniment petite autour du point P[16]); il se sert aussi de la transformation quadratique univoque qu'il connaissait déjà et qui lui permet de déduire le nombre des coniques ayant un contact double ou stationnaire avec une courbe donnée et passant par trois points donnés de celui des tangentes doubles ou stationnaires d'une autre courbe[17]).

En utilisant ainsi sans cesse les résultats acquis successivement, et en recourant toujours davantage aux méthodes spéciales dont il est parlé plus loin, on a pu effectuer géométriquement les recherches indiquées à la fin du n° **3**. Et pour se rendre compte du degré de développement auquel ont atteint certaines théories géométriques dans le sens énumératif, alors même que ces méthodes spéciales n'étaient qu'à peine ébauchées, il suffit de se reporter aux théories des courbes et surfaces algébriques de *L. Cremona*[18]).

12) Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, Londres 1720.

13) Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, Londres 1733.

14) Enumeratio linearum tertii ordinis, chap. 6 (publié pour la première fois en appendice à la 1re édition anglaise de son traité: Optics, Londres 1704); Opera, éd. *S. Horsley* 1, Londres 1779, p. 556.

15) Ber. Akad. Berlin 1848, p. 310/6; J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 1/105; Werke 2, Berlin 1882, p. 493/601.

16) *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 333; Werke 2, Berlin 1882, p. 621.

F. August [J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 242] et *A. Mannheim* [C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 1025; Principes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894, p. 320] ont, à leur tour, utilisé ce même procédé cinématique pour obtenir les normales à une surface algébrique issues d'un point donné, ainsi que pour étudier ses normalies (c'est sous ce nom que *A. Mannheim* désigne le lieu des normales à la surface le long d'une courbe) tracées sur la surface.

A. Beck [Math. Ann. 14 (1879), p. 207/11] démontre les formules de Plücker en appliquant systématiquement un déplacement infiniment petit, ou collinéation centrale infiniment petite. Par la même méthode il a trouvé [Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 52 (1907), p. 266] plusieurs nombres relatifs aux sécantes multiples d'une courbe gauche.

17) *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 273; Werke 2, Berlin 1882, p. 615; cf. *Th. Berner,* Diss. Berlin 1865.

J. Ph. E. de Fauque de Jonquières emploie une méthode analogue [Nouv. Ann. math. (2) 3 (1864), p. 97/111] pour déterminer les courbes d'ordre m à point $(m-1)^{\text{uple}}$ de position donnée, satisfaisant aux mêmes conditions.

18) Mem. Ist. Bologna (1) 12 (1861), p. 411; Introduzione ad una teoria

Loi de la conservation du nombre.

(Principe de continuité).

5. Principe de continuité de Poncelet[19]). Déjà dans son introduction au «traité des propriétés projectives» (paru en 1822, mais déjà en préparation depuis 1812), *J. V. Poncelet* insiste sur l'importance et la généralité d'un principe appelé par lui «principe de continuité[20])» consistant en ce que certaines propriétés géométriques ne sauraient s'altérer par suite des changements successifs quelconques des figures, pourvu que ces figures ne cessent jamais de satisfaire à une même définition générale. Comme il arrive très souvent que ces propriétés sont faciles à reconnaître dans les cas limites, on peut les étendre immédiatement aux figures du cas général.

Le principe a réellement une très grande portée, au moins dans les recherches énumératives: on peut le constater par les applications très variées dont il est susceptible et qui sont données soit dans l'ouvrage précité, soit dans les mémoires qui s'y rattachent. *J. V. Poncelet* résout par exemple le problème de *W. Braikenridge* indiqué plus haut [n° 4] en cherchant[21]) le nombre des points de rencontre

geometrica delle curve piane, Bologne 1862; trad. allemande par *M. Curtze*, Greifswald 1865; Mem. Ist. Bologna (2) 6 (1866), p. 91; (2) 7 (1867), p. 29; Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologne 1866; trad. allemande par *M. Curtze*, Berlin 1870.

**G. Marletta* [Atti Accad. Gioenia Catania (4) 16 (1903), mém. n° 1] réussit à déterminer, à l'aide de considérations synthétiques exclusivement empruntées à la géométrie projective, l'ordre de la variété des droites tracées sur une hypersurface algébrique de $(n-1)$ dimensions située dans l'espace à n dimensions, ainsi que l'ordre de la variété des droites situées à l'intersection de deux ou plusieurs de ces hypersurfaces. Il résout aussi le problème analogue concernant les droites qui rencontrent une même droite d'une hypersurface donnée et le problème analogue concernant les droites qui rencontrent un même plan d'une hypersurface donnée.*

19) Voir l'article III 3.

20) Voir en partic. Propriétés projectives[5]), (2e éd.) 1, introd. p. XIV à XVII. Vers la fin de ce Traité, *J. V. Poncelet* insiste particulièrement (p. 405/8) sur la portée du principe de continuité.

21) Propriétés projectives[5]), (2e éd.) 1, p. 321.

J. V. Poncelet a envisagé le cas plus général où le triangle de *W. Braikenridge* [n° 4] est remplacé par un polygone. Il insiste d'ailleurs [Propriétés projectives[5]), (2e éd.) 2, p. 129; J. reine angew. Math. 8 (1832), p. 29] sur ce que ce mode d'énumération s'applique à tout lieu de points situés sur les rayons d'un faisceau.

Bien plus tard *A. Jacobi* [J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 40] et *H. G. Zeuthen* [Tidsskrift math. København (Copenhague) (2) 3 (1861), p. 12/22] ont appliqué, le premier le procédé de *W. Braikenridge*, et le second celui de *J. V. Poncelet*, pour résoudre des questions semblables.

du lieu non pas avec une droite arbitraire, mais avec une droite menée par le point que nous avons appelé E. D'après la construction indiquée, mn de ces points sont alors confondus en E; les autres, au nombre de mn sont différents de E; l'ordre cherché sera donc $2mn$.

Ce procédé s'applique en particulier au cas où $m = n = 1$, c'est-à-dire quand le lieu cherché est une conique. *J. V. Poncelet* fait voir comment le théorème ainsi démontré peut devenir le point de départ d'une étude énumérative des coniques. Afin de pouvoir généraliser cette étude, il s'appuie sur le fait que deux courbes du second degré ont quatre points communs. Ce théorème, de même que le théorème général de *E. Bézout*, est aussi une conséquence du principe de continuité, suivant lequel on peut remplacer l'une des courbes par un système de droites[22]). *J. V. Poncelet* donne aussi les fondements énumératifs d'une théorie des surfaces du second ordre. De ce qu'une courbe est coupée en quatre points par une conique, on y déduit, par exemple, qu'elle est nécessairement du second ordre[23]).

Pour trouver la classe d'une courbe d'ordre m, *J. V. Poncelet*[24]) utilise un faisceau de droites parallèles. Sur chacune de ces droites, il porte, à partir du point de rencontre avec une transversale arbitraire l et dans les deux sens de la droite les $\frac{m(m-1)}{2}$ cordes interceptées sur celles-ci par la courbe. Il obtient ainsi des segments ayant tous leur origine sur l; le lieu de leurs extrémités sera une courbe coupée en $m(m-1)$ points par chaque droite du faisceau, courbe qui est donc d'ordre $m(m-1)$. Or les $m(m-1)$ intersections de cette courbe auxiliaire avec l vont se trouver sur $m(m-1)$ droites du faisceau qui sont tangentes à la courbe donnée. De là on conclut que le nombre des tangentes issues d'un point arbitraire est aussi $m(m-1)$.

J. V. Poncelet étudie aussi l''influence d'un point double sur la classe de la courbe; de l'application de ce résultat à une courbe décomposée en deux courbes partielles, il tire une nouvelle démonstration du théorème de Bézout.

22) Propriétés projectives[5]), (2e éd.) 1, p. 374.

23) Id. (2e éd.) 1, p. 373 et suiv.; voir en partic. p. 384.

24) Id. (2e éd.) 2, p. 216; J. reine angew. Math. 8 (1832), p. 394.

H. G. Zeuthen [Lehrbuch[1]), nos 10 à 12] montre que cette façon de procéder pour établir le théorème de Bézout et déterminer la classe d'une courbe amène naturellement à formuler la règle de *G. H. Halphen* mentionnée au n° 2 et la première règle du n° 3.

Ailleurs, il envisage aussi le nombre des asymptotes ou des points d'intersection avec la droite de l'infini[25]).

Les exemples donnés par *J. V. Poncelet* montrent bien qu'il ne songeait à appliquer son principe que dans les cas où un simple renvoi à la représentation analytique, sans aucune exécution des calculs, suffit pour obtenir une démonstration parfaite.

Il dit même[26]) que son principe pourrait être démontré aisément par l'algèbre. Mais il évite d'utiliser ces ressources, parce que, à son avis, le principe aurait dû se présenter comme une question purement géométrique, et apporter à la géométrie la même généralité dont jouissait déjà la méthode algébrico-analytique. C'est pour ces raisons qu'il ne parvient pas à donner un fondement réel à son principe ni, par conséquent, à établir les limites rigoureuses de sa validité. Cela explique que *A. L. Cauchy* ne l'a apprécié dans le rapport[27]) qu'il a fait sur l'ouvrage fondamental de *J. V. Poncelet* que comme constituant une «forte induction». Ce jugement a peut-être contribué à ce que, longtemps, on n'a pas osé suivre *J. V. Poncelet* dans la voie qu'il avait tracée malgré les remarquables applications qu'il en avait données: celle d'une méthode énumérative qui est aussi sûre que féconde tant qu'on ne rompt pas ses liens nécessaires avec l'algèbre.

6. Usage du principe de continuité après Poncelet. Étant données trois surfaces de degrés respectifs m, n, p, passant par la courbe d'intersection de deux autres surfaces, *G. Salmon*[28]), pour trouver le nombre de points où elles s'entrecoupent en dehors de cette courbe, imagina de décomposer la première des trois surfaces en un plan et une surface du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré.

Plus tard, il emploie le même procédé pour résoudre des problèmes analogues dans un espace à plusieurs dimensions[29]). Il obtient le degré de la surface réglée dont les génératrices s'appuient deux fois

25) Propriétés projectives[5]), (2ᵉ éd.) 2, p. 287, 293. Ces passages sont contenus dans une section du Traité de *J. V. Poncelet* qui n'était pas comprise dans la première édition. Mais l'interprétation projective des propriétés métriques qui sert de fondement aux dénombrements dont il s'agit avait déjà été introduite par *J. V. Poncelet* dans ses publications de 1822 à 1832.

26) Propriétés projectives[5]), (2ᵉ éd.) 1, introd. p. XIV.

27) Ce rapport de *A. L. Cauchy* a été imprimé en tête de la première édition du Traité de géométrie projective, Paris 1822, et déjà Ann. math. pures appl. 11 (1820/1), p. 69.

28) Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 71. Voir à ce sujet nº **9** note 55 de l'article actuel.

29) Quart. J. pure appl. math. 7 (1866), p. 327. Il signale d'ailleurs explicitement la signification algébrique de ces recherches hypergéométriques.

sur une courbe donnée et une fois sur une droite en considérant la courbe où la surface est coupée par un plan contenant la droite[30]). Pour dénombrer les normales que l'on peut mener d'un point à une courbe ou à une surface algébrique, il rejette ce point à l'infini[31])

De même *J. Steiner*[32]) déduit plus tard l'ordre de la développée d'une courbe [III 19] du nombre de ses points à l'infini. Et par l'enchaînement des résultats[33]), on a pu se convaincre facilement que la recherche de l'ordre et de la classe de plusieurs lieux géométriques de points situés sur les droites d'un faisceau était effectuée par *J. Steiner* au moyen du dénombrement des points d'intersection avec une droite du faisceau, ou des tangentes issues du centre du faisceau.

Cependant une occasion décisive vint à se présenter, où *J. Steiner* n'osa guère appliquer le principe énoncé. Par une méthode qu'il n'indique point (voir pourtant nº **20**), il croit[34]) avoir trouvé qu'il existe 6^5 coniques tangentes à cinq coniques données. Et pour faire saisir la possibilité d'un nombre aussi grand, il cherche le nombre des solutions proprement dites que l'on peut obtenir dans le cas de cinq coniques décomposées chacune en deux droites ou en deux points.

En y ajoutant les solutions impropres, c'est-à-dire les coniques passant par le point double, ou tangentes à la droite double d'une quelconque de ces coniques dégénérées, il se serait aperçu que le véritable résultat n'était pas celui qu'il présumait. C'est précisément par ce procédé que *Th. Berner*[35]) a été conduit plus tard à la dé-

30) Cambr. Dublin math. J. 8 (1853), p. 45.

31) Id. 3 (1848), p. 47.

32) J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 333 [1854]; Werke 2, Berlin 1882, p. 630.

Dans leurs recherches sur le lieu des centres de courbure d'une surface, *G. Darboux* [C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 328] et *L. Marcks* [Math. Ann. 5 (1872), p. 27] ont, eux aussi, utilisé la section de la surface cherchée par le plan de l'infini.

33) J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 7/105; Werke 2, Berlin 1882, p. 501. *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* [J. reine angew. Math. 59 (1861), p. 313] emploie méthodiquement le même procédé pour effectuer d'autres recherches de même nature suggérées par les résultats obtenus par *J. Steiner*. Il applique de même ce procédé à la détermination des courbes polaires [J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 249]. Cf. notes 21 et 24.

34) J. reine angew. Math. 37 (1848), p. 161; Werke 2, Berlin 1882, p. 417.

35) Diss. Berlin 1865, p. 14. Dès 1859, *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* était déjà parvenu, par la même voie que *Th. Berner*, à ce résultat et à d'autres encore plus généraux; mais le désaccord entre les résultats qu'il avait obtenus et ceux de *J. Steiner*, joints à la méfiance que *M. Chasles* avait témoignée à l'égard de sa méthode, l'avaient empêché de les publier [cf. C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 308; J. reine angew. Math. 66 (1866), p. 316]. Cf. nº **7**, note 40.

couverte du nombre exact des solutions, que *M. Chasles* venait aussi d'obtenir par une voie différente [n° **21**].

M. Chasles évite de recourir au principe de continuité. Après avoir[36]) trouvé, par exemple, qu'une certaine courbe est coupée par une surface du $m^{\text{ième}}$ ordre en $m\ (4m+n)$ points, il tient à établir par une autre voie le degré $4m+n$ de la courbe, en démontrant que celle-ci est coupée en $4m+n$ points par un plan arbitraire. Néanmoins, à cette époque (1861), l'inversion du théorème de Bézout était tout au moins d'un usage courant parmi les géomètres[37]).

7. Application nouvelle et plus complète du principe de continuité. Dès cette époque se présentent des applications plus étendues du principe de continuité. *L. Cremona* démontre en 1862 le théorème de Bézout au moyen de la décomposition de l'une des courbes en droites[38]), ainsi que l'avait fait *J. V. Poncelet* [n° **5**], et pour trouver le nombre des points suffisant à déterminer une courbe, il donne des positions particulières à ces points[39]).

Cependant c'est *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[40]) qui fit le premier un usage systématique du principe de continuité. C'est lui aussi qui l'établit sur des bases solides en faisant ressortir son identité essentielle avec le théorème fondamental de l'algèbre d'après lequel toute équation du $n^{\text{ième}}$ degré a n racines[41]). Pour obtenir des propositions tout à fait générales sur les courbes ayant des contacts multiples d'ordre quelconque avec une courbe donnée („formules de contact de Jonquières") [III 19], il envisage le cas où cette dernière devient rationnelle grâce à l'introduction de nouveaux points doubles,

36) C. R. Acad. sc. Paris 53 (1861), p. 887.

37) Pour former les équations numériques du second degré à l'aide desquelles il détermine l'ordre x d'une surface donnée, dont l'intersection avec une autre surface de même degré se décompose en x courbes du troisième ordre et en d'autres courbes entièrement connues, *R. Sturm* [J. reine angew. Math. 80 (1875), p. 132] applique la réciproque du théorème de Bézout.

H. G. Zeuthen [Math. Ann. 3 (1871), p. 150], dans ses recherches sur la détermination des genres des courbes algébriques planes [n° **18**], avait déjà utilisé le fait qu'en dénombrant les tangentes à une même courbe, issues de deux points distincts du plan de la courbe, on doit obtenir le même nombre.

38) *L. Cremona,* Curve piane[18]), p. 25.

39) Id. p. 27.

40) J. reine angew. Math. 66 (1866), p. 289. Voir aussi *F. Schuh,* Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen, Amsterdam 1905, p. 112/50, 214.

41) Id. p. 314.

et le principe de correspondance lui permet alors de trouver les nombres en question [n° **17**, note 128].

Il envisage aussi le cas où la courbe se décompose en droites, mais, dans ce cas, il reconnaît lui-même que plusieurs des nombres dont il fait usage sont obtenus, non par un passage rigoureux à la limite, mais seulement en généralisant par une heureuse induction certains résultats particuliers [cf. n° **9** et au sujet des limitations nécessaires n° **20**].

J. Ph. E. de Fauque de Jonquières[42]) a d'ailleurs fait ensuite un usage analogue des mêmes dégénérescences ainsi que de celles d'une surface algébrique qui leur correspondent. La surface dégénérée, envisagée comme un lieu de points, est représentée par un ensemble de m plans; tout cône circonscrit à la surface se décompose en $\frac{m(m-1)}{2}$ plans projetant les droites d'intersection de ces m plans, chacune comptée deux fois; tout plan passant par un quelconque des $\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$ points d'intersection des m plans est compté six fois parmi les plans tangents à la surface; enfin on regarde comme autant de plans tangents à la surface tous ceux qui vont passer par $m(m-1)$ points fixes, choisis deux à deux sur les $\frac{m(m-1)}{2}$ droites d'intersection et distincts des précédents. Cependant il ne réussit pas à éclaircir d'une façon complète ce qui concerne ces derniers plans tangents, au moins pour $m>2$[43]). Pour $m=2$ on avait avant lui [cf. n° **28**, note 213] entièrement traité la question.

C'est par des considérations de cet ordre que *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* détermine la classe d'une surface ainsi que d'autres caractères.

8. Loi de conservation du nombre. A partir de cette époque, les applications du principe de continuité même les plus générales, deviennent plus variées[44]). Ce résultat fut en partie obtenu grâce à

42) Ann. mat. pura appl. (2) 8 (1877) p. 312.

J. Ph. E. de Fauque de Jonquières [Math. Ann. 1 (1869), p. 424] a fait un usage inverse de certains cas limites en utilisant certaines formules concernant la détermination de surfaces tangentes à deux plans distincts, dans le cas où ces deux plans coïncident; il parvient ainsi à évaluer le nombre des courbes d'un réseau qui ont deux points doubles distincts.

43) *H. G. Zeuthen* [Lehrbuch[1]), n° 27] a éclairci ce fait observé par *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières.*

44) *A. Voss* [Math. Ann. 9 (1876), p. 241] par ex. obtient le nombre des ombilics d'une surface en remplaçant l'ombilicale par une conique décomposée en deux droites.

une nouvelle dénomination au moyen de laquelle *H. Schubert* écarta du principe les préjugés qui en avaient si longtemps empêché l'emploi. Comme l'appellation: «Principe de la position particulière» (Princip der speziellen Lage) que *H. Schubert*[45]) avait proposée tout d'abord ne s'accordait guère avec l'emploi de ressources telles que les dégénérescences géométriques signalées au nº **7**, il en choisit[46]) une autre en 1876; celle de «Principe de la conservation du nombre» (Princip der Erhaltung der Anzahl). Voici comment il énonce[47]) ce principe:

Un nombre, à moins qu'il ne prenne une valeur infinie, doit conserver la même valeur quelles que soient les positions particulières que l'on donne aux figures: soit qu'on modifie leurs positions absolues dans l'espace, soit qu'on modifie leurs positions respectives, soit qu'à la place de figures considérées auparavant comme générales et satisfaisant à certaines définitions on en introduise d'autres, aussi particulières que l'on veut, mais satisfaisant aux mêmes définitions. Comme *H. Schubert* se place, ainsi que *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, sur le terrain algébrique, cet énoncé doit être considéré comme étant d'accord avec les fondements généraux de la géométrie énumérative [nºˢ **1** à **3**; voir aussi nº **9**].

Parmi les applications qui suivirent de près (1879) cette nouvelle acception du principe, il faut citer celles de *H. Schubert*[48]) et de *H. G. Zeuthen*[49]), où l'on utilise les dégénérescences obtenues en faisant décroître indéfiniment les dimensions d'une courbe ou d'une surface jusqu'à ce que tous les points de celles-ci viennent se condenser le long d'une droite. Ils ont ainsi déterminé le nombre des courbes ou des surfaces appartenant à un système ∞^1 ou ∞^2 (ou bien à deux systèmes ∞^1) et vérifiant des conditions de contact simple ou double avec une courbe ou surface donnée (ou bien entre elles) [III 19]; *H. Schubert*[50]) a même soumis à une réduction analogue des figures à plusieurs dimensions.

45) Nachr. Ges. Gött. 1874, p. 274.

46) Math. Ann. 10 (1876), p. 23.

47) *H. Schubert*, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879, p. 12.

48) Id. p. 14. Les dégénerescences dont *H. Schubert* et *H. G. Zeuthen* font usage s'obtiennent par collinéation centrale (homologie) dont le nombre caractéristique est zéro [III 28], ou bien par la composition de deux collinéations (homologies) de ce genre particulier [Abzählende Geom.[47]), p. 91].

49) C. R. Acad. sc. Paris 89 (1879), p. 899, 946. Peu après *H. G. Zeuthen*, les mêmes résultats ont été retrouvés par *H. Schubert* [cf. nº **25**, note 193]; *C. Mineo* [Rend. Circ. mat. Palermo 17 (1903), p. 297] étudie à son tour des questions du même genre.

50) Mitt. math. Ges. Hamburg 1 (1881/9), éd. Leipzig 1889, p. 134 [1886].

Un choix particulièrement simple de la position des figures données a permis à *H. Krey* de trouver le nombre des surfaces coniques du $m^{\text{ième}}$ ordre qui satisfont à des conditions données[51]). On rencontre aussi de nombreuses applications du principe de permanence dans deux Traités de *R. Sturm*[52]). D'autres applications encore plus étendues vont découler des «formules d'incidence» de *H. Schubert*, conséquences elles-mêmes du principe de conservation [nºˢ **24** et **26**].

9. Généralisations inductives; méthode fonctionnelle de Cayley; critique ultérieure. Les démonstrations fondées sur la loi de la conservation du nombre ne sont vraiment valables qu'aux conditions suivantes:

1º) le cas spécial qu'on utilise doit réellement se trouver parmi les cas limites du cas général proposé;

2º) les solutions que l'on dénombre dans le cas particulier doivent être effectivement les limites de celles dont on cherche le nombre dans le cas général;

3º) chacune des solutions limites doit être comptée autant de fois que les solutions qu'elle remplace.

Le moyen de s'assurer que ces conditions sont remplies est fourni, soit par la comparaison avec la représentation algébrique, soit par des règles fondées sur celles-ci dont nous avons indiqué les exemples les plus simples[53]).

Cependant, pour satisfaire à la troisième de ces exigences, on a parfois recours à des déterminations indirectes, telles que celles qui seront mentionnées dans le nº **14**.

Voici un exemple qui marque assez bien l'importance de la première condition déjà soulignée par *G. H. Halphen*[54]).

Pour établir que, d'une façon générale, mn est le nombre des points communs à une surface du $m^{\text{ième}}$ ordre et à une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, il est légitime[55]) de remplacer la surface par un système de m

51) Acta math. 5 (1884/5), p. 83. Cf. III 19.

52) Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie 1, Leipzig 1892; 2, Leipzig 1893; 3, Leipzig 1897; Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften 1, Leipzig et Berlin 1908; 2, Leipzig et Berlin 1908; 3, Leipzig et Berlin 1909; 4, Leipzig et Berlin 1909.

53) Voir nºˢ **2** et **3**; voir aussi nº **14**, note 107.

54) Voir nº **2**, note 4, et nº **3**, note 11.

55) *G. Salmon*, A treatise on the analytical geometry of three dimensions, (4ᵉ éd.) Dublin 1882, p. 299. Il faut toutefois avouer que *G. Salmon* n'ose pas fonder là-dessus une véritable démonstration du théorème, ce qui eût été cependant bien légitime. Comme d'ailleurs au sujet du mode de démonstration cité au nº **6**, note 28, il fait ses réserves.

plans[56]), tandis qu'il ne serait pas permis (nous le verrons bientôt), de substituer à la courbe un système de n droites[57]).

On a souvent appliqué sans démonstration préalable, des hypothèses telles que, par exemple, un nombre cherché ne puisse dépendre que de certains autres nombres; *A. Cayley*[58]) a même développé dans ce sens une nouvelle méthode (la „méthode fonctionnelle") pour déterminer dans ces cas la forme qui convient à l'expression cherchée. C'est ainsi qu'il détermine par exemple le degré $G(m^3)$ de la surface engendrée par les cordes triples d'une courbe gauche du $m^{\text{ième}}$ ordre. En considérant une courbe décomposée, il trouve d'abord

$$G(m+m')^3 = G(m^3) + G(m'^3) + G(m, m'^2) + G(m', m^2),$$

où l'on connait à l'avance les nombres $G(m, m'^2)$ et $G(m^2, m')$ relatifs aux lieux des droites qui s'appuient deux fois sur l'une de ces deux courbes partielles et une fois sur l'autre. Ensuite, de cette équation fonctionnelle et de l'hypothèse [cf. nº 2, note 4] que la fonction $G(m^3)$ dépend seulement de l'ordre m et du nombre de points doubles apparents, il déduit l'expression générale de $G(m^3)$ renfermant deux constantes arbitraires, dont il trouve les valeurs à l'aide de cas particuliers[59]).

C'est en toute rigueur que le mode de démonstration de *G. Salmon* a été employé par *H. Weber* [Lehrbuch der Algebra, (1re éd.) 1, Brunswick 1895, p. 163] pour établir les théorèmes sur le nombre de points d'intersection de courbes et de surfaces données.

56) D'autres démonstrations fondées sur le principe de correspondance ont été données par *G. Fouret* [Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 122, 258] *et par *M. Pieri* [Giorn. mat. (1) 26 (1888), p. 351/4]*. Voir aussi *H. G. Zeuthen*, Lehrbuch [1]), nº 16.

57) *G. Z. Giambelli* [Mem. Accad. Torino (2) 52 (1903), p. 172, 176] se borne à appliquer le principe à un seul cas où sa légitimité peut se contrôler aisément.

58) Philos. Trans. London 153 (1863), p. 462; Papers 5, Cambridge 1892, p. 177.

On trouvera une analyse critique des applications de la méthode fonctionnelle dans *H. G. Zeuthen*, Lehrbuch [1]), nos 33 et 34. Voir aussi, dans le présent article, nº **32**, note 246.

59) *L. D. H. Picquet* procède d'une façon analogue [Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 260]; *C. F. Geiser* [Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini, réunis et publiés par *L. Cremona* et *E. Beltrami*, Milan 1881, p. 294] aborde aussi la même question en commençant par décomposer la courbe proposée en deux autres courbes; abstraction faite d'une extension à des cas où certaines expressions numériques acquièrent des valeurs négatives, l'usage qu'il fait ainsi du principe de continuité est légitime. Il évite, en effet, l'emploi du postulat de Cayley en n'envisageant d'abord que des courbes dont chacune est l'intersection totale de deux surfaces. *L. Berzolari* [Rend. Circ. mat. Palermo 9 (1895), p. 186] a montré que la détermination du nombre des sécantes quadruples d'une courbe gauche et celle du nombre des sécantes triples d'une courbe située dans un espace à quatre dimensions peut être obtenue en modifiant un peu la méthode de *C. F. Geiser*.

Par cette voie, *A. Cayley* réussit aussi à déterminer le nombre des sécantes quadruples, et plus tard[60]) celui des coniques satisfaisant à cinq conditions de contact avec une courbe donnée.

Le problème des sécantes multiples d'une courbe gauche a été généralisé ensuite par *G. Castelnuovo*[61]), auquel on doit la recherche du nombre des espaces linéaires à r dimensions contenus dans un même espace à s dimensions, et coupant une courbe algébrique donnée en $r+2$ ou en $2r+2$ points, suivant que s est égal à $2r+2$ ou à $r+2$. A cet effet il établit, lui aussi, en principe que le nombre cherché ne dépend que de l'ordre et du genre de la courbe. C'est donc d'une hypothèse analogue à celle qu'avait faite *A. Cayley* pour un espace à trois dimensions que découle sa détermination, fondée sur les résultats précédents, du nombre des groupes spéciaux d'une courbe auxquels appartiennent des points donnés en nombre suffisant.

De même *A. Tanturri*[62]) et *A. Crepas*, qui ont poursuivi les recherches de *G. Castelnuovo* relatives à des espaces à r dimensions, regardent la courbe considérée comme suffisamment définie par son ordre et son genre; ce qui a permis à *A. Tanturri* de la remplacer par un système de droites. Il emploie cette décomposition notamment pour les courbes de genre 0 ou 1; les droites forment alors un polygone respectivement ouvert ou fermé[63]).

60) Philos. Trans. London 158 (1868), p. 99; Papers 6, Cambridge 1893, p. 216. Cf. nº **27**, note 210.

61) Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (4) 5 II (1889), p. 130; Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1889), p. 27.

Voir aussi *F. Klein*, Riemannsche Flächen 2 (cours autographié) Göttingue 1892, p. 110/5.

Pour une autre détermination des groupes spéciaux voir note 138.

62) *A. Tanturri* [Ann. mat. pura appl. (3) 4 (1900), p. 67; Atti Accad. Torino 35 (1899/1900), p. 427; 37 (1901/2), p. 322; 39 (1903/4), p. 483]; *A. Crepas* [Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 35 (1902), p. 883].

Quelques unes des formules très condensées de *A. Tanturri* sont obtenues par induction. Dans le cas des courbes rationnelles, sa formule (qui convient aux courbes en général) avait déjà été établie par induction par *W. F. Meyer* [Apolarität und rationale Kurven, Tubingue 1883, p. 363] en s'appuyant sur des résultats obtenus pour la plupart par des procédés analytiques. *F. Severi* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 9 I (1900), p. 379] démontre la même formule générale en appliquant le principe de correspondance [nº **17**] et en donne une généralisation.

63) **M. Nöther* [Acta math. 8 (1886), p. 161/92] a démontré que si t courbes

Dans l'étude qu'il a faite des singularités d'une courbe située dans un espace à plusieurs dimensions, *F. Severi*[64]) applique la méthode fonctionnelle pour dénombrer les espaces „plurisécants“ d'une courbe (c'est-à-dire les espaces qui la rencontrent plusieurs fois) dans un espace à cinq dimensions; c'est au moyen de la même méthode que *G. Z. Giambelli*[65]) a ensuite résolu le même problème pour un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Pour trouver le nombre de coniques qui rencontrent une courbe gauche ou sont tangentes à cette courbe gauche en plusieurs points, *F. Severi* envisage le cas où cette courbe gauche se décompose en droites[66]).

Dans le but d'éprouver la portée des démonstrations fondées sur ce mode de démonstration et sur les autres hypothèses dont il vient d'être question, et par conséquent aussi la valeur des résultats acquis, l'Académie royale des sciences du Danemark[67]) a mis au concours en 1902 la question de reconnaître si pour toute espèce de courbes gauches algébriques [voir n° **2** et en particulier la note 4] il existe ou non des formes limites exclusivement composées de droites. Le concours demeura sans résultat.

algébriques planes, respectivement d'ordres $n_1, n_2, \ldots, n_t$ et de genres $p_1, p_2, \ldots, p_t$, se coupent de façon que l'ensemble de leurs points soit un ensemble connexe, on peut envisager cet ensemble comme une courbe (réductible) d'ordre

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

et de genre

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_t - (t-1) + i,$$

i étant le nombre des points d'intersection chacun compté une fois, chacun compté avec son ordre de multiplicité.* Cf. note 159.

64) Memorie Accad. Torino (2) 51 (1902), p. 81. Il fait d'ailleurs usage du principe de correspondance de Cayley-Brill sur une courbe. Cf. n° **17** note 140.

65) Memorie Accad. Torino (2) 59 (1909), p. 433. Dans ce mémoire, *G. Z. Giambelli* suppose connus les résultats obtenus dans ses recherches sur les intersections simples des espaces (cités note 203) et, comme alors, il fait usage du calcul symbolique de *H. Schubert.* Il se place aussi aux divers points de vue algébriques dont il sera question au n° **33** (voir en particulier les notes 272 et 275).

66) Atti Accad. Torino 35 (1899/1900), p. 774; 36 (1900/1), p. 74.

L. Berzolari [Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 33 (1900), p. 664, 809] a d'ailleurs donné en même temps que *F. Severi* les mêmes nombres; mais il ne développe pas sa méthode qui repose sur une application du principe de permanence du nombre.

A. Crepas [Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 36 (1903), p. 255, 381] utilise aussi la méthode fonctionnelle dans l'extension de ces recherches aux espaces à n dimensions.

67) Overs. Selsk. Forhandl. Köbenhavn (Bull. Acad. Copenhague) 1901, p. (29) et p. III.

On ne saurait donc regarder comme générales les démonstrations dont il vient d'être question; leur portée dépend de celle des hypothèses qu'on y a faites.

Les postulats inhérents à la marche de la démonstration ont été presque toujours peu approfondis par les auteurs dont on vient de parler. *E. Study*[68]) et *G. Kohn*[69]) ont d'ailleurs contesté la légitimité même du principe de conservation; ils reprochent surtout à *H. Schubert* l'absence de certaines limitations dans l'énoncé de ce principe[70]).

A côté du caractère algébrique du problème, la façon de formuler de *H. Schubert* devrait, d'après *G. Kohn*, exiger avant tout que les figures dont on considère les cas spéciaux fussent de nature à constituer un ensemble fermé, au sens de *G. Cantor* [I 7]; elle devrait ensuite exclure le cas où les formes de cet ensemble satisfont chacune à *une* des conditions d'un système de conditions bien définies parmi lesquelles il y en a une ou plusieurs demandant trop, en sorte qu'elles ne puissent être satisfaites, *en général*, par aucune des formes, mais qu'elles le soient seulement par certaines des formes dans des cas *particuliers*.

En réponse à ces objections[71]), *R. Sturm*[72]) fait remarquer qu'en tenant toujours bien compte des restrictions que *H. Schubert* fait sur le nombre des paramètres on ne risque pas de se tromper en cherchant les solutions dans les exemples proposés par *E. Study* et *G. Kohn*.

F. Severi[73]) a formulé de la manière suivante la restriction à faire à cet égard dans l'énoncé général du principe de conservation:

68) *E. Study,* Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903; Verhandl. des 3. internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, publ. par *A. Krazer,* Leipzig 1905, p. 388; Archiv Math. Phys. (3) 8 (1905), p. 271]. *E. Study* critique d'ailleurs non seulement la façon dont *H. Schubert* a formulé le principe, mais aussi le manque de précision dans la plupart des applications; il soulève même des doutes au sujet de la légitimité de certains des résultats obtenus.

69) *G. Kohn,* Archiv Math. Phys. (3) 4 (1903), p. 312.

70) *D. Hilbert* [C. R. du 2ième Congrès intern. math. Paris 1900, publ. par *E. Duporcq,* Paris 1902, p. 95; Nachr. Ges. Gött. 1900, math.-phys. p. 253; Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 213] demande aussi un fondement plus rigoureux du principe de la conservation du nombre.

71) Nous verrons plus loin [n° **33**, note 263], en suivant un autre ordre d'idées, que *A. Brill* a également précisé les limites dans lesquelles le principe de conservation du nombre peut être utile et que, avant *F. Severi*[73]), *G. Z. Giambelli* avait formulé ce principe d'une façon géométrique [n° **33**, note 276].

72) Archiv Math. Phys. (3) 12 (1907), p. 113.

73) Rend. Circ. mat. Palermo 33 (1912), p. 313.

Supposons qu'une condition imposée à des figures Γ se traduise par une correspondance ω entre les figures Γ et certaines autres figures Γ'; pour que le principe de la conservation du nombre et le calcul symbolique qui s'y rattache [n° **24**] soient alors applicables sans réserve il faut et il suffit que la correspondance ω soit irréductible ou qu'elle se décompose en une somme de plusieurs correspondances irréductibles telles que

1°) les éléments Γ qui correspondent à un élément générique Γ' se distribuent en des variétés de la même dimension;

2°) les variétés des Γ' homologues à la variété de tous les Γ dans la même correspondance aient elles aussi la même dimension.

Cependant, d'après *H. G. Zeuthen*[74]), la possibilité d'appliquer en toute rigueur la *méthode* de la conservation du nombre ne dépend pas de la façon plus ou moins condensée ou détaillée dont on formule le *principe* du même nom. Aucune façon de formuler le principe ne peut suffire tant qu'elle ne contient pas une indication précise, valable dans tous les cas, des multiplicités auxquelles les nombres, résultant dans les cas particuliers de la décomposition du nombre invariable, sont affectés.

La détermination de ces multiplicités est un des problèmes fondamentaux qu'il faudrait avant tout résoudre en géométrie énumérative. La question posée par *E. Study* et *G. Kohn*, relative aux solutions qu'on peut accepter ou à celles qu'il faut rejeter, rentre comme cas particulier dans le problème fondamental en question; ce problème une fois résolu, le nombre des solutions qu'il faut rejeter est, en effet, le nombre des solutions affectées de la multiplicité zéro.

La détermination des multiplicités peut être obtenue en regardant toujours les cas particuliers dont on fait usage pour parvenir à un dénombrement plus général comme des cas-limites et en s'assurant que chaque fois le passage à la limite est rigoureux, ce pour quoi il suffit de se conformer entièrement aux règles prescrites au début de ce n° **9**.

Abstraction faite des recherches que nous venons de mentionner, recherches dans lesquelles on avait négligé de s'assurer que les cas servant au dénombrement étaient effectivement des cas limites de tous les cas plus généraux auxquels le résultat devait s'appliquer, on a en fait toujours observé ces règles en appliquant le principe de *J. V. Poncelet* et de *H. Schubert*[75]).

Les mêmes précautions en passant à la limite sont d'ailleurs également nécessaires lorsqu'en géométrie analytique on applique inversement les résultats obtenus dans le cas général à des cas particuliers déterminés.

74) C. R. du Congrès des mathématiciens scandinaves Stockholm 1909, éd. Leipzig 1910, p. 32. Voir surtout Lehrbuch [1]), chap. 1, où se trouvent développés les principes généraux qui sont à la base des méthodes énumératives, en particulier ceux dont dépend l'application rigoureuse de la *méthode* de la conservation du nombre, avant de passer (chap. 2) à un exposé systématique des types auxquels se ramènent ces applications.

10. Problèmes à un nombre infini de solutions. Il peut arriver qu'un problème, bien que comportant en général un nombre fini déterminé n de solutions, donne, dans certains cas limites, plus de n solutions: il en comporte alors nécessairement un nombre infini[76]).

On conclut de là par ex. que si $mn + 1$ points d'une courbe d'ordre m sont situés sur une courbe ou surface d'ordre n, la courbe

75) Déjà *J. V. Poncelet* insiste sur la nécessité d'envisager les cas spéciaux comme des cas limites [voir par ex. Propriétés projectives [5]), (2e éd.) 1, p. 407]; le nom même de „principe de continuité" y fait évidemment allusion.

Voir aussi la remarque de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[41]). Dès que l'on regarde les cas spéciaux comme des cas limites et non comme des cas isolés, la première des restrictions formulées par *G. Kohn* devient inutile, savoir que les cas considérés constituent un ensemble fermé au sens de *G. Cantor*.

Il faut plutôt remarquer qu'une même figure peut être la limite de deux ensembles de figures distincts l'un de l'autre.

C'est surtout le désir de se conformer à cette façon de voir qui a parfois amené les géomètres à donner des réponses différentes à une même question suivant le problème où elle se posait; ainsi, suivant les cas, ils comptaient ou ne comptaient pas, parmi les sécantes doubles d'une courbe gauche, les droites passant par un véritable point double de cette courbe [*G. B. Guccia*, Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 27; *L. Berzolari*, id. 9 (1895), p. 190; *A. Tanturri*, Ann. mat. pura appl. (3) 4 (1900), p. 97]. On doit regarder chacune de ces droites comme une *corde* de la courbe gauche donnée lorsque cette courbe gauche appartient à un ensemble de courbes de même genre et que le point double de la courbe donnée provient de ce que deux branches ne se coupant pas pour chacune des courbes voisines viennent, en se rapprochant continuellement, à se couper pour la courbe donnée. On doit au contraire regarder chacune des droites passant par le point double comme une *sécante ordinaire* lorsque le point double entraîne pour la courbe donnée un abaissement du genre des courbes de l'ensemble en sorte qu'il survient dans l'ensemble des courbes comme un fait entièrement nouveau propre à la courbe donnée; ce fait se présente par exemple à l'occasion d'un contact éventuel entre deux surfaces passant par la courbe. Le fait qu'une courbe plane du troisième ordre ayant un point double est cas limite soit des courbes planes générales du troisième ordre, soit des courbes gauches du troisième ordre appartient à la même catégorie. Plusieurs exemples de ce genre se trouvent dans *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903.

76) Abzählende Geom. [47]), p. 13.

tout entière, ou quelqu'une de ses parties, devra se confondre avec l'autre courbe, ou avec une partie de celle-ci, ou se trouver sur la surface.

C'est en partant de ce principe que *C. Maclaurin*[77]) démontre qu'une courbe irréductible du $m^{\text{ième}}$ degré a au plus $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles.

Cette forme de déduction a été considérée par *J. V. Poncelet*[78]), qui l'emploie fréquemment, comme une application du principe de continuité. Elle joue un rôle fondamental dans l'exposition des théorèmes sur les groupes de points d'intersection en faisant disparaître les incertitudes relatives à l'énumération[79]) des constantes [III 19] ainsi que dans la recherche des droites et des autres courbes particulières pouvant se trouver sur certaines surfaces.

On a étendu ces déductions à d'autres figures de l'espace[80]).

C'est par la méthode indiquée ici, c'est-à-dire par de simples énumérations, que *A. Hurwitz*[81]) démontre les théorèmes dits de „fermeture", ceux de *J. V. Poncelet* et d'autres encore [III 17].

Lorsqu'on cherche à déterminer, par exemple, un polygone de n côtés inscrit dans une conique donnée, et circonscrit à une autre conique donnée, la coïncidence du premier sommet avec le $(n+1)^{\text{ième}}$ peut se ramener à une équation biquadratique. Si un polygone remplit les conditions du problème, ses n sommets donnent autant de racines doubles de cette équation, laquelle par conséquent doit être satisfaite identiquement. Le problème aura donc une infinité de solutions quand il en aura une. Aux quatre racines de l'équation ne correspondent pas, en général, des solutions proprement dites.

77) Geometria organica [12]), p. 137.

78) *J. V. Poncelet* en fait usage par exemple pour établir que la courbe de contact entre deux quadriques est plane; il montre, à cet effet [Propriétés projectives [5]), (2° éd.) 1, p. 374] que le plan qui contient trois points de cette courbe coupe les deux quadriques suivant deux coniques ayant six points communs. *J. V. Poncelet* [id. (2° éd.) 1, p. 347] s'en sert aussi pour démontrer ses théorèmes dit „de fermeture" qu'on va rappeler à l'instant (note 81).

79) Ce point de vue numérico-géométrique a été signalé par *H. G. Zeuthen* [Math. Ann. 31 (1888), p. 235].

80) Par exemple, en déterminant le nombre des faisceaux de droites dont cinq rayons appartenant à un même complexe algébrique rencontrent cinq droites arbitraires données, on trouve en même temps pour un complexe du quatrième degré le nombre des faisceaux de droites qui y sont entièrement contenus [*H. Schubert,* Math. Ann. 12 (1877), p. 220] (cf. note 191).

81) Math. Ann. 15 (1879), p. 8.

Les ∞^1 tétraèdres qui sont à la fois inscrits dans une cubique gauche et circonscrits à une autre cubique gauche ont été étudiés systématiquement par *W. F. Meyer* [Apolarität [62])].

Il en est de même pour ce qui concerne les autres théorèmes de *J. V. Poncelet*[82]), ainsi que les polygones de *J. Steiner* et les polygones, d'au moins six côtés, de *G. Kohn*, qui sont à la fois inscrits dans une cubique gauche et circonscrits à une autre[83]).

C'est à une question analogue que se rapportent les ∞^1 tétraèdres de *A. Hurwitz* dont les sommets appartiennent à une cubique gauche, tandis que les faces sont circonscrites à une autre, et certains ∞^2 polygones étudiés par *M. Gardiner* et *H. G. Zeuthen*[84]) ayant leurs sommets sur une quadrique donnée, et dont les côtés passent par des points fixes ou appartiennent à certaines congruences de droites.

De nouvelles extensions de ces problèmes de fermeture à l'espace ont été faites ensuite par *G. Humbert* et *G. Fontené*[85]).

H. G. Zeuthen considère aussi comme autant d'applications du principe de permanence, dans le sens qui a été indiqué, les raisonnements habituels grâce auxquels, de ce qu'une proposition exprimable au moyen d'une équation algébrique est vérifiée quand certaines parties de la figure sont réelles, on déduit sa validité en général[86]).

11. Problèmes dont le nombre de solutions est nul. Des résultats non moins importants nous donnent les énumérations par lesquelles on constate que tel ou tel problème n'a pas de solution en général. Si le dénombrement porte, par exemple, sur les points d'inter-

82) On ne peut toutefois pas y ramener, sans quelque détour, le cas que *J. V. Poncelet* [Propriétés projectives [5]), (2° éd.) 1, p. 315] avait aussi envisagé, où l'une des coniques du premier problème est remplacée par plusieurs coniques appartenant à un même faisceau ponctuel ou tangentiel et où la seconde conique appartient au même faisceau. C'est pour cette raison que *K. Rohn* [Ber. Ges. Lpz. 60 (1908), math. p. 94] et *C. Juel* [Festskrift til H. G. Zeuthen, København 1909, p. 88] appliquent à la solution de ce problème particulier d'autres méthodes. Dans *H. G. Zeuthen* [Lehrbuch [1]), n°s 46 et 140] au contraire, ce cas particulier sert d'exemple pour montrer comment on peut appliquer la méthode du texte à des cas où un problème se décompose en plusieurs dont un seul admet une infinité de solutions.

A propos des autres théorèmes de *J. V. Poncelet,* voir *R. Sturm,* Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften 1, Leipzig et Berlin 1908, p. 288.

83) Sitzgsb. Akad. Wien 106 IIa (1897), p. 481.

84) *M. Gardiner,* Quart. J. pure appl. math. 7 (1866), p. 284; *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 18 (1881), p. 33; 26 (1886), p. 268.

Voir aussi *C. Juel,* Nyt Tidsskrift mat. København (Copenhague), Afd. B, 1 (1890), p. 11.

85) Bull. Soc. math. France 32 (1904), p. 135, 284.

86) *H. G. Zeuthen,* Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit, Universitetsfestskrift, Copenhague 1879, p. 5; Ann. mat. pura appl. (2) 14 (1886/7), p. 33; Lehrbuch [1]), n° 47.

section d'une enveloppe de courbes planes, ou de surfaces, ou encore de l'arête de rebroussement d'une enveloppe de surfaces, avec une courbe ou une surface, il nous indique que les courbes ou surfaces enveloppées passent nécessairement par des points fixes ou des lignes fixes[87]).

Plus généralement, on peut raisonner comme il suit: si dans une équation algébrique[88])

$$f(x, y) = 0,$$

il arrive qu'il n'existe aucune valeur de x pour laquelle y puisse prendre quelque valeur que ce soit assignée à l'avance, il faut que y soit indépendant de x. Et comme alors la valeur constante de y peut toujours être obtenue en envisageant un cas particulier, toute proposition qui s'exprime par une équation algébrique pourra se démontrer à l'aide d'une énumération ayant zéro pour résultat.

C'est de cette méthode que *E. B. Holst*[89]) a fait, le premier, un usage systématique dans la recherche de nombreuses propositions métriques. *H. G. Zeuthen*[90]) en a fait ressortir l'utilité pour la démonstration des théorèmes relatifs à l'invariabilité de certains rapports anharmoniques; il suffit pour cela de prouver que deux quelconques des quatre éléments ne peuvent se confondre sans entraîner avec eux un troisième élément au moins.

87) Par exemple, du fait que l'arête de rebroussement de l'enveloppe E des plans dont chacun coupe suivant deux coniques une même surface de quatrième ordre à conique double ne rencontre pas le plan de cette conique, on déduit que l'enveloppe E est constituée par des cônes [*H. G. Zeuthen,* Om Flader[86]), p. 22; Ann. mat. pura appl. (2) 14 (1886/7), p. 47].

88) En modifiant un peu ce procédé on peut l'appliquer à certaines équations transcendantes; la modification nécessaire résultera alors du théorème de *É. Picard* [II 8, **29**].

89) Bull. Soc. math. France 8 (1879/80), p. 52; et surtout: Diss. Christiania 1882; Forhandlinger Videnskabs-Selskabet Christiania 1882, éd. 1883, mém. n° 11; Archiv for Math. og Naturvidenskab (Christiania) 7 (1882), p. 240 (en allemand).

On peut citer par ex. le théorème suivant:

D'un point P menons une transversale d à une courbe algébrique plane donnée; supposons qu'elle la rencontre en n points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ et désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les n asymptotes de la courbe. Le produit

$$PQ_1 \cdot PQ_2 \ldots PQ_n \cdot \sin(d, a_1) \cdot \sin(d, a_2) \ldots \sin(d, a_n)$$

est indépendant de la direction de la transversale d que l'on envisage; il ne s'annule pas, en effet, quelle que soit cette transversale [III 19].

90) Nyt Tidsskrift mat. København (Copenhague) Afd. B, 10 (1899), p. 49. *H. G. Zeuthen* [Math. Ann. 26 (1886), p. 247] avait déjà fait d'autres applications de cette même remarque. Voir aussi Lehrbuch[1]), n^os 51 à 53.

Le principe de correspondance.

12. Genèse du principe de correspondance. *J. Steiner* et *M. Chasles*, après avoir pris l'un et l'autre pour base de la théorie des coniques la construction de ces courbes au moyen de deux faisceaux projectifs, firent de même usage de la génération analogue et particulièrement féconde d'une courbe d'ordre $m+n$ au moyen de deux faisceaux l'un d'ordre m l'autre d'ordre n en correspondance univoque [III 19].

En 1848, *J. Steiner*[91]) mit ce mode de génération en toute première ligne dans ses recherches sur les courbes algébriques. Grâce à ce principe remarquable, il a pu souvent anticiper l'usage du principe de correspondance; et les applications qu'il en fait, jointes aux nombreuses propositions données sans démonstration, témoignent de l'intérêt qu'il a pris aux rapports intimes de l'algèbre et du dénombrement qui se sont manifestés plus tard dans le principe de correspondance.

En 1853, *M. Chasles*[92]) applique le même mode de génération aux courbes du troisième et du quatrième degré et, dans le cas du troisième degré, il détermine l'ordre de la courbe en remarquant que ses points d'intersection avec une droite arbitraire sont autant de points doubles dans une correspondance (1, 2) entre les points de la droite. Leur nombre est fourni par le degré d'une équation que l'on obtient en égalant les abscisses des points correspondants, qui sont liées par une équation de degrés respectifs 1 et 2 par rapport à ces variables.

Ici la correspondance (1, 2) repose sur les deux concepts géométriques d'homographie et d'involution. Mais dès 1855, *M. Chasles* affirme, en général, que sur une droite, toute correspondance (1, 1) de points (susceptible de représentation algébrique) est une homographie et que les couples de points correspondant à un même point dans une correspondance (1, 2) forment une involution[93]).

Parmi les faits qui ont préparé la découverte du principe de correspondance, généralisant les idées précédentes, mais offrant un

91) J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 2; Werke 2, Berlin 1882, p. 496. La génération analogue des surfaces est invoquée par *J. Steiner* à l'égard des surfaces cubiques [III 24].

92) C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 943; 37 (1853), p. 272.

93) Id. 41 (1855), p. 1097. Ce théorème y est déjà appelé „principe de correspondance".

caractère plus complet, il faut rappeler la représentation donnée par *M. Chasles* [94]), au moyen d'une équation de degrés p et q entre deux variables, d'une courbe située sur un hyperboloïde et rencontrant chacune des génératrices de l'un et de l'autre système respectivement en p et en q points. Il faut aussi citer la théorie, due à *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* [95]), des involutions d'ordre quelconque sur une droite, bien qu'il y calcule encore, provisoirement du moins, le nombre des points doubles au moyen de la détermination algébrique du discriminant.

13. Le principe de correspondance et ses premières applications. Dans toute correspondance (α, β) entre les points d'une droite, susceptible de représentation algébrique, c'est-à-dire telle qu'à chaque point x correspondent β points homologues y, et à chaque point y, α points homologues x, il y a toujours $(\alpha+\beta)$ points où un x et un y qui se correspondent sont confondus [96]).

Deux applications tout à fait générales de ce principe ont été faites par *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* [97]) dans un mémoire sur lequel nous reviendrons au n° **20**. Le principe, il est vrai, n'y est pas encore explicitement énoncé; mais la validité du raisonnement, pour tous les cas où il peut être effectivement employé, en ressort avec une telle évidence que *L. Cremona* [98]) a pu se servir du même procédé, sans reproduire chaque fois les raisonnements qui le justifient. Néanmoins, *M. Chasles* qui venait d'attribuer à un usage erroné du principe en question certains résultats inexacts obtenus par *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* ne se décidait point à l'accepter. Il trouvait surtout inadmissible l'argumentation d'après laquelle toute équation

94) C. R. Acad. sc. Paris 53 (1861), p. 985. En particulier, la déduction du nombre $(p+q)$ des points d'intersection avec un plan arbitraire [id. p. 990] ne diffère que très peu, au fond, de la démonstration générale du principe de correspondance.

95) Ann. mat. pura appl. (1) 2 (1859), p. 86.

Une pénétration réciproque, d'un caractère semblable entre l'algèbre et certaines énumérations plus compliquées que celles dont nous parlons ici, se trouve aussi, à côté d'applications directes du principe de correspondance, dans les travaux du même auteur dont il sera question aux n^os **13** et **20** (notes 97 et 170).

Les recherches sur les involutions d'ordre quelconque ont été poursuivies et appliquées par *L. Cremona* [Curve piane [18]), p. 16]. Voir aussi n° **15**.

96) Ces notations seront constamment employées dans ce qui suit.

97) J. math. pures appl. (2) 6 (1861), p. 117, 119. Voir aussi *C. Segre*, Bibl. math. (2) 6 (1892), p. 33.

98) *L. Cremona*, Curve piane [18]), p. 64, 66, 76, etc..

de degré α en x et β en y devait rester de degré $\alpha+\beta$ pour $y=x$; en effet, dans certains cas le degré s'abaisse effectivement [99]). Lorsque *M. Chasles* se décida enfin à énoncer à son tour le principe de correspondance, qu'il avait développé de son côté, en l'utilisant pour en déduire de nombreux résultats publiés en 1864 [n° **21**], il y joignit [100]) la condition qu'un point x à l'infini ait toujours pour correspondants β points situés à distance finie; et dans les applications qu'il en fit successivement, il n'omit jamais de s'assurer que les choses se passaient réellement ainsi. Cette restriction était tout à fait superflue dans les recherches de caractère projectif faites par *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières.*

Une foule de problèmes résolus par *M. Chasles* au moyen du principe de correspondance, et qui constituèrent une longue série de communications, mirent en pleine lumière la fécondité de ce principe et la facilité de son emploi [101]). Il s'en servit d'abord pour développer sa théorie, entièrement nouvelle à cette époque, des systèmes formés par des coniques ou d'autres courbes ou surfaces [n^os **21** et **22**]. Le plus souvent il se contente il est vrai de donner les résultats; mais, comme il déclare lui-même [102]) avoir partout employé le principe de correspondance, cette certitude, jointe à l'enchaînement des propositions, suffit presque toujours pour rétablir la démonstration, très simple d'ailleurs, de chaque théorème nouveau [103]). Plus tard, il montra par

99) La preuve que les scrupules de *M. Chasles* se sont manifestés précisément sur ce point, résulte de renseignements contenus dans une lettre de *L. Cremona* adressée à *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* le 29 janvier 1864; *L. Cremona* écarte la difficulté par la considération des racines infinies de l'équation que l'on obtient en faisant $y=x$ [cf. Documents relatifs à une question de priorité (lithographiés), Paris 4 février 1867, p. 14]. Le même doute fut soulevé postérieurement par *M. Chasles* [Rapport sur les progrès de la géométrie, Paris 1870, p. 329].

100) Cela ressort de sa démonstration même [C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 1175.

101) C. R. Acad. sc. Paris: du tome 58 (1864) au tome 85 (1877) et aussi, en partie, Nouv. Ann. math., 2^e série [cf. III 19].

102) C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 1167.

103) Il est donc inexact d'affirmer, comme on l'a fait souvent, que *M. Chasles* n'ait donné que des énoncés de théorèmes sans aucune démonstration. En particulier, les renseignements contenus dans sa note [C. R. Acad. Paris 58 (1864), p. 308] et sa démonstration complète du théorème relatif aux sections coniques [id. 59 (1864), p. 210] renferment des éléments suffisants pour reconstruire dans son intégrité la démonstration du théorème fondamental: dans tout système (μ, ν) de courbes il y en a toujours $(n\mu+m\nu)$ qui sont tangentes à une courbe donnée d'ordre m et de classe n [n° **22**, note 181].

l'application du même principe à des classes de problèmes extrêmement variés, comment ce principe pouvait remplacer les longues éliminations de la géométrie analytique, tant qu'il n'y a pas lieu d'effectuer des calculs spéciaux. C'est d'ailleurs aussi ce qui résulte de la possibilité d'en déduire le théorème de Bézout[104]).

14. Recherche du nombre des solutions confondues; nouvelles applications. Dès qu'on étend le domaine des applications du principe de correspondance, il arrive bien souvent que la somme $\alpha + \beta$ comprend, outre le nombre cherché, les nombres des solutions d'autres problèmes dépendant des mêmes conditions. Lorsqu'il en est ainsi, il faudra rechercher à part ces derniers nombres, ou bien se procurer, par des applications multiples du même principe, autant d'équations qu'il en faut pour déterminer à la fois toutes les inconnues. Dans ces équations, chacun des nombres cherchés ou déterminés d'avance sera affecté d'un coefficient exprimant combien des $\alpha + \beta$ coïncidences qu'implique le principe se réuniront pour donner lieu à une quelconque des solutions indiquées par le nombre en question. Souvent on peut éviter de déterminer directement ces coefficients, en ayant recours à l'artifice suivant dont *H. G. Zeuthen* et *H. Schubert* ont donné beaucoup d'applications dans leurs recherches sur les systèmes de courbes, mentionnées aux n^{os} **27** à **29**.

On établit d'abord, par le principe de correspondance, un nombre surabondant d'équations; on en déduit des identités, et ces identités permettent de trouver les coefficients indéterminés du problème. On peut aussi utiliser à cet effet les cas particuliers déjà connus.

La détermination directe des coefficients s'obtient par la règle suivante, due à *H. G. Zeuthen*[105]):

«Le nombre des coïncidences absorbées par un point d est égal à la somme des ordres infinitésimaux de tous les segments infiniment petits xy limités d'une part au point x, dont la distance à d est infiniment petite du premier ordre, et d'autre part aux points homologues y.»

104) C. R. Acad. sc. Paris 75 (1872), p. 756; 76 (1873), p. 126.

105) Bull. sc. math. (1) 5 (1873), p. 186. Antérieurement à cette règle qui se rattache aux règles de *G. H. Halphen* [n^{os} **2** et **3**], *H. G. Zeuthen* [Nouv. Ann. math. (2) 6 (1867), p. 200/6] avait déterminé d'une autre façon la même multiplicité en l'utilisant aussi pour une déduction des formules de Plücker. La démonstration que *O. Zimmermann* [J. reine angew. Math. 123 (1901), p. 1, 175] a donnée plus tard de ces mêmes formules revient à la même application du principe de correspondance. Au sujet du principe et de ses applications, voir *H. G. Zeuthen*, Lehrbuch[1]), n^{os} 98 à 115.

On doit aussi à *H. G. Zeuthen* plusieurs applications combinées du principe de correspondance aux singularités des courbes gauches algébriques[106]), ainsi qu'aux propriétés générales des systèmes de courbes planes[107]) et aux relations entre les singularités des surfaces algébriques[108]). Outre les applications diverses, dues à *G. Darboux*[109]), *G. Fouret*[110]), *R. Sturm*[111]) et à d'autres, nous indiquerons ici deux applications, qu'a faites *H. Schubert*, bien que, le plus souvent, il donne au principe la forme particulière dont il sera question au n° **25**: c'est d'abord la détermination des tangentes multiples d'une surface générale du $m^{\text{ième}}$ ordre[112]); c'est ensuite celle des singularités ordinaires d'un complexe de droites[113]).

La première de ces recherches a été ensuite étendue par *H. Krey*[114]) aux surfaces douées de certaines particularités ponctuelles, et par *H. Schubert*[115]) lui-même aux hypersurfaces. *H. Krey*[116]) utilise aussi le

106) Notamment aux singularités touchant les sécantes multiples et les triangles formés par celles-ci [Ann. mat. pura appl. (2) 3 (1869/70), p. 175]. On a aussi appliqué à l'étude des mêmes questions le théorème de correspondance[138]) de Cayley-Brill et la généralisation du théorème n° **18** du genre [*H. G. Zeuthen*, Lehrbuch[1]), n^{os} 84 à 86 et n^{os} 138 à 140].

Pour les courbes rationnelles, voir note 127.

107) K. Danske Videnskab. Selsk. (Naturv. math. Afhandl.) (5) 10 (1872/3), p. 287 [cf. n° **29** note 221]. Voir aussi III 19. Abrégé: Bull. sc. math. (1) 7 (1874), p. 97.

Afin de faciliter la détermination des coefficients, les courbes infiniment voisines d'une courbe affectée de quelque singularité remarquable sont étudiées avec soin dans ce mémoire [cf. *W. Bouwmann*, Math. Ann. 49 (1897), p. 24]. Les résultats ainsi obtenus pourraient aussi être utilisés dans les applications du principe de la conservation du nombre. Il en est d'ailleurs de même des résultats obtenus dans le mémoire cité note 108.

108) Math. Ann. 10 (1876), p. 446. *R. Sturm* [J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 350] avait déjà appliqué le principe de correspondance à de telles relations, mais cependant dans une mesure plus restreinte.

109) Il s'agit d'applications à la détermination du lieu des centres de courbure d'une surface [C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 1328].

110) Par ex. la détermination du nombre des points d'intersection d'une courbe et d'une surface [Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 122, 258].

111) *R. Sturm*, dans les ouvrages cités notes 52 et 108.

112) Math. Ann. 11 (1877), p. 347; Abzählende Geom.[47]), p. 232. *J. de Vries* [K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen natuurk. Afdeeling 13 (1904/5), p. 753] étudie le même problème ainsi que des problèmes analogues [id. 14 (1905), p. 50] concernant un faisceau de surfaces.

113) Math. Ann. 12 (1877), p. 202; Abzählende Geom.[47]), p. 262.

114) Math. Ann. 15 (1879), p. 211.

115) Id. 26 (1886), p. 52.

116) Id. 19 (1882), p. 497.

principe de correspondance pour dénombrer les solutions d'équations algébriques douées de certaines particularités.

15. Méthodes connexes aux précédentes. La même représentation algébrique des faits de géométrie énumérative sur laquelle est fondé le principe de correspondance a fourni d'autres méthodes qui se rattachent à ce principe.

L. Saltel[117]) envisage un principe de correspondance pour n points d'une droite liés par une équation algébrique: la somme des degrés par rapport aux abscisses de ces points donne le nombre de fois où les points coïncident. La théorie générale des involutions d'ordre supérieur entre les points d'une droite [nº **12**] et des systèmes symétriques de points appartient à ce même objet. Cette théorie, surtout sous la forme géométrique que lui donne *Em. Weyr*[118]) au moyen de la représentation par des points de coniques ou de certaines autres courbes convenablement choisies, et bien qu'elle s'éloigne de la source algébrique du principe de correspondance à cause même de sa représentation géométrique, paraît très appropriée aux dénombrements géométriques [voir III 19 et III 28].

16. Correspondance dans le plan et dans l'espace à trois ou plus de trois dimensions. Un principe de correspondance pour le plan, limité au seul cas où toutes les coïncidences ont lieu en des points isolés, avait été proposé par *G. Salmon*[119]); il fut complété par *H. G. Zeuthen*[120]) qui l'a exprimé sous la forme suivante:

117) Il emploie par ex. ce principe pour déterminer l'enveloppe d'un système ∞^2 de surfaces [Thèse, Nancy 1877, éd. La Rochelle 1877]. Voir aussi toute une série de communications à ce sujet [C. R. Acad. sc. Paris 80 (1875), p. 1064, 1285, 1324; 81 (1875), p. 884, 1047; 82 (1876), p. 63, 324; 83 (1876), p. 529, 608, 894; Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in-8º, 24 (1875), mém. nº 5, p. 5/33 [1874]]; Bull. Acad. Belgique (2) 40 (1875), p. 22/6, 27/33; (2) 41 (1876), p. 595, 734; (2) 42 (1876), p. 300, 586, 617, 828; (2) 43 (1877), p. 24, 266, 460; (2) 45 (1878), p. 102; (2) 47 (1879), p. 184; (2) 48 (1879), p. 632.

118) *Em. Weyr* [Beiträge zur Kurvenlehre, Vienne 1880] a donné lui-même un aperçu du contenu essentiel de ses travaux dispersés dans plusieurs revues. Au sujet des applications énumératives d'involutions d'ordre supérieur, cf. *R. Sturm* [Geom. Verwandtschaften [52]) 1, p. 266/304] et pour les involutions de rang supérieur [id. 1, p. 337/48].

119) A treatise on the analytical geometry of three dimensions, (2ᵉ éd.) Dublin 1865, p. 511.

120) C. R. Acad. sc. Paris 78 (1874), p. 1553. *H. G. Zeuthen* en déduit une nouvelle démonstration du théorème de *G. H. Halphen* [C. R. Acad. sc. Paris 74 (1872), p. 41] concernant le nombre $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ de droites communes à deux congruences dont les ordres sont α et α', les classes β et β'. D'autres applications se rattachent à des transformations de Cremona et à des transformations plurivoques du plan. Ces dernières peuvent d'ailleurs être directement utilisées pour obtenir certaines

«Si, dans un plan, à chaque point x correspondent β points y et, à chaque point y, α points x, et si, en outre, γ est le degré de la courbe engendrée par les points y qui correspondent aux points x d'une même droite, la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est égale au nombre des coïncidences isolées augmenté de l'ordre de la courbe lieu de tous les autres points doubles et de la classe de l'enveloppe des droites joignant les points de cette courbe avec leurs correspondants infiniments voisins»[121]).

Puis *H. G. Zeuthen* lui-même et, d'une façon plus complète, *H. Schubert*[122]) ont étendu ce théorème à l'espace ordinaire. Dans le système de *H. Schubert*, il revêt d'ailleurs une autre forme [nº **25**], qui est susceptible d'extension aux espaces supérieurs [nº **26**].

C'est ce qui a été fait par *H. Schubert* lui-même et, sous différentes formes, par *E. Caporali*[123]) et par *M. Pieri*[124]). C'est à *M. Pieri*[125]) que l'on

énumérations comme l'a fait par ex. *R. Baldus* [Math. Ann. 72 (1912), p. 1]. Il en est de même pour le principe de correspondance dans l'espace. Voir à ce sujet *R. Sturm* [Geom. Verwandtschaften [52]) 4, p. 1 et suiv.] ainsi que les articles III 27 et III 28.

121) *A. Brill* [Math. Ann. 8 (1875), p. 534] utilise cette formule, ainsi que le principe de correspondance ordinaire, pour démontrer les théorèmes de contact de *M. Chasles* et de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* du nº **22** (notes 181 et 183).

Ces théorèmes, ainsi que d'autres ayant une portée plus vaste, dus à *G. Fouret* [C. R. Acad. sc. Paris 80 (1875), p. 805] et à *H. Schubert* [Math. Ann. 10 (1876), p. 109], rentrent dans le problème général suivant: Etant donnés dans un espace linéaire à n dimensions deux systèmes ∞^{i} et $\infty^{i'}$ de variétés à $n-1$ dimensions, quel est l'ordre du lieu (à $i + i' - 1$ dimensions) des points de contact entre varietés des deux systèmes? La solution que *M. Pieri* [Giorn. mat. (1) 30 (1892), p. 131] en a donnée est une généralisation de celle que *A. Brill* avait donnée pour deux ou trois dimensions, en tant qu'elle utilise un théorème corrélatif sur les correspondances de ∞^{n-1} couples de points homologues qui découle par projection du principe de *M. Pieri* cité dans la note 124; toutefois la démonstration de *M. Pieri* ne repose pas directement sur ce principe mais sur les formules de coïncidence de *H. Schubert* [nº **25**].

Le principe de correspondance dans le plan a été ensuite appliqué par *H. G. Zeuthen* [Math. Ann. 18 (1881), p. 33] qui le modifie de façon à obtenir une formule de correspondance sur une quadrique [voir à ce sujet *H. G. Zeuthen*, Lehrbuch [1]), nºˢ 142 à 150], par *M. Pieri* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (4) 2 I (1885/6), p. 327; (4) 2 II (1885/6), p. 40], par *A. Del Re* [Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 272] et par *R. Sturm* [Geom. Verwandtschaften [52]) 4, p. 130/51] à la génération de configurations collinéaires ou corrélatives.

122) Math. Ann. 10 (1876), p. 57.

123) Memorie di geometria, Naples 1888, p. 331.

124) Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (4) 3 I (1886/7), p. 196; Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1891), p. 252; 11 (1897), p. 58.

125) Atti Accad. Torino 25 (1889/90), p. 365.

doit la recherche du nombre des coïncidences entre les droites correspondantes d'un espace à plusieurs dimensions, lorsque ce nombre est fini.

F. Severi[126]) est allé plus loin encore, en donnant le nombre, supposé fini, des coïncidences entre deux espaces à k dimensions de n'importe quelle forme fondamentale de *H. Schubert.*

17. Correspondance entre les points d'une courbe ou d'une surface [II 10]. Le principe de correspondance fut appliqué dès le début aux faisceaux de droites et de plans, et par là aussi bientôt aux points d'une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre ayant un point multiple d'ordre $m-1$: et, comme les propriétés fondamentales des courbes unicursales venaient d'être connues [II 10; III 21], on pouvait étendre le principe immédiatement aux points d'une telle courbe. C'est ce que fit *M. Chasles*[127]) en 1866. Aussitôt après *A. Cayley*[128]) était amené, par «une induction qui lui parut suffisante» à un principe de correspondance valable pour toute courbe algébrique: «Le nombre des coïncidences qui ont lieu dans une correspondance (α, β) entre les points d'une courbe de genre p est égal à la somme

$$\alpha+\beta+2\gamma p, \tag{1}$$

pourvu que les β points y, correspondant à un même point x de la courbe, soient déterminés comme intersections de cette courbe avec une autre courbe coupant la première, non seulement en ces points y, mais encore en γ points confondus avec x et en des points fixes.»

*Un principe analogue, formulé sans aucune hypothèse restrictive avait été donné auparavant par *H. Schubert* [Abzählende Geom.[47]), p. 61] au sujet de la correspondance entre les ∞^4 droites de l'espace ordinaire.*

Voir aussi *R. Sturm* [Liniengeom.[52]) 1, p. 44] et *F. Kliem* [Diss. Breslau 1909, éd. Borna et Leipzig 1909].

126) Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 9 I (1900), p. 321. Il utilise plus tard cette même formule dans son mémoire cité note 270.

127) C. R. Acad. sc. Paris 62 (1866), p. 579. On a signalé au n° 7 l'application ultérieure faite en 1866 par *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* [cf. note 40] de résultats qu'il avait obtenus par le même procédé. En y joignant des développements algébriques particuliers, *W. F. Meyer* [Math. Ann. 38 (1891), p. 369; Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 229, 331] a, dans ses recherches concernant les relations entre certaines singularités des courbes planes ou gauches, utilisé le principe ainsi généralisé.

128) C. R. Acad. sc. Paris 62 (1866), p. 586; Papers 5, Cambridge 1892, p. 542; Proc. Lond. math. Soc. (1) 1 (1865/6), p. 23; Papers 6, Cambridge 1893, p. 385. Il semble qu'à cette époque *A. Cayley* ne connaissait pas encore la communication faite par *M. Chasles*[127]).

De là résulte que le nombre γ ne saurait être modifié par l'échange des points x et y.

Il arrive souvent dans les applications[129]) que la courbe auxiliaire a plusieurs sortes de points d'intersection variables avec la courbe donnée; de sorte qu'un certain nombre n d'entre eux coïncident avec des points y homologues de x suivant une correspondance (α, β) possédant c points doubles, tandis qu'un nombre n' d'entre eux coïncident avec des points y homologues de x suivant une correspondance (α', β') possédant c' points doubles, et ainsi de suite. Dans ce cas la formule prend la forme suivante:

$$n(c-\alpha-\beta)+n'(c'-\alpha'-\beta')+\cdots=2\gamma p. \tag{2}$$

La formule (1) de correspondance de *A. Cayley* a été démontrée par *A. Brill.* En étudiant[130]) la résolution algébrique des problèmes de contact indiqués plus haut et dont *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* et *A. Cayley* avaient trouvé le nombre de solutions, il fut amené à déterminer, en général, les couples de points d'une courbe dont les coordonnées vérifient à la fois deux équations algébriques[131]); et à traiter d'autres questions qui s'y rattachent, comme la recherche analogue pour des groupes de trois ou quatre points. Il aboutit ainsi non seulement à une démonstration purement algébrique[132]) mais encore[133]) à une démonstration géométrique du théorème proposé par *A. Cayley*; dans cette dernière démonstration, on envisage aussi d'une manière complète l'influence des points singuliers. Pour engendrer les points homologues sur la courbe, *A. Brill* fait les mêmes hypothèses que *A. Cayley*; d'après ces hypothèses le nombre γ, que *A. Brill* a appelé valence (Wertigkeit) de la correspondance, ne pouvait être que positif ou nul.

La recherche de toutes les correspondances algébriques possibles entre deux points d'une courbe a été faite par *A. Hurwitz*[134]) au moyen

129) *A. Cayley* [Philos. Trans. London 158 (1868), p. 145; Papers 6, Cambridge 1893, p. 263] applique son théorème à la recherche de courbes ayant plusieurs contacts avec une courbe donnée et [Philos. Trans. London 161 (1871), p. 369; Papers 8, Cambridge 1895, p. 212] à la recherche de triangles à la fois inscrits et circonscrits à des courbes données.

130) Math. Ann. 3 (1871), p. 459; 4 (1871), p. 527. On trouvera plus de détails sur les recherches dont il va être question, dans *A. Brill* et *M. Nöther,* Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit [Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/3), éd. 1894, p. 530/65].

131) Math. Ann. 4 (1871), p. 510.

132) Id. 6 (1873), p. 33.

133) Id. 7 (1874), p. 607.

134) Ber. Ges. Lpz. 37 (1885), math. p. 10; Math. Ann. 28 (1887), p. 561. Il a

des intégrales abéliennes. Il trouva que la formule (1) de Cayley-Brill est applicable à toutes les correspondances dont l'existence n'est pas bornée à des courbes algébriques caractérisées par des valeurs particulières des modules (correspondances à valence); le nombre γ peut parfois être négatif, mais ce cas ne peut se présenter que quand la correspondance considérée provient de la décomposition rationnelle d'une autre correspondance représentée au moyen d'une équation, en sorte que la correspondance répondant à un γ négatif ne saurait être complètement définie qu'à l'aide de deux équations au moins. La décomposition en question est d'ailleurs envisagée dans la formule (2) de *A. Cayley*[135]. Pour le nombre des coïncidences relatives aux correspondances singulières sur des courbes à modules particuliers, *A. Hurwitz* a trouvé l'expression

$$\alpha + \beta + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_\mu\lambda_\mu,$$

où les quantités c en nombre fini, sont des constantes relatives à la courbe et où les λ. caractérisent la correspondance envisagée[136]. Il

ensuite [Math. Ann. 32 (1888), p. 290] donné d'autres applications des résultats obtenus.

Une méthode semblable concernant le principe de correspondance avait été déjà suivie auparavant par *F. Lindemann* [J. reine angew. Math. 84 (1878), p. 300; voir aussi dans *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, publ. par *F. Lindemann* 1, Leipzig 1876, p. 661/923; trad. *Ad. Benoist* 2, Paris 1880, p. 146].

Dans *F. Klein* [Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen publ. par *R. Fricke* 2, Leipzig 1892, p. 518] les correspondances algébriques sont traitées d'après *A. Hurwitz*. Voir aussi *H. F. Baker* [Abels Theorem and the allied theory, Cambridge 1897, p. 639] et *H. Burkhardt*, C. R. Acad. sc. Paris 126 (1898), p. 1854.

135) Voir *A. Brill*, Math. Ann. 31 (1888), p. 406. Dans les recherches qui commencent à la p. 374 de ce mémoire et qui continuent [Math. Ann. 36 (1890), p. 321] on poursuit avec soin les procédés d'élimination qui se rattachent à la recherche des coïncidences dans les correspondances algébriques, ou respectivement à celle des „groupes exceptionnels de points" sur une courbe plane. Voir aussi *F. Junker*, Diss. Tubingue 1889.

136) Quelques exemples de telles correspondances singulières, exemples qui sont précisément ceux qui ont amené *A. Hurwitz* à édifier sa théorie, sont fournis par les équations modulaires dites „irrationnelles" [cf. *F. Klein*, Math. Ann. 17 (1880), p. 62]. L'un d'eux est particulièrement simple, c'est celui de la correspondance (1, 1) signalée par *F. Klein* [Math. Ann. 15 (1879), p. 279], entre les points d'une cubique harmonique, correspondance que l'on peut définir de la manière suivante: D'un point a fixé sur la cubique on mène à cette cubique les deux couples harmoniquement conjugués de tangentes et l'on construit ensuite deux rayons axx' et ayy' de l'involution pour laquelle les éléments doubles sont l'un ou l'autre de ces deux couples des tangentes; entre les points x, y où la courbe est coupée par ces deux rayons variables il y a une correspondance (2, 2) qui se décompose rationnellement en deux correspondances (1, 1) [cf. *C. Segre*, Atti Accad. Torino 24 (1888/9), p. 734; *F. Amodeo*, Ann. mat. pura appl. (2) 19 (1891/2), p. 145]. D'autres exemples concernant la courbe double d'une surface unicursale ont été donnés par *M. Bernhard* [Diss. Stuttgard 1897] qui les a étudiés en s'appuyant sur le théorème généralisé du genre [n° 18].

n'a été donné jusqu'à présent, en vue d'applications effectives, aucun procédé permettant de déterminer ces nombres.

La valence, positive ou négative, de toute correspondance à valence pourrait, selon *H. G. Zeuthen*, être déterminée par la moitié du nombre des coïncidences que l'introduction d'un nouveau point double sur la courbe fait, suivant les cas, perdre ou gagner à la correspondance[137].

Outre les applications qui se rattachent aux diverses démonstrations des principes précédents[138], rappelons encore celles de *C. Küpper*[139] relative au nombre des points de Weierstrass sur une courbe algébrique quelconque et celles de *F. Severi*[140] relatives aux singularités d'une courbe dans un espace à plusieurs dimensions.

137) Math. Ann. 40 (1892), p. 99 (deuxième démonstration).

Cette démonstration suppose connue la réductibilité à des courbes rationnelles de l'espèce de courbes envisagées [n°s 3 et 9]; elle s'appuie d'ailleurs sur les mêmes applications du principe de continuité que celles qui ont amené *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* à énoncer [n° 7, note 40] quelques-uns des résultats que l'on fait rentrer aujourd'hui dans la formule de Cayley-Brill.

Les deux démonstrations de *H. G. Zeuthen*, dont la première est complétée et notablement simplifiée dans *H. G. Zeuthen*, Lehrbuch[1]), n°s 117 à 120, visent d'ailleurs à transporter au principe de correspondance de Cayley-Brill la règle directe qui sert au dénombrement des solutions coïncidentes dans le cas du principe de correspondance ordinaire [n° 14]. *F. Severi* [Memorie Accad. Torino (2) 51 (1902), p. 82] a simplifié ces recherches en remplaçant la courbe en question par d'autres courbes plus simples telles que la même détermination soit plus aisée, sans que, par ce changement de courbe, le résultat puisse être modifié.

D'autres démonstrations géométriques de la formule de Cayley-Brill ont été proposées par *H. Schubert* [Abzählende Geom.[47]), p. 86], *K. Bobek* [Sitzgsb. Akad. Wien 93 II (1886), p. 899], *B. Sporer* [Z. Math. Phys. 39 (1894), p. 228] et *R. Sturm*, Geom. Verwandtschaften[52]) 4, p. 222.

C. Segre [Ann. mat. pura appl. (2) 22 (1894), p. 1] a obtenu la formule de Cayley-Brill en transposant ses recherches dans un espace à n dimensions.

138) Parmi ces applications citons celles de *A. Brill* [Math. Ann. 4 (1871), p. 522] relatives aux courbes gauches et celles de *A. Brill* et *H. G. Zeuthen* [Math. Ann. 36 (1890), p. 321; 40 (1892), p. 118] relatives à la détermination de groupes spéciaux, qui ont aussi été déterminés autrement par *G. Castelnuovo* [cf. note 61 et III 19]. Voir aussi la démonstration donnée par *A. Brill* [Math. Ann. 6 (1873), p. 43] des formules de contact de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* [n° 7, note 40].

139) Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1892, p. 257 [cf. III 19]. Ce même problème a aussi été résolu par *A. Hurwitz* [Math. Ann. 41 (1893), p. 403], *C. Segre* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 8 II (1899), p. 89] et *Isabella Cipolla* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 14 I (1905), p. 210/4; Ann. Scuola Norm. sup. Pisa 10 (1908), mém. n° 1].

140) Memorie Accad. Torino (2) 51 (1902), p. 81. A la fin de son mémoire l'auteur fait cependant usage de la méthode fonctionnelle mentionnée n° 9, note 64.

L'interprétation géométrique des lois générales de *A. Hurwitz* au sujet de la correspondance entre deux suites de points d'une courbe a été le but d'une étude approfondie de *F. Severi*[141]); la recherche des coïncidences s'y joint à la détermination des suites linéaires de groupes de points annexées à la courbe.

Il recherche aussi les relations qui existent entre les diverses correspondances possibles sur une même courbe, non seulement celles que l'on obtient par addition en appliquant la formule (2) de *A. Cayley,* mais aussi celles qui résultent par multiplication de deux correspondances. En appliquant le théorème d'Abel on démontre que le nombre de correspondances *indépendantes* sur une courbe déterminée admet un maximé fini[142]).

F. Severi applique encore la correspondance à la géométrie des surfaces possédant au moins deux faisceaux de courbes dont un seul point d'intersection est variable; et il démontre pour ces surfaces un théorème analogue à celui de Bézout.

L'étude de ponctuelles correspondantes situées sur une courbe donnée a servi à *F. Severi* de point de départ pour étendre le théorème d'Abel aux surfaces algébriques, et elle est à la base des recherches que *F. Severi* et ses continuateurs ont effectuées non seulement sur les ponctuelles situées sur une courbe mais aussi sur les ponctuelles et faisceaux de courbes situés sur une surface ou sur une configuration géométrique à n dimensions[143]).

En vue d'énumérations effectives, dans des cas particuliers donnés,

141) Memorie Accad. Torino (2) 54 (1904), p. 1. *F. Severi* [Lezioni di geometria algebrica, Padoue 1908, p. 182 (chap. 6)] traite en détail la même question. „Le procédé qu'il emploie à cet effet, fournit non seulement une interprétation géométrique du principe énumératif de Cayley-Brill, mais est en outre beaucoup plus simple que les méthodes suivies par les autres auteurs."

142) Les interprétations géométriques effectuées par *F. Severi* s'étendent aux diverses applications que l'on a faites du théorème de correspondance de Cayley-Brill. *R. Torelli* [Rend. Circ. mat. Palermo 21 (1906), p. 58] le montre en détail pour les formules de contact de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[40]). *F. Severi* [Geom. algebrica[141]), p. 236] applique le même procédé pour établir une formule de *H. Schubert* et *C. Segre* [Ann. mat. pura appl. (2) 22 (1894), p. 117] qui donne le nombre de groupes de $(r+1)$ points qu'une suite linéaire ∞^r de groupes de points a en commun avec une suite, rationnelle ou irrationnelle, ∞^1.

A. Comessatti [Atti Ist. Veneto (8) 12 (1909/10), p. 871/81] a déterminé le nombre des groupes de $(r+1)$ points communs à $(r+1)$ suites linéaires ∞^r. Voir encore *O. Göhner* [Diss. Tubingue 1913].

143) L'application aux surfaces se rattache à des travaux de *A. Maroni* [Atti Accad. Torino 38 (1902/3), p. 149], de *M. de Franchis* [Rend. Circ. mat.

H. G. Zeuthen[144]) a jugé convenable d'affecter d'une valence chaque correspondance entre deux points d'une courbe; cette valence γ est déterminée par l'équation (1) et peut donc avoir une valeur fractionnaire. Lorsqu'une correspondance se décompose, les équations (2) de *A. Cayley* subsistent encore, et elles permettent non seulement de déterminer les correspondances désignées plus haut sous le nom de *correspondance à valence,* mais aussi, par divisions, les correspondances de même type dans lesquelles une telle correspondance se décompose dans certains cas particuliers. C'est ainsi que l'on peut, par exemple, déterminer les valences des correspondances singulières sur une cubique harmonique (note 136) ou équianharmonique; ils sont égaux à 0, $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$. Dans d'autres cas, le nombre des coïncidences peut être déterminé par l'introduction [cf. note 137] de nouveaux points doubles, et on en conclut ensuite la valence cherchée[145]).

H. G. Zeuthen[146]) a aussi établi un théorème de correspondance concernant une surface donnée. Soient [cf. nº **16**] α et β les nombres des points correspondant à un point P de la surface, et γ l'ordre de la courbe dont les points correspondent à ceux d'une section plane de la surface; soient m l'ordre de la surface et J l'invariant de Zeuthen-Segre correspondant à cette surface [nº **19**, notes 160 et 163]; soient enfin ξ le nombre des points isolés de coïncidence, η l'ordre de la courbe de coïncidence, ζ l'ordre de la surface réglée dont les génératrices relient entre eux les points de coïncidence situés sur la courbe de coïncidence, et ω le nombre des points d'intersection de la courbe de coïncidence avec un cône arbitraire circonscrit à la surface. Le nombre $\varkappa$ déterminé par la relation

$$\xi + \eta + \zeta - \omega = \alpha + \beta + \frac{\gamma}{m} - \varkappa(J+1)$$

est alors ce qu'on appelle la *valence* de la correspondance.

Si l'on prend pour points correspondants y d'un point x les points

Palermo 17 (1903), p. 104; Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 12 I (1903), p. 303] et de *F. Severi* [Atti Accad. Torino 38 (1902/3), p. 185].

La généralisation du théorème d'Abel est donnée par *F. Severi,* Ann. mat. pura appl. (3) 12 (1906), p. 55/79. Cf. note 163 et l'article III 19.

144) *H. G. Zeuthen* [Lehrbuch[1]), nºs 116 à 141] développe le théorème de correspondance de Cayley-Brill et en donne plusieurs applications. La même extension de la notion de valence avait été proposée par *H. Burkhardt*[134]).

145) *H. G. Zeuthen* utilise ici une détermination qu'il avait déjà donnée comme exemple d'une „correspondance sans valence" [Atti del quarto congresso internazionale dei matematici in Roma 1908, publ. par *G. Castelnuovo* 2, Rome 1909, p. 227] avant d'avoir généralisé la notion de la valence.

146) C. R. Acad. sc. Paris 143 (1906), p. 491, 535; Lehrbuch[1]), nºs 152 à 157.

où une courbe dépendant de x et ayant, en x, k intersections confondues, rencontre encore la surface donnée, la valence de cette correspondance sera égale à k.

Quand une correspondance se décompose, une équation analogue à l'équation (2) de *A. Cayley* a encore lieu pour les valences.

Emploi des propositions sur les genres.

18. Théorème élémentaire du genre pour les courbes algébriques. Sa généralisation [III 19]. *A. Clebsch*[147]) a été le premier à tirer parti pour les énumérations géométriques, du théorème suivant: deux courbes dont deux points se correspondent un à un sont du même genre. Les démonstrations géométriques de ce théorème, dues à *L. Cremona*[148]), *E. Bertini*[149]) et *H. G. Zeuthen*[150]), conduisirent à de nouvelles applications.

H. G. Zeuthen fut amené par là même à généraliser le théorème sous la forme suivante[151]):

«Etant donnée une correspondance (x_1, x_2) entre deux courbes de genre p_1 et p_2; si l'on désigne respectivement par y_1 et y_2 le nombre de fois que deux points d'une courbe qui correspondent à un même point de l'autre courbe se confondent, on aura toujours

$$y_1 - y_2 = 2x_2(p_1 - 1) - 2x_1(p_2 - 1).$$

Partout où elle est applicable cette formule jouit d'un grand avantage sur d'autres formules énumératives: le dénombrement des coïncidences multiples y réussit sans que l'on soit obligé de comparer des ordres d'infiniment petits[152]); et ceci est obtenu grâce au perfectionnement

147) J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 98. Outre la troisième formule de Plücker, il trouve par ce moyen les singularités de la développée d'une courbe (une faute qui s'était glissée dans la démonstration a été immédiatement corrigée); [cf. III 19].

148) Teoria geom. delle superficie[18]), p. 45.

149) Giorn. mat. (1) 7 (1869), p. 105.

150) C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 105. Plus tard *H. Schubert* [Math. Ann. 16 (1880), p. 180] emploie à cet effet le principe de correspondance ordinaire.

151) Math. Ann. 3 (1871), p. 150. D'un cas particulier de cette formule, démontré directement au moyen de la considération de la surface de Riemann, *H. Weber* [J. reine angew. Math. 76 (1873), p. 345)] a déduit pour $p > 1$ une inversion du théorème de *B. Riemann* sur la conservation du genre p.

152) De plus elle n'est pas assujettie aux mêmes limitations que le principe de correspondance de Cayley-Brill tel qu'il a d'abord été énoncé [nº **17**]: on ne saurait donc la déduire de ce principe. En ce qui concerne la démonstration

suivant dû à *G. H. Halphen*[153]): la différence $y_1 - y_2$ doit être remplacée par l'expression $\sum(\eta_1 - \eta_2)$, où les nombres η_1 et η_2 affectant deux points homologues M_1, M_2 expriment combien de points correspondant à M_2 ou à M_1 sont respectivement absorbés par M_1 ou par M_2; la somme Σ est étendue à tous les couples de points M_1, M_2 pour lesquels $\eta_1 \gtrless \eta_2$.

Pour toute courbe algébrique plane, le genre p peut d'ailleurs être calculé, d'après la formule suivante[154])

$$2(p-1) = n + \sum(\mu - 1) - 2m,$$

dans laquelle m désigne l'ordre et n la classe de la courbe, μ la multiplicité d'un cycle complet de la courbe et où Σ s'étend à tous les cycles de cette courbe [nº **3**].

Outre les applications (relatives pour la plupart, à des problèmes de contact), que les auteurs précédents ont rattachées à ces formules[155]), nous rappellerons celles qu'en a faites *C. Segre*[156]) dans la géométrie des surfaces réglées et les recherches analogues pour les hyperespaces; et celles de *A. Wiman*[157]) relatives à la courbe double d'une surface réglée et aux courbes algébriques se transformant en elles-mêmes d'une façon univoque.

H. G. Zeuthen[158]) emploie les formules précédentes pour la recherche

donnée par *H. G. Zeuthen*, voir nº **6**, note 37. Dans son Lehrbuch[1]), nºˢ 65 à 92 il s'occupe du genre d'une courbe et de ses applications énumératives.

R. de Paolis a plus tard démontré le théorème en appliquant les principes de l'Analysis situs [III 6] à la surface de Riemann [Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (3) 7 (1890), p. 124; voir aussi la note 151]. Pour des interprétations géométriques, voir *G. Castelnuovo* [Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 7 II (1891), p. 294] et *F. Severi* [Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 36 (1903), p. 495]. Voir aussi la note 164.

153) Bull. Soc. math. France 5 (1876/7), p. 9; *H. G. Zeuthen* [Acta math. 1 (1882/3), p. 171] a étendu sa démonstration numérico-géométrique de façon à y comprendre le cas le plus général envisagé par *G. H. Halphen.*

154) *G. H. Halphen,* Bull. Soc. math. France 4 (1875/6), p. 29.

155) Une autre application a été faite par *M. Bernhard*[186]).

156) Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (4) 3 II (1886/7), p. 3; Math. Ann. 34 (1889), p. 1.

157) Diss. Lund 1892; Acta math. 19 (1895), p. 63; Bihang Svenska Vetensk. Akad. Handl., Afdelning I math. 21 (1896), mém. nº 3 [1895]. Les théorèmes concernant le genre ont encore trouvé des applications aux énumérations géométriques dans les recherches de *G. Castelnuovo* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (4) 5 II (1889), p. 130; (4) 7 II (1891), p. 295] sur les involutions rationnelles et irrationnelles de groupes de points situés sur une courbe donnée, ainsi que dans *M. de Franchis*[145]). Cf. III 19.

158) Bull. sc. math. (2) 11 (1887), p. 82; Rend. Circ. mat. Palermo 3 (1889), p. 171. D'ordinaire la détermination ponctuelle de la courbe se prête assez bien

méthodique des nombres relatifs aux singularités d'une courbe envisagée soit comme lieu de points, soit comme enveloppe de tangentes. La connaissance du genre joue un rôle particulier dans la question de savoir, par exemple, si une courbe donnée est irréductible[159]).

19. Genre de surface et autres nombres analogues. Dans les recherches de géométrie à trois dimensions, on peut faire un usage analogue au précédent de l'égalité entre les genres de deux surfaces en correspondance univoque. Les nombres des points fondamentaux inhérents à une telle correspondance sont aussi très utiles à connaître. *H. G. Zeuthen* a appliqué des méthodes énumératives à cet ordre de recherches[160]).

Il a donné les expressions de deux nombres P et J correspondant à une surface algébrique quelconque déterminée et en a montré l'importance pour l'étude de deux surfaces dont les points se correspondent un à un. Dans ces expressions il n'a d'ailleurs pas seulement eu égard aux nombres qui dépendent des singularités ordinaires de la surface, mais aussi à ceux qui dépendent de certaines singularités spéciales qui peuvent se présenter.

Le nombre P n'est autre que le *genre arithmétique* de la surface déjà introduit par *A. Cayley*[161]) et au sujet duquel *A. Clebsch*[162]) avait déjà démontré qu'il ne change pas par une transformation (1, 1).

à la recherche de l'ordre et des points à cycles multiples. On obtient ensuite le genre au moyen d'une correspondance algébrique entre les points de la courbe envisagée et ceux d'une autre courbe donnée.

159) Voir surtout *M. Nöther*, Acta math. 8 (1886), p. 161 [cf. note 63]. Dans *Ed. Weyr* [Diss. Prague 1873] on rencontre déjà quelques exemples d'autres usages que l'on peut faire encore de la connaissance du genre d'une courbe dans des recherches énumératives.

160) Math. Ann. 4 (1871), p. 21; 10 (1876), p. 545; Lehrbuch[1]), n^{os} 93 et 94. Supposons ici, pour simplifier, que la surface n'ait d'autre singularité qu'une courbe double, et désignons par m l'ordre de la surface, par m' son rang, par m'' sa classe, par m''' le nombre des plans tangents stationnaires qu'on peut lui mener par un point de l'espace; on a alors les relations

$$24(P+1) = m''' - 12m' + 24m,$$
$$J + 4 = m'' - 2m' + 3m.$$

En tenant encore compte d'autres singularités, on peut aussi appliquer ces formules dans des questions d'énumération concernant les surfaces polaires réciproques[108]).

161) Philos. Trans. London 159 (1869), p. 227; Papers 6, Cambridge 1893, p. 356.

162) C. R. Acad. sc. Paris 67 (1868), p. 1238.

Si pour les deux surfaces qui sont en correspondance (1, 1), le nombre J a les valeurs J_1 et J_2 et si dans cette correspondance les deux surfaces contiennent l'une f_1, l'autre f_2 points fondamentaux simples, on a

$$f_1 + J_1 = f_2 + J_2.$$

C. Segre[163]) a mis en évidence le caractère d'„invariant relatif" du nombre J pour les systèmes de courbes tracées sur une même surface, et c'est comme tel que ce nombre J a joué un rôle dans plusieurs recherches effectuées depuis lors. Au sujet d'une application énumérative concernant J voir n° **17**, note 146.

F. Severi[164]) a démontré deux formules concernant la correspondance (α_1, α_2) de deux surfaces, qui jouent ici le même rôle que joue l'extension du théorème du genre [n° **18**] dans le cas de deux courbes. Bornons-nous ici au cas où les points fondamentaux sont tous simples, et non situés sur la courbe dite „de passage" (courbe dont les points correspondent à des points confondus); désignons par ν l'ordre de la courbe de passage, par π le genre de cette courbe, par η le nombre de ses points de rebroussement (à chacun desquels correspondent *trois* points confondus), par λ le nombre de ses points de rencontre avec la courbe suivant laquelle un cône, de sommet arbitrairement fixé, touche la surface; convenons enfin d'affecter de l'indice 1 tout ce qui se rapporte à la première surface et de l'indice 2 tout ce qui se rapporte à la seconde. On a alors

$$\alpha_2(J_1+4) - \alpha_1(J_2+4) = 2(\pi_2-\pi_1) - (\eta_2-\eta_1) + (f_2-f_1),$$

et

$$24\alpha_2(P_1+1) - 24\alpha_1(P_2+1) = 6(\pi_2-\pi_1) - 2(\eta_2-\eta_1) + 3(\lambda_2-3\nu_2) - 3(\lambda_1-3\nu_1).$$

163) Ann. mat. pura appl. (2) 22 (1894), p. 1. Il a aussi étendu l'application de cet invariant à des variétés de une, deux ou trois dimensions [Atti Accad. Torino 31 (1895/6), p. 485].

Il convient toutefois d'observer que ces recherches de *C. Segre* et celles de *F. Severi*[143])[164]), ainsi qu'en général toutes les recherches concernant la théorie et les applications de la notion de genre d'une courbe ou d'une surface, appartiennent à d'autres parties de la géométrie [cf. III 19, III 23, III 25, III 26, III 28] quoiqu'on ait souvent l'occasion d'y faire des énumérations.

164) Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 36 (1903), p. 495 [cf. note 152]. *H. G. Zeuthen* [Lehrbuch[1]), n^{os} 95 à 97] a démontré les formules de *F. Severi* en appliquant les méthodes énumératives qui l'avaient conduit[160]) à la détermination des nombres P et J. Dans son mémoire [Math. Ann. 4 (1871) p. 48] il avait déjà envisagé la représentation plurivoque d'une surface sur un plan [cf. *R. Baldus*, note 120].

H. G. Zeuthen[165]) a aussi démontré une formule donnant le genre d'un système de courbes planes en fonction des nombres inhérents à ces courbes et à leur enveloppe; et il en tire profit pour quelques déterminations de géométrie énumérative relatives aux enveloppes.

Introduction successive de plusieurs conditions; calcul symbolique[166]).

20. Systèmes de courbes; l'indice jonquiérien. Dans l'étude des systèmes de lignes, *W. Braikenridge*[13]) avait déjà montré comment on passe peu à peu de questions très simples à d'autres plus compliquées en remplaçant simplement les droites figurant dans les questions simples par des courbes [n° **4**]. Un procédé si naturel pour la recherche du nombre de courbes qui satisfont à plusieurs conditions données ne pouvait échapper à *J. Steiner*[167]) qui connaissait en effet déjà le nombre

$$m(m+2n-3)$$

des courbes C_n appartenant à un même faisceau d'ordre n et tangentes à une même courbe C_m du $m^{\text{ième}}$ degré[168]). Ce même procédé fut ensuite employé par divers auteurs que la communication des résultats obtenus par *J. Steiner* avait incités à ces sortes de recherches.

Le nombre précédent fut trouvé algébriquement par *J. N. Bischoff*[169]) qui avait remarqué que la condition de contact est de degré

$$m(m+2n-3)$$

par rapport aux coefficients de la courbe C_n. *J. N. Bischoff* en conclut que le nombre des courbes d'ordre n ayant un simple contact avec plusieurs courbes données $C_{m_1}, C_{m_2}, \ldots$ et assujetties à passer par des points fixes en nombre convenable était donné par le produit

$$\prod_{(i)} m_i(m_i+2n-3).$$

Et en opérant ainsi, il parvient à d'autres déterminations encore.

Le même procédé fut aussi employé mais sous forme géométrique par *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[170]). Si μ désigne le nombre des courbes d'un système ∞^1 qui passent par un point donné, il trouva que, dans plusieurs cas, le nombre des courbes du système assujetties à remplir encore une autre condition simple était égal à $\alpha\mu$, le coefficient α dépendant exclusivement de la condition donnée. Il appella „indice“ du système le nombre désigné ici par μ.

En remplaçant les points fixes du système par d'autres conditions, il pouvait, en s'appuyant sur ce résultat supposé général, trouver le nombre des courbes qui satisfont à plusieurs conditions de la nature indiquée. C'est en raisonnant ainsi qu'il crut avoir démontré la formule de *J. N. Bischoff*. Mais, après avoir reconnu que cette formule n'était pas applicable dans certains cas, il ne réussit ni à donner la raison de cet écart, ni à indiquer les restrictions nécessaires pour qu'elle restât vraie.

M. Chasles[171]) aussi se trompa lorsqu'il voulut donner cette explication. L'erreur ne provenait d'ailleurs pas seulement de l'hypothèse inexacte faite par *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, que chaque système ayant μ pour indice doit toujours pouvoir être représenté au moyen d'une équation dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de degré μ d'un paramètre. L'inexactitude de cette hypothèse de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* fut relevée par *G. Battaglini*[172]) qui établit que les coefficients en question sont, plus généralement, des fonctions rationnelles de deux paramètres liés entre eux par une équation algébrique[173]).

La véritable raison des inexactitudes observées en appliquant la formule de *J. N. Bischoff* fut découverte par *L. Cremona* lorsqu'il dirigea son attention sur les droites doubles renfermées dans un système de coniques[174]). La formule de *J. N. Bischoff* ne cesse jamais d'être vraie pourvu que l'on se tienne rigoureusement aux conséquences du fait que la courbe C y est envisagée comme un lieu de points du $n^{\text{ième}}$ ordre [n° **3**] et, par suite, que l'on n'oublie pas de ranger parmi les points de contact tout point où se confondent deux points d'intersection de deux courbes, et qu'alors le nombre cherché reste *fini*.

Ainsi le nombre 8, que la formule de *J. N. Bischoff* nous donne dans le cas des coniques passant par deux points et tangentes à trois

165) C. R. Acad. sc. Paris 78 (1874), p. 274, 339; Lehrbuch [1]), n°s 79 à 83.

166) Cf. III 19.

167) Voir n° **6**, notes 34 et 35.

168) J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 6; Werke 2, Berlin 1882, p. 500. *J. Steiner* assigne de même l'ordre du lieu des contacts entre courbes de deux faisceaux [cf. note 49 et l'article III 19].

169) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 166.

170) J. math. pures appl. (2) 6 (1861), p. 113.

171) Voir n° **13**, note 99.

172) Rendic. Accad. Napoli (1) 2 (1863), p. 149.

173) Ainsi, dans des recherches postérieures, on a pu représenter tout système ∞^1 par une courbe plane, ce qui a permis de ramener la détermination des courbes ou surfaces d'un système qui vérifient des conditions données à celle des points qui leur correspondent sur une courbe plane image du système [n° **31** note 241 et n° **33**].

174) Giorn. mat. (1) 2 (1864), p. 17.

droites, renferme, outre les quatre solutions proprement dites du problème, la droite double joignant les deux points comptée quatre fois. Au contraire le nombre 16 qui, d'après la même formule, serait celui des coniques passant par un point et tangentes à quatre droites, est illusoire, puisque, dans le sens actuel du contact, ce problème, a une infinité de solutions [n° **1**].

En tenant compte de cette explication, *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* a eu soin plus tard de limiter les applications de la formule de *J. N. Bischoff* ainsi que celles de ses propres formules donnant le nombre des courbes qui ont plusieurs contacts d'ordre quelconque avec une courbe donnée [n° **7**, note 40] aux seuls cas où le nombre des points donnés suffit, à lui seul, pour exclure la présence de courbes à branches multiples.

D'autres résultats, également limités, sur les systèmes de courbes auxquelles on impose certaines singularités outre l'ordre, ont été établis par *H. Krey*[175]).

Si l'on remplace les conditions de contact de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* par celles de rencontrer un certain nombre de courbes, chacune en des points dont trois soient en ligne droite, les applications de l'expression $\alpha \cdot \mu$ de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, et aussi de l'expression plus générale $\alpha\mu + \beta\nu$ de *M. Chasles* [cf. n° **22**], sont soumises à des restrictions encore plus étroites[176]).

21. Les deux caractéristiques de Chasles. Dans ses études sur la détermination des coniques au moyen de conditions données, *M. Chasles* trouva, indépendamment des recherches dont *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* avait indiqué la voie, un moyen d'éviter les difficultés précédentes. Pour définir le système, il recourut[177]) à deux nombres μ et ν, appelés „caractéristiques", dont le premier μ coïncide avec l'indice de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* [n° **20**] tandis que l'autre ν est le nombre des coniques du système qui sont tangentes à une droite donnée. Par là, au moyen du principe de correspondance [n° **13**], il obtient une foule d'expressions donnant le nombre des coniques d'un système qui satisfont à des conditions indépendantes de lui. Les expressions se présentaient toujours sous la forme $\alpha\mu + \beta\nu$, où les nombres α et β dépendent exclusivement de la condition donnée.

Au moyen de ces expressions, qu'il appelle „modules" des con-

175) Acta math. 7 (1885/6), p. 49. La déduction est conforme aux formules générales de *H. G. Zeuthen* pour les systèmes de courbes planes [107]).

176) *H. G. Zeuthen* [Lehrbuch [1]), n° 161].

177) C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 222, 297.

ditions[178]) dont il s'agit, et à l'aide de certaines „substitutions géométriques"[179]), on peut remonter successivement des caractéristiques relatives aux systèmes élémentaires, c'est-à-dire aux systèmes entièrement définis par des points donnés et des tangentes données, jusqu'au nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions simples indépendantes les unes des autres mais d'ailleurs arbitraires. Ces conditions étant caractérisées par les nombres

$$\alpha,\ \beta;\ \alpha',\ \beta';\ \ldots;\ \alpha^{\mathrm{IV}},\ \beta^{\mathrm{IV}},$$

M. Chasles[179]) trouva pour résultat l'expression

$$\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{\mathrm{IV}} + 2\sum\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\beta^{\mathrm{IV}} + 4\sum\alpha\alpha'\alpha''\beta'''\beta^{\mathrm{IV}}$$
$$+ 4\sum\alpha\alpha'\beta''\beta'''\beta^{\mathrm{IV}} + 2\sum\alpha\beta'\beta''\beta'''\beta^{\mathrm{IV}} + \beta\beta'\beta''\beta'''\beta^{\mathrm{IV}}.$$

Admettant la généralité de ce procédé *M. Chasles*[180]) l'applique même à des cas où deux ou plusieurs conditions sont inséparables; c'est ainsi que pour représenter une condition double, il se sert des trois nombres

$$\alpha\alpha', \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta, \quad \text{et} \quad \beta\beta'.$$

22. Caractéristiques des systèmes de courbes ou de surfaces. L'attention de *M. Chasles*[181]) s'était déjà portée sur un cas où l'expression

$$\alpha\mu + \beta\nu$$

demeure applicable à un système ∞^1 de courbes, quel que soit le degré de celles-ci; ce cas était celui du problème qui consiste à trouver le nombre des courbes du système qui sont tangentes à une courbe donnée dont α est la classe et β l'ordre.

Une extension analogue pour d'autres résultats de la même forme fut indiquée par *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[182]) qui trouva en outre dans beaucoup de cas, comme nombre des surfaces d'un système ∞^1 auxquelles on impose une nouvelle condition, un résultat de la forme

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho,$$

où les caractéristiques μ, ν, ϱ expriment le nombre des surfaces du système passant par un point donné, ou tangentes à une droite, ou tangentes à un plan[183]). En particulier, pour la condition de contact

178) C. R. Acad. sc. Paris 59 (1864), p. 348.

179) Id. 59 (1864), p. 216.

180) Id. 59 (1864), p. 315. *L. Cremona* [id. 59 (1864), p. 776, cf. note 209] apporte à ce procédé quelques modifications.

181) C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 308. Cf. n° **13**, note 103.

182) Id. 58 (1864), p. 535.

183) Id. 58 (1864), p. 567; 61 (1865), p. 440.

avec une surface arbitraire, les nombres α, β, γ deviennent respectivement la classe, le rang et l'ordre de cette surface.

Pour établir en partant de là une détermination complète du nombre des courbes ou des surfaces qui vérifient à la fois plusieurs conditions de cette nature, il suffisait d'obtenir les caractéristiques des systèmes élémentaires. C'est ce que fit plus tard *M. Chasles*[184]) pour les surfaces du second degré, après qu'il eût établi les nombres correspondants pour les coniques dans l'espace.

On verra plus loin [n° **31**] que le nombre des courbes ou celui des surfaces du second ordre (pour ne parler que de celles-là) qui vérifient une condition donnée, en même temps qu'elles appartiennent à un système ∞^1 donné, ne peut pas toujours être représenté par une expression de la forme

$$\alpha\mu + \beta\nu$$

ou de la forme

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho.$$

Toutefois, la méthode de l'introduction successive des conditions imposées et, à cet effet, la recherche des caractéristiques de toutes sortes

184) C. R. Acad. sc. Paris 62 (1866), p. 405; 61 (1865), p. 389.

Pour une détermination différente de ces mêmes caractéristiques, ainsi que d'autres caractéristiques, voir n^{os} **27** à **30**.

G. Salmon [Quart. J. pure appl. math. 8 (1867), p. 1] s'est aussi occupé de ces mêmes déterminations. *D. Montesano* [Atti Accad. Torino 27 (1891/2), p. 660; Atti del quarto congresso internazionale dei matematici in Roma 1908, publ. par *G. Castelnuovo* 2, Rome 1909, p. 231; K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen natuurk. Afdeeling 20 (1910/1), p. 584; Atti Accad. sc. fis. mat. (Naples) (2) 15 (1913), mém. n° 8 [1911]]; *G. Humbert* [J. Éc. polyt. (1) cah. 64 (1894), p. 123]; *J. de Vries* [K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen natuurk. Afdeeling 13 (1904/5), p. 281, 355] et *L. Godeaux* [Acad. Belgique, Bull. classe sc. 10 (1908), p. 597, 812; 11 (1909), p. 499; Nouv. Ann. math. (4) 9 (1909), p. 312] s'occupent de différents complexes et congruences de coniques.

A. A. Dalhuisen [Diss. Utrecht 1905] utilise le principe de la conservation du nombre pour déterminer certains nombres de coniques dans l'espace; c'est au fond le même procédé que celui qui avait été déjà employé dans un cas plus général [cf. n° 8, note 51].

Le nombre des coniques qui rencontrent huit droites données a été déterminé par *J. Lüroth* [J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 185] et par *J. de Vries* [K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen natuurk. Afdeeling 10 (1901/2), p. 192] d'une façon différente de celle dont *M. Chasles* avait fait usage dans les deux communications des C. R. citées au début de cette note 184.

Voir aussi, pour certains cas où l'on suppose encore que d'autres conditions soient vérifiées, *M. Stuyvaert,* Mém. couronnés Acad. Belgique in-8°, classe sciences 62 (1902/3), mém. n° 2; Thèse, Gand 1902, chap. 1; *J. Kloboućek,* Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1908, mém. n° 13.

de systèmes, garde toute sa valeur dans les cas qui admettent la représentation précédente; et ces cas sont les plus importants de ceux qui se présentent pour les courbes ou les surfaces du second degré. Naturellement, dans chacun des cas, il faudra prendre garde que la forme

$$\alpha\mu + \beta\nu$$

ou

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$$

ne soit pas admise sans démonstration préalable.

23. Multiplication symbolique. *G. H. Halphen*[185]) remarqua que la formule de Chasles [n° **21**] pouvait être exprimée symboliquement par le produit

$$(\alpha\mu + \beta\nu)(\alpha'\mu + \beta'\nu)(\alpha''\mu + \beta''\nu)(\alpha'''\mu + \beta'''\nu)(\alpha^{\mathrm{IV}}\mu + \beta^{\mathrm{IV}}\nu),$$

à condition que, dans la multiplication, le facteur $\mu^r\nu^s$ fût remplacé par le nombre des coniques passant par r points et tangentes à s droites.

Les facteurs symboliques $\alpha\mu + \beta\nu$ sont alors les modules des conditions respectives [n° **21**, note 178]. De même, *G. H. Halphen* représenta le nombre des surfaces du second ordre satisfaisant à des conditions données par le produit des modules $(\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho)$ correspondant à ces conditions.

C'est en partant de cette représentation symbolique à peine ébauchée dans les quelques cas indiqués que *H. Schubert* a créé un procédé général pour introduire successivement au sens de la géométrie énumérative des conditions nouvelles, indépendantes les unes des autres, dans une figure quelconque.

Comme dans les exemples envisagés par *G. H. Halphen,* chaque condition est, dans le procédé général de *H. Schubert,* exprimée linéairement, au moyen d'un module, par les symboles de certaines conditions élémentaires.

En multipliant les modules relatifs à des conditions simples dont est formée une condition composée, on obtient le module de la condition composée. On parvient ainsi de proche en proche, à une expression symbolique telle que

$$\begin{aligned}&(\alpha\mu + \beta\nu)(\alpha'\mu + \beta'\nu)\dots(\alpha^{(n)}\mu + \beta^{(n)}\nu)\\ &+ (\alpha_1\mu_1 + \beta_1\nu_1)(\alpha_1'\mu_1 + \beta_1'\nu_1)\dots(\alpha^{(n_1)}\mu_1 + \beta^{(n_1)}\nu_1)\\ &+ \dots\end{aligned}$$

185) C. R. Acad. sc. Paris 76 (1873), p. 1074.

dans le cas des figures planes, ou

$$(\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho)(\alpha'\mu + \beta'\nu + \gamma'\varrho) \ldots (\alpha^{(n)}\mu + \beta^{(n)}\nu + \gamma^{(n)}\varrho)$$
$$+ (\alpha_1\mu_1 + \beta_1\nu_1 + \gamma_1\varrho_1)(\alpha_1'\mu_1 + \beta_1'\gamma_1 + \gamma_1'\varrho_1) \ldots (\alpha^{(n_1)}\mu_1 + \beta^{(n_1)}\nu_1 + \gamma^{(n_1)}\varrho_1)$$
$$+ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$$

dans le cas des figures de l'espace; et les expressions symboliques* illustrées par ces exemples donnent le nombre des figures qui satisfont à la fois à plusieurs conditions données en nombre assez grand.

Pour obtenir ce nombre il suffit alors de remplacer dans chacun des termes de la somme trouvée le produit des symboles des conditions élémentaires par le nombre de figures qui y correspondent.

Si dans un terme se trouvent réunies des conditions contradictoires (demandant par exemple qu'une droite se trouve dans un plan arbitrairement donné et qu'elle passe par un point arbitrairement donné de l'espace) on donnera à ce terme la valeur zéro.

Ce „calcul des conditions", que *H. Schubert* développa et enrichit de nombreuses applications[186]), est le point de départ d'une construction systématique de la géométrie énumérative qu'il essaya d'édifier[187]).

Son procédé se rattache directement aux premiers axiomes de la géométrie, et ne s'appuie pas sur des résultats déjà établis en algèbre. La formation des modules sur laquelle repose son procédé s'appuie, il est vrai, sur des méthodes essentiellement algébriques, telles que le principe de permanence du nombre et le principe de correspondance, mais l'emploi de ces méthodes n'est utilisé qu'une fois; après quoi, sans autres ressources que la multiplication symbolique et la combinaison des égalités obtenues successivement, on parvient à des résultats que l'on ne pourrait établir autrement que par l'emploi réitéré et pénible des deux principes indiqués. C'est ainsi que du principe de la conservation du nombre, on déduit les formules appelées formules „d'incidence" [n° **24**]; tandis que c'est surtout du principe de correspondance que dérivent d'autres formules dites „de coïncidence" [n° **25**].

D'ailleurs comme la représentation symbolique donne à chaque résultat acquis une formulation précise, elle fournira un excellent point de départ pour en déduire des faits nouveaux.

24. Les formules d'incidence de Schubert[188]). En général, on dit que deux éléments sont incidents[189]) pour exprimer qu'ils sont situés

186) Math. Ann. 10 (1876), p. 1, 318; communications préliminaires: Nachr. Ges. Gött. 1874, p. 267; 1875, p. 359.

187) Abzählende Geom.[47]), Leipzig 1879.

188) Math. Ann. 10 (1876), p. 26; Abzählende Geom.[47]), p. 25.

l'un sur l'autre; deux droites sont incidentes lorsqu'elles se rencontrent. La première formule d'incidence concerne une droite g et un point p situé sur elle. Les symboles p et g désignent respectivement le nombre des points p situés dans un plan donné et le nombre des droites g rencontrant une droite donnée; ainsi pg est le nombre des couples d'éléments incidents (p, g) dont le premier appartient à un plan donné, tandis que le deuxième doit couper une droite donnée. En transportant la droite donnée sur le plan donné, on déduit immédiatement que

$$\text{(a)} \qquad pg = p_g + g_e,$$

p_g désignant le nombre des cas où p appartient à une droite donnée, g_e celui des cas où g est située dans un plan donné.

Ici, comme dans d'autres cas analogues, on sous-entend toujours que les figures considérées sont soumises non seulement aux conditions envisagées mais encore à un nombre d'autres suffisant pour qu'elles soient déterminées; ces autres conditions sont d'ailleurs arbitraires et on peut les introduire comme facteurs dans les deux membres de toutes les égalités symboliques relatives aux figures envisagées. *H. Schubert* commence par multiplier l'équation (a) par les deux conditions p et g; puis il combine les formules ainsi obtenues entre elles et avec celles qui leur correspondent par dualité.

Pour se rendre compte de la portée de ce procédé, il suffit de remarquer que la définition graphique d'une figure composée de points, de droites et de plans, repose entièrement sur des relations d'incidence entre des éléments. Par suite, si l'on envisage ces figures, le nombre de celles qui satisfont à des conditions de l'espèce indiquée pourra être obtenu en multipliant les modules correspondants à leurs divers éléments.

La formule (a) peut déjà être appliquée aux couples formés par un point arbitraire d'une courbe gauche et la tangente en ce point: les nombres p et g sont alors respectivement le degré de la courbe et celui de sa développable (nombre de ses tangentes qui coupent une droite quelconque); g_e exprime la condition de contact de la courbe avec un plan donné; enfin p_g exprime la condition d'intersection avec une droite donnée.

25. Les formules de coïncidence de Schubert; établissement de nouvelles formules. C'est au principe de correspondance que se rattachent en définitive [n° **23**] les formules de coïncidence[190]). Si on

189) D'après *H. Schubert* [Math. Ann. 13 (1878), p. 430; Abzählende Geom.[47]), p. 366] cette dénomination est due à *H. Grassmann.*

190) Math. Ann. 10 (1876), p. 54; Abzählende Geom.[47]), p. 42.

l'applique une seule fois à un système ∞^1 de couples de points (p, q), il donne le nombre ε des coïncidences ou points doubles du système par la formule (déjà employée ailleurs)

$$\varepsilon = p + q - g,$$

où p désigne le nombre de couples dont les éléments (p) se trouvent dans un plan donné; et q désigne le nombre de couples dont les éléments (q) se trouvent dans un plan donné; enfin g désigne le nombre de couples pour lesquels la droite joignant les deux éléments (p, q) rencontre une droite donnée.

Les formules qu'on peut tirer de là renferment les deux principes de correspondance du plan et de l'espace [n° **16**]; et depuis 1876 elles remplacent généralement dans les recherches de *H. Schubert* les applications immédiates du principe de correspondance [n° **13**]. *H. Schubert*[191]) envisage aussi d'une manière analogue les coïncidences multiples dans un groupe de points d'une droite mobile, de même que *L. Saltel* pour une droite fixe [n° **15**, note 117]; et il utilise les formules ainsi obtenues pour en déduire une détermination nouvelle des nombres relatifs aux tangentes singulières d'une surface, nombres qu'il avait auparavant déterminés par les formules de coïncidence simples [n° **14**, note 113]. De même il emploie les formules de coïncidence pour un groupe de n rayons appartenant à un même faisceau variable, dans la recherche des singularités d'un complexe de droites[192]).

H. Schubert est même allé plus loin dans la construction systématique des formules; en multipliant certaines formules d'incidence et de coïncidence relatives au triangle, il obtient[193]) des formules donnant des relations entre les nombres des triangles déterminés par certaines conditions données et les nombres des triangles dégénérés en d'autres figures plus simples. C'est en appliquant ces formules aux triangles engendrés par trois points consécutifs d'une courbe qu'il a pu résoudre plusieurs questions élevées de contact [cf. note 49].

26. Nombres fondamentaux et formules d'incidence et de coïncidence de l'espace à n dimensions. Pour étendre avec succès le calcul symbolique et la représentation générale énumérative qui en découle aux espaces à plus de trois dimensions, il est avant tout nécessaire de connaître les *nombres fondamentaux* relatifs à cet espace. C'est cette dénomination qu'adopte *H. Schubert*[194]) pour désigner, dans

191) Math. Ann. 12 (1877), p. 180; Abzählende Geom. [47]), p. 228.

192) Math. Ann. 12 (1877), p. 202.

193) Id. 17 (1880), p. 153.

194) Id. 26 (1886), p. 26. *H. Schubert* [Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), éd. Leipzig 1900, p. 86 [1892]] a aussi condensé dans une formule générale les divers résultats obtenus. *F. Palatini* [Periodico mat. (3) 7 (1910), p. 163] a simplifié cette formule générale.

le cas de la droite, les divers nombres de droites entièrement déterminées par des conditions d'incidence avec plusieurs espaces linéaires donnés.

Toute détermination est fondée ici sur le principe de la conservation du nombre et la multiplication symbolique. On peut citer, comme exemple du même procédé dans l'espace ordinaire, la recherche du nombre des rayons d'une congruence qui rencontrent deux droites données a et b. On vérifie d'abord, par la considération du cas particulier où les droites a et b se coupent, que le produit des conditions d'incidence avec a et b équivaut à la somme du nombre des rayons qui passent par un point donné et du nombre des rayons situés dans un plan donné. On multiplie ensuite les deux membres de l'égalité qui en résulte par les conditions qui expriment que les rayons appartiennent à la congruence.

C'est par des décompositions analogues d'un produit de plusieurs conditions simultanées en une somme de conditions plus simples que *H. Schubert* réussit à déterminer tous les nombres qu'il appelle „fondamentaux".

A ce moment déjà *H. Schubert* se proposait aussi d'assigner les nombres fondamentaux relatifs aux espaces linéaires $[s]$ à s dimensions dans un espace ambiant $[n]$ à n dimensions. Dans des travaux relatifs à cette question[195]), il introduit les notions de «condition fondamentale» et de «forme fondamentale».

Étant donnés $s+1$ espaces linéaires

$$[a_0],\ [a_1],\ \dots,\ [a_s] \qquad (0 \leqq a_0 \leqq a_1 < \cdots < a_s \leqq n),$$

dont chacun est situé dans le suivant et dont le dernier est situé dans $[n]$, on convient de représenter par le symbole

$$(a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_s)$$

la condition complexe par laquelle on impose aux $[s]$ d'avoir, pour $i = 0, 1, 2, \dots, s$, n'importe quel $[i]$ en commun avec l'espace donné $[a_i]$[196]).

C'est évidemment une généralisation des conditions d'incidence [n° **24**]. L'ensemble des $[s]$ pour lesquels cette condition fondamentale est remplie constitue ce que *H. Schubert* appelle une *forme fonda-*

195) Acta math. 8 (1886), p. 97.

196) Ce symbolisme a été ensuite modifié de diverses façons par *H. Schubert* lui-même [Math. Ann. 57 (1903), p. 210] et par *G. Z. Giambelli*[205]).

mentale. Il la représente par

$$[a_0, a_1, \ldots, a_s];^*$$

et le nombre des $[s]$ qui vérifient à la fois plusieurs conditions de ce genre (lorsque ce nombre est fini) est un nombre fondamental des $[s]$. Ce nombre pourra être représenté par le produit de tous les symboles correspondant aux conditions données.

La recherche de ces nombres fondamentaux revient toujours à exprimer le produit de deux conditions fondamentales au moyen d'une somme de conditions fondamentales, *conditions caractéristiques tout à fait arbitraires*.

C'est ce qui a pu être fait successivement dans les travaux que nous allons indiquer et qui comprennent tous les résultats obtenus par l'emploi des nombres mentionnés précédemment. Tout d'abord *H. Schubert*[197]) lui-même a trouvé le nombre des $[s]$ qui sont astreints, non seulement à vérifier la condition générale $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$, mais aussi à rencontrer un nombre déterminé de $[n-s-1]$ donnés, chacun en un point.

G. Castelnuovo[198]) trouva ensuite le nombre des $[s]$ qui, vérifiant toujours la condition fondamentale arbitraire $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$, s'appuient de plus sur un certain nombre de droites données.

M. Pieri[199]) transforma ensuite en une somme de conditions fondamentales le produit d'une $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ par la condition de rencontrer un $[h]$ donné en un point, ou bien[200]) par la condition de couper suivant un $[r]$ un $[n-s+r-1]$ donné; ou enfin[201]) par la condition de couper un $[r]$ donné le long d'un $[r-1]$ appartenant à une figure fondamentale donnée. *F. Palatini* et *G. Z. Giambelli*[202]) sont ensuite parvenus à représenter d'une manière analogue le produit de deux conditions fondamentales arbitraires pour le cas de $s=2$; et *G. Z. Giambelli*[203]) réussit même à établir la formule générale qui donne explicitement le produit de deux nombres fondamentaux de la droite.

197) On en connaissait déjà quelques cas particuliers qui avaient été démontrés analytiquement par *W. F. Meyer* [Math. Ann. 21 (1883), p. 132] et *C. Stephanos* [Thèse, Paris 1884] ou établis par *H. Schubert* lui-même [Mitt. math. Ges. Hamburg 1 (1881/9), éd. Leipzig 1889, p. 134 [1886]].

H. Schubert [Math. Ann. 38 (1891), p. 598] a d'ailleurs continué ensuite ces recherches.

198) Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (4) 5 II (1889), p. 71.

199) Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 26 (1893), p. 534.

200) Id. (2) 27 (1894), p. 214.

201) Id. (2) 28 (1895), p. 441.

202) Atti Accad. Torino 36 (1900/1), p. 459.

203) Memorie Accad. Torino (2) 52 (1903), p. 171.

G. Z. Giambelli[203]) emploie à cet effet un calcul symbolique généralisé. Des analogies frappantes avec la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique lui permettent d'employer pour son but plusieurs résultats de ce domaine. Il s'en est même servi pour d'autres recherches ultérieures[204]).

Les formules d'incidence et de coïncidence ont, elles aussi, été étendues aux espaces à plusieurs dimensions [n^os **24** et **25**]. *H. Schubert*[205]) à qui l'on doit cette extension s'est servi des formules ainsi obtenues pour déterminer dans un $[n]$ les nombres relatifs aux tangentes singulières d'une hypersurface à $n-1$ dimensions [cf. n° **14**, note 112]. Nous avons déjà signalé [n° **16**] les progrès réalisés dans cette voie relativement aux formules de coïncidence.

La formule initiale de *H. Schubert*, relative à l'incidence d'un point et d'une droite, a été généralisée par *M. Pieri*[206]). Ensuite *H. Schubert*[207]), *à l'aide d'une notation plus condensée*, a dressé toute une nouvelle série de formules d'incidence relatives aux couples formés par deux espaces linéaires de m et $m+q$ dimensions dont le premier est entièrement contenu dans le second.

Calcul des caractéristiques au moyen de dégénérescences.

27. Systèmes de coniques. Dans un système ∞^1 de coniques, il y a des coniques particulières:

1°) des droites doubles avec deux sommets;

2°) des coniques à point double ou décomposées en deux droites.

M. Chasles[208]) trouva que leur nombre était, en appelant μ et ν les caractéristiques du système [n° **21**]

$$\lambda = 2\mu - \nu, \qquad \pi = 2\nu - \mu.$$

Bientôt *L. Cremona*[209]) se servit de la première relation pour en déduire

204) Atti Accad. Torino 38 (1902/3), p. 823; 40 (1904/5), p. 1041; 41 (1905/6), p. 102. On y démontre entre autres une nouvelle formule énumérative que *H. Schubert* [Mitt. math. Ges. Hamburg 4 (1901/10), éd. Leipzig 1911, p. 104 [1903]] avait indiquée sans la démontrer. Cf. *M. Bottasso* [Annaes da academia polytechnica do Porto 4 (1909), p. 193] et n° **33**, note 275.

205) Math. Ann. 26 (1886), p. 54, 55.

206) Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1891), p. 261.

**N. Giampaglia* [Atti Accad. Gioenia Catania (4) 17 (1904), mém. n° 15] a obtenu des formules encore plus générales concernant le système incident formé par le point et la droite, ou encore le système incident que le point ou la droite forme avec le plan, dans l'espace à n dimensions.*

207) Math. Ann. 57 (1903), p 209; Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 12 (1903), p. 89.

208) C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864). p. 1173.

209) Id. 59 (1864), p. 776. Voir n° **21**, note 180. *L. Cremona* prend comme

la caractéristique ν dans certains cas où l'autre caractéristique μ était connue d'avance. Peu après, *H. G. Zeuthen*[210]) allait fonder sur ces deux formules une méthode générale pour déterminer simultanément les deux caractéristiques μ et ν. En effet le dénombrement des coniques exprimées par μ et ν est une question moins simple en général que la recherche directe des nombres λ et π; car cette dernière recherche se ramène à une détermination de droites et de points. *H. G. Zeuthen* appliqua sa méthode à la détermination des systèmes de coniques assujetties à toutes sortes de contact (même multiples et d'ordre supérieur) avec des courbes données, douées de singularités *pluckériennes.*

D'ailleurs, comme *H. G. Zeuthen*[211]) l'a fait observer récemment, les cas de dégénérescence peuvent être utiles pour la détermination des coefficients α et β de *M. Chasles* [n° **21**]. Le nombre α indique combien, parmi les coniques satisfaisant à la nouvelle condition adjointe aux conditions données, il y en a qui sont décomposées en une droite donnée et une droite passant par un point déterminé de cette dernière; la définition du nombre β se déduit de celle de α par application du principe de dualité.

Certaines questions analogues relatives aux coniques dans l'espace, par exemple la recherche due à *M. Bottasso*[212]) des coniques plusieurs fois tangentes à des surfaces données, peuvent se rattacher à la détermination des coniques dans un plan. Cependant elles ont été plus souvent rattachées à la détermination des quadriques dont il est parlé au n° **28**.

point de départ les expressions données par *J. Steiner* du nombre des coniques passant par trois points arbitraires et bitangentes, ou encore osculatrices, à une courbe quelconque donnée [n° 4, note 17], et il détermine ainsi le nombre de ces coniques dans le cas où les points donnés sont remplacés, en tout ou en partie, par des tangentes données aux coniques cherchées.

210) Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit, der ere underkastede 4 Betingelser, Diss. Copenhague 1865; trad. Nouv. Ann. math. (2) 5 (1866), p. 241/62, 289/97, 385/98, 433/43, 481/92, 529/40.

La méthode de *M. Chasles* [n° **21**] présuppose que les conditions sont indépendantes les unes des autres, tandis que les conditions qui, dans celle de *H. G. Zeuthen*, définissent un système ne sont pas soumises à cette restriction. Seulement la méthode de *H. G. Zeuthen* ne conduit pas à la détermination des nombres de coniques satisfaisant à des conditions quintuples; *A. Cayley* [n° **9**, note 60] a toutefois déterminé ces nombres d'après les résultats obtenus par *H. G. Zeuthen.*

211) Lehrbuch[1]), n[os] 168 et 171.

212) Ann. mat. pura appl. (3) 8 (1903), p. 233.

28. Systèmes de surfaces et d'hypersurfaces du second degré. Immédiatement après, la même méthode fut appliquée par *H. G. Zeuthen*[213]) à la recherche des caractéristiques μ, ν, ϱ inhérentes à un système élémentaire de surfaces du second ordre. Chaque système ∞^1 de telles surfaces contient un certain nombre φ de cônes, χ de plans doubles limités par une conique, ψ de surfaces décomposées chacune en deux plans ou en deux points sur l'intersection de ces plans (suivant qu'on envisage la quadrique comme lieu de points, ou comme enveloppe de plans). Ces trois nombres sont déterminés par les relations

$$\varphi = 2\varrho - \nu, \quad \chi = 2\mu - \nu, \quad \psi = 2\nu - \mu - \varrho.$$

H. G. Zeuthen emploie ces formules pour en déduire, réciproquement, les caractéristiques μ, ν, ϱ du système; les nombres φ, χ et ψ se rapportent, en effet, à des figures plus simples. Le même procédé fut développé ensuite, et d'une manière plus complète, par *H. Schubert*[214]), qui y fit rentrer la détermination des caractéristiques inhérentes aux systèmes de coniques dans l'espace au moyen de leurs dégénérescences.

H. G. Zeuthen[215]) et *H. Schubert*[216]) ont encore appliqué cette méthode à d'autres systèmes de surfaces du second degré. *H. Schubert*[217]) l'étend

213) Overs. Selsk. Forhandl. København (Bull. Acad. Copenhague) 1866, p. 91. Les résultats avaient été remis auparavant sous pli fermé à l'Académie, mais n'avaient pas été publiés parce que *H. G. Zeuthen,* ayant utilisé pour ses recherches les résultats publiés par *M. Chasles* en 1865, désirait ne pas devancer la publication définitive de *M. Chasles* qui ne parut qu'en 1866 [n° **22**, note 184].

214) J. reine angew. Math. 71 (1870), p. 366.

En profitant de ce que, à cause de l'identité de certaines caractéristiques relatives à des systèmes différents, le nombre des égalités surpasse en général celui des caractéristiques cherchées, *H. Schubert* (qui, à cette époque, ne connaissait pas encore les recherches de *H. G. Zeuthen*) a pu limiter ses déterminations directes aux cas où φ, χ et ψ ont des valeurs assez faciles à déterminer.

215) Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 345; Ann. mat. pura appl. (2) 4 (1870/1), p. 331. Les premières de ces recherches furent complétées par *R. Sturm* [Math. Ann. 7 (1874), p. 578]. Suivant l'exemple de *H. G. Zeuthen* [n° **27**, note 210] qui venait d'utiliser les caractéristiques des systèmes de coniques pour l'étude de la développée et de la catacaustique d'une courbe plane, *R. Sturm* applique les caractéristiques des systèmes de quadriques dans ses recherches sur les droites normales à une surface.

216) Math. Ann. 10 (1876), p. 318. Pour la détermination des modules [n° **23**] dans le cas de plusieurs conditions élémentaires juxtaposées, par ex. des conditions exprimant qu'une quadrique contient une droite donnée.

Dans cet exemple, *A. Hurwitz* [Math. Ann. 10 (1876), p. 354] calcule le module en imposant le passage par trois points de la droite. Voir aussi un mémoire antérieur de *H. Schubert* [Z. Math. Phys. 15 (1870), p. 126].

217) Mitt. math. Ges. Hamburg **1** (1881/9), éd. Leipzig 1889, p. 290 [1889]; 2 (1890), éd. Leipzig 1891 [Festschrift], p. 172.

à un espace à plusieurs dimensions; et par là il trouve numériquement combien, dans un espace à quatre dimensions, de coniques, de surfaces ou d'hypersurfaces sont déterminées par des conditions élémentaires. Plus tard[218]), en se plaçant à un point de vue plus général, il ne se borne plus à déterminer de proche en proche, pour des valeurs de $n, z_1, z_2, \ldots$, le nombre des quadriques vérifiant z_1 fois la condition Z_1, z_2 fois la condition $Z_2, \ldots$, dans un espace à n dimensions: il donne aussi l'expression générale de ces nombres en fonction de $n, z_1, z_2, \ldots$; et cela pour des quadriques à autant de dimensions que l'on veut.

29. Systèmes formés par des courbes d'ordre supérieur. Le calcul des caractéristiques au moyen du dénombrement des divers éléments singuliers ou dégénérés du système a même été abordé dans le cas des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième degré par *S. N. Maillard*[219]) et *H. G. Zeuthen*[220]) et dans celui des systèmes élémentaires de courbes planes du quatrième degré par *H. G. Zeuthen*[221]), ainsi que dans le cas des systèmes de cubiques gauches par *H. Schubert*[222]).

Il fallait procéder de proche en proche. Parmi les espèces particulières de courbes du quatrième ordre, par exemple, il y a les quartiques à un seul point double; par suite la recherche des caractéristiques pour les systèmes de quartiques à un seul point double doit précéder la recherche des caractéristiques pour les systèmes de quartiques générales. A son tour, la première résulte d'une détermination analogue pour les quartiques à deux points doubles ou à un point de rebroussement; et ainsi de suite. On peut dire la même chose au sujet des cubiques gauches. *H. Schubert* a dû, pour ce cas, subordonner le problème à la recherche du nombre des cubiques planes à un point double ou de rebroussement pour lesquelles la position des points singuliers et des tangentes singulières était assujettie à des conditions spéciales[223]).

Dans tous les travaux précédents les relations entre les caractéristiques et les différents nombres de courbes ou de surfaces dégénérées du système sont établies le plus souvent à l'aide du principe de correspondance: ce qui permet d'en déterminer les coefficients par les deux procédés (direct ou indirect) indiqués au n° **14**.

L'emploi du dernier devient possible parce que, dans la plupart des cas, un même nombre figure comme μ d'un système et ν d'un autre système. Pour appliquer le premier procédé, il faut se procurer tout d'abord les ordres infinitésimaux dans le voisinage des courbes singulières du système. Inversement, ces ordres pourront se déduire des coefficients déterminés par la dernière méthode. On parvient ainsi, en général, à se former une idée des courbes singulières contenues dans le système, et en particulier des courbes à branches multiples[224]).

30. Couples de figures liées par une correspondance. Ainsi que *T. A. Hirst*[225]) l'a observé, les formules du n° **27** sont vérifiées aussi pour tout système ∞^1, dont chaque élément est l'ensemble de deux figures réciproques (corrélatives) planes; μ et ν désignent alors les nombres de couples déterminés par deux points conjugués, c'est-à-dire

218) Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), éd. Leipzig 1900, p. 12 [1891]; Math. Ann. 45 (1894), p. 153.

*On y apprend à déterminer, par exemple, en fonction de n et de q, le nombre de quadriques à $q-1$ dimensions qui sont tangentes à

$$n(q+1) - \tfrac{1}{2}q(q-1)$$

espaces donnés à $n-1$ dimensions, le tout dans un espace $[n]$. Ce nombre a été utilisé plus tard par *C. Segre*[271]).*

Dans un espace à quatre ou à cinq dimensions, *P. H. Schoute* [Verhand. Akad. Wetensch. Amsterdam, Afd. Natuurk. eerste Sectie (2) 7 (1899/1901), mém. n° 4] et *A. T. Toxopeus* [id. (2) 9 (1905/8), p. 1] ont donné plus tard d'autres solutions fondées d'ailleurs sur les mêmes procédés énumératifs.

219) Thèse, Paris 1871.

220) C. R. Acad. sc. Paris 74 (1872), p. 521, 664, 726.

221) K. Danske Videnskab. Selsk. (Naturv. math. Afhandl.) (5) 10 (1872/3), p. 287 [cf. n° **14**, note 107].

222) Abzählende Geom.[47]), p. 163. En suivant une marche différente, *R. Sturm* [J. reine angew. Math. 79 (1875), p. 99; 80 (1875), p. 128] avait obtenu, presque simultanément, plusieurs de ces résultats.

E. Veneroni [Rend. Circ. mat. Palermo 16 (1902), p. 209], *M. Stuyvaert* [C. R. Acad. sc. Paris 141 (1905), p. 750/2; J. reine angew. Math. 132 (1907), p. 216/37 [1906]; Mém. Soc. sc. Liége (3) 7 (1907) mém. n° 2, p. 94/120 [1906]], *J. de Vries* [K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen natuurk. Afdeeling 17 (1907/8), p. 2; 20 (1910/1), p. 197] et *L. Godeaux* [Acad. Belgique, Bull. classe sc. 10 (1908), p. 531; Nouv. Ann. math. (4) 8 (1908), p. 31] ont envisagé certains systèmes ∞^2 de cubiques gauches.

223) Math. Ann. 13 (1878), p. 429; Abzählende Geom.[47]), p. 106.

224) Quelques exemples isolés de telles courbes se rencontrent déjà dans *M. Chasles*, *J. Maillard de la Gournerie*, *A. Cayley*, *L. Cremona*, *W. Crofton* et *T. A. Hirst* [C. R. Acad. sc. Paris 64 (1867), p. 799, 1079; Proc. London math. Soc. (1) 2 (1866/9), p. 45 [1867], et aussi (avec quelques inexactitudes) C. R. Acad. sc. Paris 74 (1872), p. 708; Messenger math. (2) 1 (1872), p. 178]; *A. Cayley*, Papers 8, Cambridge 1895, p. 258, 526.

225) Proc. London math. Soc. (1) 5 (1873/4), p. 40; Ann. mat. pura appl. (2) 6 (1873/5), p. 260.

R. Sturm [Geom. Verwandtschaften[52]) 2, p. 233/346; 3, p. 422/517] a exposé cette théorie d'une façon très complète. Il a étendu aux collinéations les procédés d'énumération des corrélations.

deux points dont chacun se trouve sur la droite correspondant à l'autre, ou par deux droites conjuguées; λ désigne le nombre de fois qu'à une même droite correspondent dans un même couple tous les points d'une droite; et π le nombre de fois qu'à un même point correspondent, dans un même couple, toutes les droites d'un faisceau. Si les deux figures réciproques engendrent, dans leur ensemble, un système polaire, on rentre dans le cas du n° **27**. Le dénombrement des dégénérescences représentées par λ et π a ainsi permis à *T. A. Hirst* de calculer les indices μ et ν du système. De cette façon, il trouve le nombre des corrélations qui admettent un nombre suffisant d'éléments donnés (paires de points ou de droites) comme éléments conjugués.

Au début de ses recherches, *T. A. Hirst* déterminait les nombres λ et π d'une façon moins systématique; mais il s'est ensuite[226]) servi, pour cette détermination, d'un procédé analogue au précédent, en utilisant une dégénérescence d'ordre plus élevé qui se rencontre en général dans tous les systèmes dont les éléments sont déjà affectés des dégénérescences dont les nombres sont représentés par λ ou π.

T. A. Hirst appliqua de même les relations du n° **28** à la détermination de figures réciproques dans l'espace. Cependant en 1874 il n'avait établi que les formules[227]); sa recherche complète, dans laquelle les trois dégénérescences du premier ordre sont déterminées au moyen de dégénérescences d'ordre supérieur, ne parut qu'en 1890[228]) alors que *P. Visalli*[229]) avait déjà atteint le même but, au moins en partie.

Pour les figures réciproques à deux dimensions *R. Sturm*[230]) avait étendu la méthode jusqu'à l'appliquer aux gerbes de sommet inconnu, dont un nombre suffisant de rayons et de plans correspondants sont assujettis à passer par des points et des droites donnés arbitrairement dans l'espace. Le calcul par le dénombrement des dégénérescences d'un système a été de même appliqué par *R. Sturm*[231]) au problème de la projectivité dans l'espace, problème qu'il avait déjà étudié auparavant; *H. Schubert*[232]) compléta ces recherches par la considération des cas non encore examinés des formes projectives à une ou deux dimensions. Il en fit aussi des applications aux espaces réciproques à p dimensions[233]) en cherchant, par exemple, le nombre des couples formés par deux $[p]$,* assujettis à vérifier respectivement deux conditions fondamentales [n° **26**] et à couper en même temps un certain nombre de couples d'espaces à $n-1$ dimensions suivant des $[p-1]$ conjugués dans une même corrélation liant entre eux les deux $[p]$.* Il les applique aussi[234]) aux correspondances (1, 2) entre deux formes fondamentales de rang un (∞^1) et[235]) au problème de la projectivité étendu aux correspondances trilinéaires. C'est en partant des résultats de ce dernier problème qu'on détermine une surface cubique à l'aide de 19 conditions.

Enfin c'est encore le dénombrement des formes dégénérées qui a servi d'instrument à *H. Schubert*[236]) pour la recherche de certains nombres relatifs à des congruences linéaires de droites.

Problème des caractéristiques.

31. Systèmes du second degré. *M. Chasles* pensait que le nombre des coniques d'un système ∞^1, qui satisfont à une condition indépendante du système, était *toujours* susceptible d'être exprimé par l'expression

$$\alpha\mu + \beta\nu,$$

où μ et ν sont les caractéristiques du système, tandis que les nombres α et β ne tiennent qu'à la condition donnée [n° **21**]. Par suite, au point de vue de la géométrie énumérative, les nombres μ et ν servi-

226) Proc. London math. Soc. (1) 8 (1876/7), p. 262; Atti Accad. Lincei *Transunti* (3) 1 (1876/7), p. 86; Ann. mat. pura appl. (2) 8 (1877), p. 287.

227) Proc. London math. Soc. (1) 6 (1874/5), p. 7.

228) Id. (1) 21 (1889/90), p. 92. Dès 1877, il en possédait cependant les résultats numériques, la publication de *R. Sturm*[230]) lui ayant fourni le moyen d'énumérer les dégénérescences dont ils dépendent.

229) Atti R. Accad. Lincei, *Memorie mat.* (4) 3 (1886), p. 579; Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 3 I (1886/7), p. 118.

230) Math. Ann. 12 (1877), p. 254; voir aussi id. 19 (1882), p. 461.

231) Id. 15 (1879), p. 407.

232) Abzählende Geom.[47]), p. 194/227. *H. Schubert* [Mitt. mat. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), éd. Leipzig 1900, p. 12 [1891]] a résumé plus tard en des formules générales ses propres résultats avec d'autres dûs à *T. A. Hirst* et à *R. Sturm*.

233) Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), éd. Leipzig 1900, p. 20 [1891]; Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 4 (1894/5), éd. 1897, p. 158.

On doit à *G. Z. Giambelli* [Memorie Ist. Lombardo (3) 10 (1900/4), p. 155 [1903]] la démonstration effective ainsi qu'une généralisation remarquable de la formule de *H. Schubert*. Il a tiré parti, à cet effet, des recherches de *G. del Prete* [Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 30 (1897), p. 400, 464] sur les correspondances projectives dégénérées.

234) J. reine angew. Math. 88 (1880), p. 311.

235) Progr. des Johanneum in Hamburg 1882.

236) Math. Ann. 10 (1876), p. 83; Abzählende Geom.[47]), p. 188. Une partie de ses résultats a été démontrée par *R. Sturm* [Liniengeometrie[52]) 1, p. 125] d'après la détermination des figures corrélatives signalée par *T. A. Hirst*. *V. Martinetti* [Rivista mat. 3 (1893), p. 108] traite la même question par le principe de la conservation du nombre, *E. Weis* [Diss. Breslau 1907] par des combinaisons synthétiques de théorèmes connus [n° **4**].

raient à *caractériser* parfaitement le système, tandis que α et β caractérisaient la condition (d'où le nom de caractéristiques); de sorte que, pour pouvoir résoudre tous les problèmes se ramenant à une certaine condition pour les ∞^1 coniques d'un système ne dépendant pas de cette condition, il suffirait de rechercher les nombres correspondant aux divers systèmes et aux diverses conditions. On pourrait le faire aisément en combinant chaque système avec deux conditions ou chaque condition avec deux systèmes particulièrement simples.

Le problème théorique soulevé par l'idée de *M. Chasles* venait ainsi d'acquérir une grande importance pratique. Plusieurs géomètres[237]) cherchèrent à établir cette opinion sur des bases solides.

Mais la démonstration de cet énoncé, de même que celle de l'énoncé plus restreint de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, qui donnait déjà à l'expression $\alpha\mu$ une certaine importance [n° **20**], ne pouvait être obtenue qu'au moyen d'une formulation convenablement étendue de chaque problème[238]) et telle que les solutions cherchées se présentassent dans certains cas mêlées avec des solutions étrangères qui en altèrent le nombre. Ces solutions étrangères peuvent même se présenter en nombre infini [cf. n° **1**], et dans ce cas l'expression $\alpha\mu$ ou l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$, ne représentant que le degré d'une équation identique, perd tout sens énumératif.

Pour s'assurer de l'exactitude de cette remarque, il suffisait d'un seul exemple où l'énoncé de *M. Chasles* ne fût pas confirmé. De tels exemples furent trouvés par *G. H. Halphen*[239]) qui fit voir en même temps pourquoi, dans ces sortes de cas, le problème n'était plus susceptible d'une formulation conduisant à l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ du nombre de ses solutions. En effet ces formulations n'envisageaient que les dégénérescences dont le nombre est indiqué par λ ou π [n° **27**]; de sorte qu'une *droite double à deux sommets confondus* ne peut y apparaître qu'autant qu'elle rentre dans l'une ou l'autre de ces deux dégénerescences.

Or l'influence due à la nouvelle dégénérescence envisagée par *G. H. Halphen* ne s'arrête pas là: c'est ce que montrent déjà ses premiers

237) *A. Clebsch*, Math. Ann. 6 (1873), p. 1; *G. H. Halphen*, Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 130; *F. Lindemann* dans *A. Clebsch*, Geom.[134]) 1, p. 399; *H. Schubert* et *A. Hurwitz*, Nachr. Ges. Gött. 1876, p. 507; *E. Study*, Math. Ann. 27 (1886), p. 58; 40 (1892), p. 551. Ce dernier donne, dans le premier de ses deux mémoires, une définition algébrique des systèmes en question qui exclut effectivement les cas d'exception signalés par *G. H. Halphen*.

238) Pour être exact en général, le théorème conjecturé par *M. Chasles* devrait être applicable à chaque problème de cette catégorie pouvant se résoudre au moyen d'une équation irréductible, et fournir le degré de cette équation [n° 1].

239) C. R. Acad. sc. Paris 83 (1876), p, 537, 866.

exemples, où la détermination d'une conique singulière est subordonnée, pour des valeurs convenables de m et n, à la connaissance de la limite du rapport $\frac{x^m}{y^n}$, x étant le segment déterminé sur une droite donnée par une conique du système infiniment voisine de la conique considérée, et y le sinus de l'angle des tangentes de la même conique qui passent par un point donné, quantités qui deviennent toutes deux nulles pour une dégénérescence de *G. H. Halphen*. L'ancienne théorie qui n'a égard qu'aux λ coniques singulières correspondant à $x = 0$ et aux π coniques singulières correspondant à $y = 0$ était donc incomplète[240]).

G. H. Halphen[241]) a montré ensuite que toute exception ne rentrant pas dans l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ provient ainsi d'une conique dégénérée de la nature indiquée par lui; de sorte que cette expression $\alpha\mu + \beta\nu$ demeure applicable toutes les fois que le système ne contient pas de telles singularités ou que ces singularités sont incompatibles avec la condition donnée. En ce qui concerne les autres cas, il donna exactement les modifications qu'amène dans la formule l'existence d'une conique ainsi singularisée. Comme la fraction $\frac{m}{n}$ peut prendre une infinité de valeurs, le nombre de solutions n'est pas toutefois susceptible d'être exprimé par une formule générale à un nombre fini de termes.

De plus *G. H. Halphen*[242]) a rattaché à ces principes une détermination tout à fait générale du nombre des coniques qui vérifient à la fois cinq conditions arbitraires indépendantes.

Enfin *G. H. Halphen*[243]) a trouvé aussi une modification analogue

240) Voir aussi *H. Schubert*, Bull. Soc. math. France 8 (1879/80), p. 61; *H. G. Zeuthen* et *E. Study*, Math. Ann. 37 (1890), p. 461; 40 (1892), p. 559; 41 (1893), p. 539; *V. G. Alekseev*, Učenija Zapiski moskovskago Universiteta, Otděl fisiko-matematičeskij, cah. 10 (1893), mém. n° 4. Voir aussi note 244.

241) Proc. London math. Soc. (1) 9 (1877/8), p. 149; Math. Ann. 15 (1879), p. 16; J. Éc. polyt. (1) cah. 45 (1878), p. 27/89.

Pour la démonstration, il représente le système en question par une courbe dont les points d'intersection avec une autre courbe lui donnent les coniques cherchées [n° **20**, note 173]. Celles de ces intersections qui coïncident avec l'origine des coordonnées correspondent aux coniques dégénérées de *G. H. Halphen*.

E. Study [Math. Ann. 40 (1892), p. 551] envisage les mêmes questions à l'aide d'une représentation des coniques du plan par les points d'un espace à cinq dimensions.

H. G. Zeuthen [Lehrbuch[1]), n°s 167/78] a donné une nouvelle exposition, basée sur des méthodes énumératives, de la théorie de *G. H. Halphen* sur la possibilité ou l'impossibilité d'appliquer la formule $\alpha\mu + \beta\nu$ à des systèmes de coniques et a étudié de même le cas de systèmes de quadriques [id. n°s 179/85].

242) Proc. London math. Soc. (1) 10 (1878/9), p. 76.

243) J. Éc. polyt. (1) cah. 45 (1878), p. 76.

à introduire dans l'expression

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$$

[n° **22**] du nombre des quadriques d'un système ∞^1 qui satisfont à une condition donnée, toutes les fois que parmi ces surfaces il y a des formes singulières qui ne rentrent pas dans les formes générales envisagées au n° **28**. *P. del Pezzo*[244]) et *C. Burali-Forti*[245]) ont étendu ces recherches aux systèmes à plusieurs dimensions.

32. Autres caractéristiques. Lorsque les figures d'une certaine classe dépendent de $r+s$ conditions, il est utile, lorsque cela est possible [n° **31**], de représenter leur nombre par une expression de la forme

$$(1) \qquad N = Aa + Bb + \cdots + Kk,$$

où les nombres $A, B, \ldots, K$ relèvent exclusivement des r conditions, tandis que les $a, b, \ldots, k$ relèvent exclusivement des s autres conditions[246]). Les nombres $A, B, \ldots, K$ et $a, b, \ldots, k$ caractérisent respectivement les deux systèmes ∞^s et ∞^r déterminés respectivement par les r et les s conditions. Une telle représentation a effectivement lieu, par ex., dans le théorème de *E. Bézout*[247]) et dans celui de *G. H. Halphen* sur les droites communes à deux congruences [n° **16**, note 120]; la formule ayant alors un seul terme, ou deux termes, respectivement. *H. Schubert*[248]) a établi des formules analogues pour déterminer, dans un espace à n dimensions, le nombre des espaces à k dimensions vérifiant à la fois deux conditions fondamentales d'un poids convenable.

Dans cet ordre d'idées rentrent les recherches de *G. H. Halphen*[249]) sur la possibilité de représenter une courbe algébrique plane douée de singularités tout à fait arbitraires au moyen des nombres de Plücker et des équivalents plückériens des singularités supérieures [n° **3**, note 11], ainsi que l'extension de ces recherches à l'espace[250]). Il parvient aux résultats suivants: on peut représenter, au moyen de ces nombres, par une expression de la forme (1) à deux termes le nombre des points où une courbe algébrique donnée satisfait à une équation différentielle projective du premier ordre ne dépendant pas de la courbe[251]); et par une expression semblable à trois ou quatre termes, suivant que la courbe est plane ou gauche, le nombre analogue pour le cas d'une équation du deuxième ordre. Mais lorsqu'il s'agit d'une équation différentielle du troisième ordre, on ne peut plus construire une expression de ce genre à un nombre fini de termes, qui puisse demeurer valable pour tous les cas[252]).

H. Schubert[253]), à qui l'on doit la conception qu'exprime l'équation (1) du problème des caractéristiques, a donné des théorèmes[254]) sur les caractéristiques relatives aux figures suivantes:

1°) point et droite incidents;

2°) faisceau de rayons;

3°) point, droite et plan, le point étant situé sur la droite et celle-ci dans le plan;

4°) groupe de n points en ligne droite avec la droite qui les porte;

5°) système formé par un faisceau de rayons associé avec n de ses éléments;

244) Rendic. Accad. Napoli (1) 23 (1884), p. 61.

245) Giorn. mat. (1) 24 (1886), p. 309, 334.

246) Lorsqu'on a la certitude que les deux groupes de conditions sont propres à être caractérisés de cette façon, au moyen d'un nombre donné d'indices, il sera avantageux, pour établir la formule en question, d'employer la méthode fonctionnelle de *A. Cayley* [n° **9**].

247) Les applications indirectes du théorème de Bézout dont il a été question aux n^{os} **5** et **6** doivent être regardées comme autant de cas particuliers de l'usage que l'on pourrait faire en général des théorèmes concernant les caractéristiques [n° **31**].

248) Mitt. math. Ges. Hamburg 1 (1881/9), éd. Leipzig 1889, p. 134 [1886]. Cf. n° **8**, note 50. Voir les travaux cités au n° **26** et *H. Schubert*, Math. Ann. 38 (1891), p. 598.

249) J. math. pures appl. (3) 2 (1876), p. 257; Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes, Paris 1883, p. 60 [publié comme appendice à la trad. de *G. Salmon* par *O. Chemin*, Géométrie analytique des courbes planes, (1re éd.) Paris 1883].

250) Bull. Soc. math. France 6 (1877/8), p. 10.

251) C'est un résultat compris dans une extension due à *G. Fouret* de la formule de contact de *M. Chasles* [n° **34**, note 279].

252) Un exemple assez simple en est fourni par la développée d'une courbe plane (C). La développée n'a pas en général de tangente stationnaire, mais elle en acquiert toutes les fois que sur la courbe (C) un point double confondu avec un point de rebroussement donne naissance à un point de rebroussement de seconde espèce. Or cela entraîne toujours un changement dans le nombre des points de rebroussement de la développée, c'est-à-dire à l'égard de points dont les homologues sur la courbe (C) sont déterminés par une équation différentielle du troisième ordre. Cela explique, d'après le théorème de *G. H. Halphen* que l'on vient d'énoncer, que leur nombre peut changer sans que les nombres plückériens de la courbe donnée soient altérés.

253) Nachr. Ges. Gött. 1877, p. 401. A la même époque, *M. Chasles* et *G. Fouret* ont publié quelques propositions analogues quoique d'un caractère moins général [C. R. Acad. sc. Paris 85 (1877), p. 362, 460 et aussi id. 85 (1877), p. 134 216, 844, 944].

254) Abzählende Geom.[47]), p. 289.

6°) le triangle, qu'il n'envisagea que plus tard[255]).

Il n'y a cependant de formules absolument générales que dans les trois premiers cas; puisque dans les cas 4°), 5°) et 6°) la présence de deux grandeurs qui peuvent s'évanouir à la fois amène des conséquences analogues à celles impliquées par le même fait dans les systèmes de coniques[256]). On peut aussi regarder comme un théorème relatif aux caractéristiques la formule de *A. Hurwitz* donnant le nombre des coïncidences qui ont lieu dans une correspondance singulière sur une courbe algébrique [n° **17**, note 134].

Appendice.

33. Établissement de nouveaux liens entre la géométrie énumérative et l'algèbre. Comme on l'a déjà remarqué [n° **1**], la géométrie énumérative n'opère que sur les degrés des équations algébriques; et cependant l'indépendance toujours croissante des méthodes et l'abstraction toujours plus grande de ses problèmes qui se rapportent maintenant à des figures à autant de dimensions que l'on veut accroissait toujours la difficulté de conserver les liens existant entre les expressions numériques cherchées ou trouvées et les équations auxquelles elles se rapportent. Or le maintien de cette liaison intime, en nous rappelant toujours le point de départ et la vraie nature des théories énumératives, est sans contredit un élément de la plus haute importance pour le succès de ces théories. C'est grâce à cette liaison que les recherches énumératives ont pu acquérir l'abondance et aussi la certitude des résultats trouvés; et c'est encore elle qui, inversement, nous permet d'interpréter algébriquement ces résultats, et par suite de les transporter d'un domaine géométrique à un autre pour en déduire sur le champ la solution d'autres questions géométriques relevant des mêmes équations. Aussi, même dans ces derniers temps, a-t-on cherché à rétablir ces liens et à les renforcer[257]).

255) Math. Ann. 17 (1880), p. 153. Cf. note 193.

256) Pour ce qui concerne les deux cas 4°) et 5°), voir les remarques de *G. H. Halphen* [Bull. Soc. math. France 8 (1879/80), p. 31] et de *H. Schubert* [id. 8 (1879/80), p. 60]. Pour le cas 6°), *H. Schubert* avait, dès le début, ajouté lui-même les limitations nécessaires.

257) Grâce à la variété des aspects et à la richesse d'interprétation qui caractérisent l'objet des recherches mathématiques, les occasions d'envisager une même question aux deux points de vue géométrique et algébrique sont très fréquentes. On peut citer ici, dans cet ordre d'idées, *M. Caspar* [Math. Ann. 59 (1904), p. 517] qui aborde, en se plaçant à un point de vue algébrique, des questions analogues à celles dont on va parler dans ce chapitre.

En ce qui concerne le principe de correspondance, il rappelle déjà, sous sa première forme très simple [n° **13**], une connexion immédiate avec une équation algébrique donnant les points de coïncidence[258]); et le dénombrement des diverses espèces de solutions du problème conduit à la décomposition en facteurs du premier membre de l'équation. Cette connexion avec la représentation algébrique se conserve aisément dans les formules de coïncidence que l'on déduit du même principe à l'aide de la multiplication symbolique [n^os **25** et **26**]. Elle apparaît encore en pleine évidence dans la démonstration algébrique qu'a donnée *K. Th. Vahlen*[259]) du principe de correspondance à *n* dimensions, ainsi que dans la démonstration algébrique du principe de Cayley-Brill donnée par *A. Brill*[260]) [n° **17**].

Au contraire, dans les applications du principe de permanence, l'existence des équations correspondantes est supposée à l'avance [n° **9**]. Mais le même principe peut aussi bien s'appliquer immédiatement à des équations algébriques. C'est ce que *S. Roberts*[261]) a utilisé dès 1866 pour rechercher le nombre des solutions des systèmes d'équations que l'on obtient en égalant à zéro tous les déterminants d'une matrice dont le nombre des lignes est moindre que le nombre des colonnes; il remplace, en effet, chaque équation par une autre dont le premier membre est un produit de facteurs linéaires. Tandis que le calcul de *S. Roberts* ne porte que sur le degré relatif à l'ensemble des variables, *A. Brill*[262]) dans une étude algébrique des mêmes équations

Mais il y a lieu de remarquer que le but n'est aucunement atteint par les recherches qui n'ont en vue que de contrôler algébriquement les résultats énumératifs, soit que les principes ayant servi à l'énumération aient été réellement précaires, soit que l'on juge en général les méthodes algébriques plus sûres que les méthodes de la géométrie énumérative. Il faut développer suffisamment les méthodes respectives pour rendre superflu un contrôle des résultats d'un côté ou de l'autre.

258) Ainsi on a pu assurer, dans certains cas, le caractère d'homographie, ou celui d'involution, par de simples énumérations [n° **12**, note 93].

259) J. reine angew. Math. 113 (1894), p. 348.

260) Voir aussi *A. Brill*, Abh. Akad. München 17 (1892), Abt. I (1888/9), p. 91/101.

261) J. reine angew. Math. 67 (1867), p. 266. *S. Roberts* signale lui-même l'identité de sa méthode et de celle dont *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* a fait usage dans ses recherches, citées note 40, où le principe en question joue un rôle fondamental. Les recherches de *S. Roberts* ne sont d'ailleurs qu'une extension de celles de *G. Salmon* [Lessons introductory to the modern higher algebra, (2^e éd.) Dublin 1866, p. 229], faites à l'aide du même principe [cf. note 29].

262) Math. Ann. 5 (1872), p. 378. Voir aussi note 135 et cf. I 10, **60**.

s'occupe du degré par rapport aux diverses variables. *D. Hilbert*[263]) utilise, pour les dénombrements relatifs à ce sujet, sa fonction caractéristique [I 10, **63**] liée à la même théorie algébrique[264]).

Il est essentiel, pour continuer le contact des méthodes énumératives avec l'algèbre, de posséder toujours des définitions exactes des formes sur lesquelles doivent porter les recherches énumératives à autant de dimensions que l'on veut. De telles définitions ont été données par *C. Segre*[265]) en toute généralité dans le chapitre préliminaire de son „Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito". Une forme algébrique („varietà algebrica") y est définie comme l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient un nombre quelconque d'équations algébriques pouvant aussi renfermer rationnellement des paramètres indéterminés. Il peut arriver qu'un tel ensemble soit constitué de plusieurs parties n'ayant pas toutes un même nombre de dimensions. Mais alors, ainsi que le fait ressortir *C. Segre*, un théorème de *L. Kronecker*[266]) nous permet d'isoler ces parties au moyen d'opérations rationnelles, de façon à obtenir pour chacune d'elles une représentation à part. C'est une remarque que l'on pourrait utiliser en bien des cas pour affirmer l'existence d'une équation algébrique dont le degré serait fourni par le principe de la conservation du nombre, sans que l'on soit forcé pour cela de construire effectivement cette équation[267]). Dans les applications des méthodes énumératives, il faut attribuer aussi une haute importance au fait que toute variété algébrique à k dimensions peut être mise en correspondance birationnelle avec une autre variété de cette même dimension, mais appartenant à un espace à $k+1$ dimensions et représentable par conséquent dans cet espace par une seule équation[268]).

*Dans la définition de *C. Segre*[269]), la nature de l'élément générateur ou „point" demeure tout à fait indéterminée. On la fixe arbitrairement suivant le cas; de sorte qu'une même variété algébrique peut s'identifier tour à tour avec les figures les plus hétérogènes et même avec des entités géométriques autres que les figures ordinaires; et cela sans l'intermédiaire d'aucune représentation géométrique.*

Ainsi qu'il arrive dans les représentations des coniques du plan par les points d'un S_5 [n° **31**, note 241], la „variété algébrique" de *C. Segre* est en quelque sorte le type de tous les ensembles susceptibles

263) Math. Ann. 36 (1890), p. 520/1. A la fin d'un mémoire sur les modules et les idéaux, *E. Lasker* [Math. Ann. 60 (1905), p. 20] signale en outre les applications énumératives suivantes de ses résultats algébriques:

1°) une interprétation du calcul des conditions de *H. Schubert* avec de nouveaux fondements pour ce calcul [cf. n°s **23** à **26** de l'article actuel];

2°) la détermination des ordres inhérents aux systèmes d'équations *Salmon-Roberts*;

3°) l'établissement des formules de Plücker et leur extension à l'espace à n dimensions.

A. Brill [Verhandl. des 3. internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, publ. par *A. Krazer*, Leipzig 1905, p. 275] a donné un aperçu général des postulats algébriques inhérents aux méthodes énumératives; cf. n° **9**, note 71. Voir aussi I 10, **60**.

264) D'ailleurs une argumentation analogue à celle du principe de permanence du nombre intervient dans la théorie des fonctions elle-même, et la fonction caractéristique de *D. Hilbert* permet d'effectuer [II 14], dans la théorie des fonctions thêta, d'une manière assez simple la détermination de certains nombres.

H. Poincaré [Bull. Soc. math. France 11 (1882/3), p. 129; Amer. J. math. 8 (1886), p. 289; J. math. pures appl. (5) 1 (1895), p. 219], et après lui *H. Laurent*, *É. Picard* et plusieurs autres géomètres, ont adopté un mode de raisonnement qui revient à ceci: On sait que le nombre de solutions d'un système analytique d'équations peut être représenté par une intégrale définie à l'aide d'une formule connue due à *L. Kronecker*; pourvu que certaines hypothèses soient vérifiées, cette intégrale est une fonction continue des paramètres; comme elle représente un nombre entier elle ne saurait donc changer quand on fait varier ces paramètres d'une façon continue; on peut donc, pour obtenir le nombre de solutions cherché, donner à ces paramètres des valeurs particulières et ensuite dénombrer. C'est ainsi que *H. Poincaré* ne dénombre effectivement dans le cas de certaines fonctions thêta que quand ces fonctions se décomposent en fonctions thêta-elliptiques.

W. Wirtinger [Untersuchungen über Thetafunctionen, Leipzig 1895, § 15, 16] a démontré ces théorèmes, ainsi que d'autres plus généraux, en faisant usage de la fonction caractéristique de *D. Hilbert*, et aussi [Monatsh. Math. Phys. 6 (1895), p. 69; 7 (1896), p. 1] en appliquant une méthode spéciale au calcul d'une certaine intégrale multiple que l'on obtient en faisant usage de l'intégrale de Cauchy.

265) Ann. mat. pura appl. (2) 22 (1894), p. 41/142.

266) J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 28; *J. Molk*, Thèse, Paris 1884; Acta math. 6 (1885), p. 147. Voir l'article I 9, **69**.

267) C'est pourquoi le même théorème de *L. Kronecker* est aussi largement utilisé dans *G. Z. Giambelli*[275]).

268) *L. Kronecker*[266]), p. 31; *J. Molk*[266]), p. 155. C'est à ces recherches que se rattachent les extensions aux espaces à n dimensions de la représentation d'une courbe gauche au moyen d'un cône et d'une surface monoïde [III 25]. Voir à ce sujet *A. Brill* et *M. Nöther* [Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/3), éd. 1894, p. 549]. Pour l'analyse des importants mémoires de *C. Segre*[265]) et *C. Segre*[271]), cf. III 26.

269) *Cette façon d'envisager les variétés algébriques indépendamment de la nature particulière de leurs éléments, et la conception plus générale du „point" qui en résulte, est déjà mise en évidence dans les premiers travaux de *C. Segre*. Voir par ex. Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano [Atti Accad. Torino 20 (1884/5), p. 487/504].*

d'être représentés par les mêmes équations en vertu d'une interprétation géométrique appropriée. Grâce à ces rapprochements *F. Severi*[270]), dans un mémoire où il étudie les nombres caractéristiques et les singularités projectives des formes engendrées par l'intersection de plusieurs variétés algébriques, *et en particulier les «problèmes d'équivalence»,* a pu trouver, par ex., le nombre des coniques d'un plan qui sont tangentes à cinq coniques données [voir les notes 34 et 35] en cherchant le nombre des points d'intersection entre cinq variétés à quatre dimensions d'un espace linéaire à cinq dimensions.

Des recherches ultérieures ne tardèrent pas à être provoquées par une note de *C. Segre*[271]) dans laquelle certains résultats du domaine de la géométrie énumérative[272]) sont mis en jeu pour déterminer le degré des variétés algébriques que l'on obtient en égalant à zéro tous les déterminants d'un même ordre tirés d'une matrice rectangulaire ou carrée *dont les éléments sont des formes arbitraires d'un même degré à plusieurs variables*, et en particulier d'un déterminant symétrique.

C. Segre y joint d'autres théorèmes de géométrie dépendant de la détermination de ces degrés. *F. Severi*[273]) y rattache une détermination du nombre des espaces linéaires à k dimensions coupant plusieurs fois une même ∞^1 rationnelle d'espaces à h dimensions, *c'est-à-dire le nombre des $[k]$ dont chacun possède la propriété de contenir le nombre maximum d'espaces générateurs d'une même ∞^1 rationnelle d'$[h]$.*

Quelques recherches énumératives de *F. Palatini*[274]) se rangent aussi parmi les travaux inspirés de *H. Schubert* et *C. Segre.*

Mais l'étude ébauchée par *C. Segre* était surtout de nature à faire naître le désir:

1°) d'obtenir une déduction algébrique directe de ses résultats liés aux formes algébriques;

270) Memorie Accad. Torino (2) 52 (1903), p. 61 [1902]. *F. Severi* emploie tour à tour les diverses méthodes de la géométrie énumérative. On y rencontre aussi sous une autre forme les résultats de *S. Roberts*[261]).

271) Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (5) 9 II (1900), p. 253. Le mémoire de *F. Severi*[270]) est un peu plus récent.

272) Il s'agit de deux formules données par *H. Schubert* (notes 218 et 233); la dernière n'a été démontrée par *G. Z. Giambelli* qu'après la publication des applications de géométrie énumérative données par *C. Segre*[271]).

273) Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (5) 11 I (1902), p. 52. Cette note renferme aussi la démonstration de quelques-uns des résultats énoncés dans le mémoire cité note 62.

274) Atti Ist. Veneto (8) 3 (1900/1), p. 371; Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (5) 11 I (1902), p. 315.

2°) de donner aux énumérations algébriques qu'il venait d'effectuer ainsi un fondement de géométrie énumérative à l'abri des objections soulevées dans les derniers temps (nº **9** et surtout notes 68 et 69).

C'est ce qu'a entrepris de faire *G. Z. Giambelli.* A l'aide de quelques hypothèses relatives à la matrice donnée *(dont les éléments sont ici des formes plus générales que dans l'hypothèse de *C. Segre**), il parvient[275]) non seulement à démontrer algébriquement les théorèmes de *C. Segre,* mais encore à les généraliser d'une manière remarquable, car au lieu de se borner à la considération des déterminants mineurs d'ordre donné, il annule en même temps les deux matrices que l'on peut déduire de la matrice principale en y supprimant un nombre quelconque de lignes ou de colonnes.

Plus tard[276]) il remania et démontra le principe de permanence sous la forme suivante qui se rattache au calcul symbolique:

«Une figure Γ est assujettie à une condition C dont C' est une spécialisation „uniforme" qui se décompose en plusieurs conditions $C_0', C_1', \ldots, C_t'$ ayant même dimension que C'. Si, pour quelque position que l'on donne à la figure Γ par rapport aux figures impliquées dans la définition de C', aucune des conditions C_i' ne peut être décomposée en plusieurs conditions, sans que les dimensions de celles-ci à l'exception d'une seule excèdent la dimension de celle-là, alors on aura la relation symbolique

$$C = \sum_{i=0}^{i=t} a_i C_i',$$

où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_t$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, mais dont un au moins sera différent de zéro.»

On peut voir comment cette modification du principe a été confirmée par les exemples de *E. Study* et *G. Kohn*[277]); *G. Z. Giambelli* en déduit encore quelques résultats de géométrie à plusieurs dimensions *tirés auparavant par *H. Schubert* de la formulation ordinaire.*

275) Memorie Ist. Lombardo (3) 11 (1905), p. 101 [1904]. Il avait déjà démontré [Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (5) 12 I (1903), p. 294] un théorème moins général. *Il en a tiré aussi [id. (5) 14 II (1905), p. 501, 570, 660] des conséquences géométriques concernant certaines variétés, particulièrement celles engendrées par des systèmes linéaires homographiques de formes; cf. aussi *M. Stuyvaert,* Mém. Soc. sc. Liége (3) 7 (1907), mém. nº 2, p. 4/22 [1906]. Cf. nº **26**, note 204.*

276) Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 13 (1904), p. 545. *Il importe d'observer que le mot „uniforme" (relativement à certaines spécialisations d'une condition donnée) est pris ici dans un sens spécial que l'auteur a pris soin d'expliquer (p. 546/7).* Voir aussi Annaes da academia polytechnica do Porto 4 (1909), p. 18. Cf. nº **9**, note 71.

277) Cf. notes 68 et 69.

34. Applications à des problèmes transcendants. Les propriétés des systèmes de courbes ou de surfaces algébriques qui ne dépendent pas du degré de celles-ci subsistent encore pour les systèmes de courbes ou de surfaces transcendantes, que l'on définit au moyen d'équations différentielles algébriques. Par là, les méthodes énumératives s'appliquent aux „connexes" de *A. Clebsch*[278]) représentés par une équation différentielle algébrique du premier ordre entre deux variables (III C, 10). A un tel système de courbes planes algébriques ou transcendantes on peut toujours affecter les caractéristiques ordinaires μ et ν [n° 22], ainsi que l'a fait *G. Fouret*[279]) en utilisant celles-ci pour la résolution de plusieurs problèmes. Le système de surfaces défini par une équation algébrique aux dérivées partielles d'une fonction de deux variables indépendantes, est appelé par lui[280]) un «implexe de surfaces»; il le caractérise par les nombres ϑ et φ de surfaces tangentes à une droite donnée en un point donné, ou bien tangentes à un plan donné en un point quelconque d'une droite donnée du plan; et, au moyen de ces deux caractéristiques, il exprime le nombre de fois qu'une surface quelconque de l'implexe satisfait à des conditions algébriques données. Un système à caractéristiques ordinaires μ, ν, ϱ [n° 22] de surfaces algébriques ou transcendantes est déterminé par *G. Fouret*[281]) par certains faisceaux d'implexes. Il a poursuivi ensuite les recherches énumératives fondées là-dessus, jusqu'à pouvoir en tirer parti dans quelques problèmes d'intégration.

Des recherches analogues à celles de *H. Schubert* sur les tangentes singulières d'une surface algébrique[112]) ont été effectuées par *A. Voss*[282]) pour les tangentes d'un système rationnel de points-plans, défini par une équation différentielle.

Ces sortes de recherches peuvent donner des critères servant à reconnaître si une équation différentielle est algébriquement intégrable. En effet, les énumérations décèlent, d'une manière plus ou moins complète, la forme de l'intégrale algébrique cherchée lorsque celle-ci existe: après quoi il suffit d'une substitution toute mécanique pour reconnaître s'il en est ainsi ou non[283]).

Quelques applications transcendantes des méthodes énumératives sont encore mentionnées dans la note 264.

278) Math. Ann. 6 (1873), p. 203; *A. Clebsch,* Geom.[134]) 1, p. 926.
Dans les théorèmes de *G. H. Halphen* concernant la détermination de points sur une courbe à l'aide d'une équation différentielle [n° 32 notes 249 et 250] il est tout à fait indifférent que cette équation soit, ou non, intégrable algébriquement.

279) C. R. Acad. sc. Paris 78 (1874), p. 831, 1693, 1837; Bull. Soc. math. France 2 (1873/4), p. 72, 96.

280) C. R. Acad. sc. Paris 79 (1874), p. 467, 689.

281) Id. 80 (1875), p. 167.

282) Math. Ann. 23 (1884), p. 359. Tout système de cette espèce rentre d'ailleurs parmi les systèmes de faisceaux de rayons envisagés à un autre point de vue par *H. Schubert* [n^os 25 et 32]. Voir aussi les recherches de *R. Sturm* [Math. Ann. 28 (1887), p. 277] sur les corrélations nulles (systèmes focaux) d'ordre quelconque.

283) Ce point de vue numérico-géométrique intervient par ex. dans la méthode proposée par *H. G. Zeuthen* [C. R. Acad. sc. Paris 90 (1880), p. 1114] pour reconnaître si une équation différentielle de la forme $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ est intégrable algébriquement, ou non.

Seules les 21 premières pages de l'article III-5 avaient été publiées le 8 juillet 1915 dans le deuxième (et dernier) fascicule du Volume 1 du Tome III. Avec l'autorisation de Gauthier-Villars, il leur a été substitué l'article intégral paru quarante ans plus tard, en 1955, dans les *Œuvres complètes* d'Élie Cartan, Partie III, Volume 2.

III 5. LA THÉORIE DES GROUPES CONTINUS ET LA GÉOMÉTRIE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **G. FANO** (TURIN),
PAR **E. CARTAN** (NANCY).

I. — TRANSFORMATIONS. GROUPES DE TRANSFORMATIONS ET GÉOMÉTRIES CORRESPONDANTES.

1. Transformations. — On trouve déjà des traces de transformations géométriques particulières chez les géomètres grecs, en particulier dans Apollonius (¹). Dans les siècles qui nous ont précédés, on s'est souvent servi de changements de variables, c'est-à-dire de transformations, pour résoudre des équations algébriques et intégrer des équations différentielles. Mais ce n'est que du début du XIXᵉ siècle que date la notion moderne de transformation géométrique : d'une part l'étude systématique des projections, sous l'impulsion des travaux de J. V. Poncelet (²), conduisit les géomètres à la considération des transformations projectives (³) [*cf.* III. 3]; d'autre part, les extensions successives de la notion de coordonnée habituèrent les géomètres à regarder les transformations usitées en analyse, non pas seulement comme de simples changements de variables, mais comme la traduction analytique de *correspondances* entre des figures géométriques. Par une telle correspondance chaque figure peut être regardée comme la *représentation* ou l'*image* de la figure transformée.

(¹) *Cf.* G. LORIA, *Le scienze esatte nell' antica Grecia* [*Memorie Accad. Modena* (2), t. 11, 1895; en partic., p. 231 et suiv.].

(²) * *Traité des propriétés projectives des figures* (1ʳᵉ éd.), Paris, 1822; (2ᵉ éd.), 1, Paris, 1865. *

(³) *Cf.* M. CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1ʳᵉ éd.), *Mém. couronnés Acad. Bruxelles* in 4°, 11, 1837; (2ᵉ éd.), Paris, 1875; (3ᵉ éd.), Paris, 1889.

Une transformation est définie analytiquement par un système d'équations

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans lesquelles les variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sont les *transformées* des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Les fonctions f_i sont supposées définies dans certains domaines, et la transformation n'existe qu'autant que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartiennent à ces domaines. Si les f_i sont des fonctions analytiques de leurs arguments, la transformation est dite *analytique*; les transformations analytiques comprennent, comme cas particuliers, les transformations algébriques, rationnelles, birationnelles, linéaires, etc. Les équations obtenues en résolvant, quand cela est possible, les équations (1) par rapport aux x_i définissent ce qu'on appelle la transformation *inverse* de la transformation considérée.

Au point de vue géométrique, on pourra regarder les x comme les *coordonnées* dans un certain espace (ou dans une portion seulement de cet espace), de certains êtres géométriques (points, droites, plans, sphères, etc.); les x' pourront de même être regardées comme les coordonnées dans un autre espace (ou dans le même) de certains autres êtres géométriques. Les équations (1) définissent alors une transformation, c'est-à-dire une correspondance entre les premiers êtres géométriques et les derniers. Ceux-ci pourront être de même nature que les premiers, mais aussi de nature différente. On obtiendra ainsi, suivant les cas, une *transformation ponctuelle* (établissant une correspondance entre des points et des points), une *transformation de contact* (établissant une correspondance entre des éléments de contact et des éléments de contact), *une transformation de point à plan* (comme par exemple une transformation par polaires réciproques), etc.

Si un être géométrique correspond, par une transformation donnée, à un autre être géométrique, on peut déduire, au moyen de cette transformation, de chaque propriété du premier une propriété correspondante du second : c'est ainsi que les transformations par polaires réciproques ont servi à déduire le théorème de Brianchon du théorème de Pascal [4]. Si les deux êtres géométriques sont de même nature, il peut arriver que certaines propriétés du premier se retrouvent dans le second, autrement dit soient conservées par la transformation : ces propriétés sont dites *invariantes* vis-à-vis de cette transformation.

On peut avoir plus généralement à considérer, non plus une, mais tout un ensemble de transformations d'une certaine espèce faisant

[4] Ch. J. Brianchon, *J. Éc. polyt.*, (1), t. 13, 1806.

correspondre les uns aux autres toute une classe d'êtres géométriques. L'étude de celles des propriétés de ces êtres géométriques qui sont invariantes vis-à-vis des transformations considérées pourra se faire alors sur un seul des êtres géométriques de la classe qui pourra ainsi, à ce point de vue, être regardé comme le représentant de la classe.

Parmi les ensembles de transformations d'une espèce donnée, certains jouent un rôle prépondérant : ce sont les groupes de transformations.

2. Groupes de transformations. Leur classification. — On dit qu'un ensemble de transformations, en nombre fini ou infini, forme un *groupe* lorsque la transformation obtenue en effectuant successivement deux transformations quelconques de l'ensemble (transformation *résultante* ou transformation *produit*) est encore une transformation de l'ensemble [4 bis].

La notion de groupe s'applique non seulement aux transformations définies plus haut, mais encore à toute espèce d'*opérations* de quelque nature qu'elles soient, arithmétique, analytique, géométrique ou autre. On sait bien que cette notion intervient implicitement en mathématiques, comme l'a fait remarquer H. Poincaré, dès les premières spéculations géométriques; elle s'est affirmée explicitement pour la première fois dans la théorie des substitutions, en particulier dans la théorie de Galois des équations algébriques où les opérations qui entrent en considération échangent les uns avec les autres des objets ou éléments en nombre fini. La notion de groupe s'introduisit ensuite dans la théorie des *invariants* des substitutions linéaires [I.11] et dans ses applications à la théorie des nombres [I.16] et à la géométrie [III.8].

Les travaux de C. Jordan [5] mirent en évidence la grande portée de la notion de groupe, qui dépassait de beaucoup les premières applications qui en avaient été faites. Dans leurs travaux géométriques, F. Klein [6]

[4 bis] La transformation inverse de toute transformation de l'ensemble appartient aussi à l'ensemble.

[5] *Voir* les applications que fait C. Jordan (*Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, 1870, 2e et surtout 3e livre) de la théorie des groupes à des problèmes de géométrie et à la théorie des fonctions; *voir* aussi son *Mémoire sur les groupes de mouvements* [*Ann. mat. pura appl.*, (2), t. 2, 1868-1869, p. 167 et 322].

[6] *Voir*, en particulier, de nombreux articles (*Nachrichten Gesellschaft Göttingen* et *Mathematische Annalen*) ainsi que les traités suivants : *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom* 5 *Grade*, Leipzig, 1884; *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, publ. par R. Fricke (t. 1, Leipzig, 1890; t. 2, Leipzig, 1892); *Ueber die hypergeometrische Funktion*, Leipzig, 1894; *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung* (autographié) Göttingue, 1894; *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie* (autographié) (t. 1, Göttingue,

et S. Lie (7) firent de la théorie des groupes une discipline autonome et montrèrent la place centrale qu'elle doit occuper au milieu des autres théories mathématiques. Pendant que F. Klein étudiait plus particulièrement les groupes géométriques discontinus et développait leurs nombreuses applications aux diverses branches des mathématiques (théorie des équations, théorie des nombres, théorie des fonctions), H. Poincaré (8) illustrait d'une manière éclatante, par sa théorie des fonctions fuchsiennes, les services que peut rendre dans la théorie des fonctions la théorie de certains groupes discontinus plus généraux que ceux de F. Klein. En même temps, dans une voie toute différente, S. Lie s'attachait à créer une théorie nouvelle, celle des *groupes continus* [II.23] : le présent article n'est que l'exposé des applications à la géométrie de la théorie des groupes continus de S. Lie.

On voit d'après cela qu'on a été amené à distinguer deux grandes classes de groupes :

1° Les groupes *discontinus*, qui peuvent eux-mêmes être *finis* ou *infinis* suivant qu'ils comprennent un nombre fini ou infini d'opérations ;

2° Les groupes *continus* qui peuvent eux-mêmes être *finis* ou *infinis*

1896; t. 2, Göttingue, 1896). *Voir* aussi : R. Fricke et F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen* (t. 1. Leipzig, 1897; t. 2, Leipzig, 1901, livre I).

On consultera plus particulièrement : *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät zu Erlangen, Erlangen, 1872; reproduit, avec des compléments : *Math. Ann.*, t. 43, 1893, p. 63; traduit en italien par G. Fano, *Ann. mat. pura appl.*, (2), t. 17, 1889-1890, p. 307; en français par H. Padé, *Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. 8, 1891, p. 87, 173; en anglais par M. W. Haskell, *Bull. New-York Math. Soc.*, t. 2, 1892/3, p. 215. *Voir* aussi F. Klein, *Einleitung in die höhere Geometrie* (autographié), t. 1, Göttingue, 1892; t. 2, Göttingue, 1893.

(7) En grande partie dans *Forhandlinger Videnskabs-Selskabet Christiania; Archiv for Math. og Naturvidenskab* (Christiania); *Nachrichten Gesellschaft Göttingen*; *Math. Annalen; Berichte Ges. Leipzig*. On trouvera une liste de ces articles faite par F. Engel [*Bibl. Math.*, (3), t. 1, 1900, p. 174]. La théorie générale des groupes de transformations est exposée dans : S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. 1, Leipzig, 1888; t. 2, Leipzig, 1890; t. 3, Leipzig. 1893. Un exposé plus élémentaire a été fait par G. Scheffers dans S. Lie, *Vorlesungen über kontinuierlichen Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*, Leipzig, 1893.

(8) *Théorie des groupes fuchsiens* (*Acta Math.*, t 1, 1882/83, p. 1); *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta Math.*, t. 1, 1882/83, p. 193); *Mémoire sur les groupes kleinéens* (*Acta Math* , t. 3, 1883/84, p. 49). *Voir* aussi les différentes Communications faites antérieurement (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 333, 395, 859, 957, 1198, 1274, 1484; t. 93, 1881, p. 44, 301, 581; t. 94, 1882) dans lesquelles il étudie les groupes discontinus de substitutions linéaires d'une variable complexe au moyen de décompositions du plan et de l'espace en polygones et polyèdres, et où il construit des fonctions fuschiennes et kleinéennes correspondantes.

suivant que leurs transformations dépendent seulement de *paramètres* arbitraires ou de *fonctions* arbitraires.

On appelle, d'après S. Lie, groupe continu *fini* à r paramètres un ensemble de transformations de la forme (1), dépendant de r paramètres arbitraires essentiels (complexes), possédant la propriété caractéristique des groupes, et contenant la transformation identique. Un ensemble de transformations de la forme (1) constitue au contraire un groupe infini lorsqu'elles dépendent d'un nombre infini de paramètres arbitraires (ou lorsqu'elles dépendent de fonctions arbitraires). Mais en réalité l'énoncé précédent donne des groupes infinis une définition beaucoup trop générale pour pouvoir être utilisée dans l'état actuel de l'analyse. S. Lie l'a restreinte en réservant le nom de *groupe infini* au *groupe* formé d'un ensemble de transformations de la forme (1) jouissant de la propriété que les fonctions f_i soient les solutions les plus générales d'un certain système d'équations aux dérivées partielles en nombre fini : ce système d'équation aux dérivées partielles constitue les équations de définition du groupe (9). On peut d'ailleurs faire rentrer les groupes continus finis dans la catégorie générale précédente en supposant que la solution générale des équations de définition du groupe ne dépend que de constantes arbitraires.

Il existe aussi des groupes qui se composent de plusieurs familles de transformations, dont chacune est continue, sans qu'il y ait un passage continu d'une famille à l'autre, l'une de ces familles formant un groupe continu (fini ou infini). On désigne ces groupes sous le nom de groupes *mixtes* (10).

Quelque diverse que soit la nature des opérations qui composent un groupe, il est certaines notions qui se retrouvent toujours et qui font pour ainsi dire corps avec celle de groupe ; telles sont les notions de groupes semblables, de sous-groupes, de sous-groupe invariant. Certains théorèmes relatifs à ces notions se retrouvent de même dans toutes les catégorie de groupes. Mais il est d'autre part évident que l'appareil analytique qui sert à raisonner sur ces notions dépend essentiellement de la catégorie de groupes dont il s'agit. En particulier, l'une des notions

(9) Les principes de la théorie des groupes infinis de S. Lie sont exposés : *Forhandlinger Videnskabs-Selskabet Christiania*, 1883, éd. 1884, mém. n° 12; 1889, éd. 1890, mém. n° 7; *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 43, 1891, p. 316 et 353; *Untersuchungen über. unendliche kontinuierlichen Gruppen*, en partie rédigé par F. Engel, *Abh. Ges. Lpz* (*math.*), t. 21, 1895, p. 41.

(10) *Transformationsgruppen*, t. 1. On peut citer comme exemples le groupe des déplacements et retournements, le groupe des substitutions linéaires dont le déterminant est entier, ou racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

les plus importantes comme on le verra plus loin, celle de *structure* (loi de composition des opérations du groupe) se présente dans le cas des groupes *continus* sous une forme analytique spéciale. S. Lie a introduit dans cette théorie la notion nouvelle, et très importante en elle-même, de *transformation infinitésimale*. Il représente la transformation infinitésimale

$$\delta x_i = \xi_i \, \delta t$$

par le symbole

$$\mathrm{X}f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

qui indique que la fonction f des variables $x_1, \ldots, x_n$ est changée par la transformation infinitésimale dans la fonction $f + \mathrm{X}f\delta t$. Un groupe *fini* à r paramètres contient r transformations infinitésimales *indépendantes*

$$\mathrm{X}_1 f, \quad \mathrm{X}_2 f, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}_r f,$$

toute transformation infinitésimale du groupe pouvant, d'une manière et d'une seule, être mise sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients constants de $\mathrm{X}_1 f, \ldots, \mathrm{X}_r f$. On obtient les transformations finies du groupe (au voisinage de la transformation identique) en effectuant une infinité de fois de suite les transformations infinitésimales. Les crochets

$$(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_k) = \mathrm{X}_i(\mathrm{X}_k f) - \mathrm{X}_k(\mathrm{X}_i f)$$

sont des fonctions linéaires des X_l à coefficients constants c_{ikl} : ce sont ces coefficients qui déterminent analytiquement la structure du groupe. A tout système de constantes c_{ikl} satisfaisant à certaines relations algébriques déterminées [II.00] correspondent une infinité de groupes à r paramètres de même structure.

Les groupes continus infinis peuvent aussi être regardés comme engendrés par des transformations infinitésimales ; la première définition donnée par S. Lie de ces groupes en 1883 [11] faisait même intervenir uniquement une propriété de leurs transformations infinitésimales, à savoir que les fonctions ξ_i qui y entrent devaient satisfaire à un certain système d'équations aux dérivées partielles *linéaires* en nombre fini. On n'a cependant pas étendu au cas des groupes infinis l'utilisation de transformations infinitésimales pour la détermination analytique de la structure. Mais il est possible de déduire, par un procédé régulier, des équations de définition d'un groupe continu quelconque, fini ou infini,

[11] *Forhandlinger Videnskabs-Selskabet Christiania*, 1883, éd. 1884, mém. n° 12.

un système de constantes (identiques aux constantes c_{ikl} dans le cas des groupes finis), auxquelles il peut être nécessaire d'adjoindre certaines fonctions dans le cas des groupes infinis, et qui définissent analytiquement dans tous les cas la structure du groupe [12].*

3. Point de vue de Klein : la géométrie regardée comme l'étude d'un groupe. La théorie des invariants attachés à un groupe. — F. Klein a montré en 1872 [13] le rôle important joué en géométrie par les groupes de transformations, en particulier par les groupes continus et les groupes mixtes. Certaines théories géométriques ne constituent au fond que l'étude d'un certain groupe.

La géométrie élémentaire en particulier a pour but l'étude des propriétés des figures qui sont indépendantes de la position que ces figures occupent dans l'espace, de leurs dimensions absolues, et du *sens* dans lequel les différentes parties des figures sont disposées (ce sens étant le même pour deux figures superposables, mais non pour deux figures symétriques par rapport à un plan). Autrement dit les propriétés en question sont celles qui sont conservées par tous les déplacements, toutes les transformations homothétiques, toutes les symétries et plus généralement toutes les transformations qui résultent de la composition des précédentes. Ces transformations forment un groupe appelé par F. Klein le *groupe fondamental. Les propriétés « géométriques » des figures sont donc caractérisées par leur invariance vis-à-vis des transformations du groupe fondamental.* La géométrie élémentaire se présente ainsi comme la *théorie des invariants du groupe fondamental de transformations.*

Il y a plusieurs manières de généraliser les considérations précédentes. On peut d'abord, au lieu de considérer *toutes* les propriétés géométriques des figures, ne porter son attention que sur celles qui sont invariantes vis-à-vis d'un groupe plus étendu de transformations ; c'est à ce point de vue, pour prendre un exemple simple, qu'on peut considérer les propriétés *projetives* des figures. Mais on peut, d'une manière beaucoup plus générale, considérer des variétés à un nombre quelconque de dimensions et se poser le problème suivant :

Étant donnée une variété quelconque, et dans cette variété un groupe de transformations, étudier les propriétés des figures de cette

[12] E. Cartan, *Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. 21, 1904, p. 153-206; *voir* Ch. II, p. 176.
[13] *Programme Erlangen. Voir* aussi : *Höhere Geometrie*, t. 2, Göttingue, 1893, p. 27 et suiv.

variété qui sont conservées par les transformations du groupe. La géométrie élémentaire apparaît ainsi, à ce point de vue, comme un cas particulier d'une série de théories géométriques dont chacune est caractérisée par un certain groupe qui lui sert de *groupe fondamental*.

Au point de vue précédent, toute géométrie est l'étude d'une certaine variété (espace ou portion d'espace) à laquelle on a adjoint un certain groupe, le groupe fondamental. Analytiquement les transformations de ce groupe sont représentées par des équations de la forme (1), où les x sont les *coordonnées* des points qui engendrent la variété. Si l'on change le système des coordonnées, les transformations du groupe fondamental prennent en général une autre forme analytique; le groupe primitif est remplacé par un groupe *semblable*, mais sans que cela change en rien l'essence de la géométrie considérée.

*Il peut arriver que pour deux systèmes de coordonnées différents, les équations du groupe aient la même forme : il en est ainsi en particulier pour les systèmes de coordonnées *équivalents*. Convenons d'appeler *équivalentes* deux figures qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation du groupe. Considérons, ce qui est toujours possible d'une infinité de manières, une figure (F_0) qui ne se reproduise que par la transformation identique du groupe fondamental (par exemple un tétraèdre en géométrie élémentaire). Toute transformation T du groupe change (F_0) en une figure équivalente (F), de telle sorte qu'à chaque figure (F) correspond une transformation T et une seule du groupe. Cela posé, si la figure formée de (F) et d'un point M est équivalente à la figure formée de (F_0) et d'un point M_0, on pourra dire que le point M est placé par rapport à (F) comme le point M_0 est placé par rapport à (F_0). Étant donné un système de coordonnées, dit primitif, on en aura un autre, qui sera *équivalent* au premier, en donnant pour coordonnées au point M les coordonnées primitives du point M_0. On peut dire que le système de coordonnées primitif définit, suivant une certaine loi, la position d'un point par rapport à la figure de référence (F_0); le nouveau système de coordonnées équivalent définit suivant la même loi la position du point par rapport à la figure de référence (F). Le passage des anciennes coordonnées aux nouvelles coordonnées définit la transformation du groupe inverse de celle qui fait passer de (F_0) à (F). En géométrie analytique élémentaire on prend habituellement un système de coordonnées cartésiennes défini par un trièdre trirectangle et une unité de longueur. Tous ces systèmes de coordonnées sont équivalents.*

On appelle *corps* un ensemble de figures (lignes, surfaces, familles de lignes, etc.) jouissant de la propriété suivante :

Les différentes figures équivalentes à une figure quelconque de l'ensemble appartiennent encore à l'ensemble.

Le corps est fini si les figures (ou *éléments*) qui le composent dépendent seulement de paramètres arbitraires; sinon il est infini. Dans le premier cas les paramètres dont dépendent les éléments du corps peuvent être regardés comme les *coordonnées* de ces éléments. Citons en géométrie élémentaire, le corps fini des plans, celui des sphères, celui des faisceaux de plans, celui des complexes linéaires, celui des faisceaux de plans parallèles, etc.

Lorsqu'un corps est fini, ses différents éléments sont échangés entre eux par un groupe de transformations portant analytiquement sur les *coordonnées* des éléments du corps. *Deux corps sont *équivalents* lorsque leurs éléments dépendent du même nombre de paramètres et lorsque de plus les deux groupes de transformations qui expriment de quelle manière le groupe fondamental échange entre eux les éléments des deux corps sont *semblables* [14]. Si deux corps sont équivalents on peut choisir les coordonnées de leurs éléments de manière que ces deux groupes deviennent identiques; on peut alors établir entre les éléments des deux corps une correspondance biunivoque telle que les deux éléments correspondants des deux corps soient changés par une transformation quelconque du groupe fondamental en deux autres éléments correspondants. C'est ainsi qu'en géométrie élémentaire on peut faire correspondre à toute droite de l'espace le faisceau de plans dont cette droite est l'axe, ce qui met en évidence l'équivalence du corps des droites et du corps des faisceaux de plans (non parallèles). Il y a de même équivalence entre le corps des faisceaux de plans parallèles et le corps des réseaux de droites parallèles, tout faisceau de plans parallèles correspondant au réseau formé des droites perpendiculaires aux plans du faisceau.*

Nous avons jusqu'ici regardé l'espace comme engendré par des points. Depuis l'introduction du principe de dualité, on a pris l'habitude de considérer également l'espace comme susceptible d'être engendré par des plans. De ce point de vue on regarde un point comme la figure

(14) C'est F. Klein qui a montré l'importance de cette notion en développant à propos des systèmes de vecteurs et des torseurs en géométrie élémentaire, un « principe pour une classification rationnelle des grandeurs géométriques ». *Voir* F. KLEIN, *Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball* (*Z. Math. Phys.* t. 47, 1902, p. 23; reproduit *Math. Ann.*, t. 62, 1906, p. 419). La théorie des torseurs de R. S. Ball est exposée dans son livre : *Theory of screws, a study in the dynamics of a rigid body*, Dublin, 1876, et dans *A treatise on the theory of screws*, Cambridge, 1900.

formée d'un réseau linéaire de plans, et toute figure engendrée par des points peut, par suite, être regardée comme engendrée par des plans. Ce point de vue peut être et a été généralisé. On pourra toujours, dans une géométrie donnée, regarder l'espace comme engendré par les éléments d'un corps (fini) (C), à la condition que tout point puisse être regardé comme un lieu d'éléments de ce corps, ou d'une manière plus exacte, à la condition qu'il existe un corps (C′), dont chaque élément soit un lieu d'éléments de (C), et qui soit équivalent au corps des points de l'espace. Pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que la transformation identique du groupe fondamental soit la seule qui reproduise tous les éléments du corps* (C), ou encore qu'il n'existe aucun sous-groupe invariant du groupe fondamental reproduisant tous les éléments de (C).

Lorsqu'on choisit les éléments d'un corps (C) comme éléments générateurs de l'espace, le groupe fondamental prend une forme analytique toute différente de celle qu'il avait; il est représenté analytiquement par des équations qui expriment, en fonction des coordonnées d'un élément du corps (C), les coordonnées de l'élément transformé. Le nouveau groupe fondamental est isomorphe holoédrique de l'ancien sans lui être en général semblable. Il est bien évident que, quel que soit celui des deux groupes qu'on mette à la base de la géométrie, cette géométrie reste essentiellement la même. * Si le groupe fondamental primitif est un groupe infini, au sens de S. Lie, les éléments du corps (C) seront transformés par un groupe infini, mais qui ne sera pas nécessairement un groupe au sens de S. Lie; pour qu'il en soit ainsi, il faudra que le corps (C) satisfasse à certaines conditions. Il conviendra de choisir le corps des éléments générateurs de l'espace de manière que ces conditions soient remplies.*

Il résulte des considérations précédentes que deux géométries pourront être regardées comme *équivalentes* toutes les fois qu'on pourra choisir les corps des éléments générateurs dans les deux géométries de manière que ces corps dépendent du même nombre de paramètres et que les deux groupes fondamentaux correspondants soient semblables. Nous verrons plus loin à quelles conditions il en est ainsi [*cf.* n° 35].

Dans deux géométries équivalentes on peut établir une correspondance biunivoque entre les notions, les postulats et les définitions de l'une et les notions, postulats et définitions de l'autre de manière qu'à tout théorème de l'une des géométries corresponde un théorème de l'autre et réciproquement. Les énoncés des théorèmes diffèrent quant aux termes employés; mais la structure intime des deux géométries est la même.

Nous avons supposé jusqu'à présent que, comme en géométrie élémentaire, les points de l'espace formaient un corps; mais il existe des géométries dans lesquelles il n'en est rien, par exemple la géométrie projective étendue, la géométrie des sphères orientées, la géométrie de Laguerre, les géométries de contact, etc. Dans ces géométries le groupe fondamental est défini pour un certain corps d'éléments générateurs, nécessairement différents des points.

Les éléments générateurs pourraient aussi dépendre de fonctions arbitraires; mais alors le groupe fondamental serait, analytiquement, un groupe fonctionnel; nous laisserons ce cas de côté.

Lorsque dans une géométrie on a fait choix d'un corps d'éléments générateurs, ou plus brièvement, d'éléments de l'espace, et, pour ces éléments, d'un système de coordonnées, les théorèmes fondamentaux de cette géométrie sont fournis par la solution du problème d'analyse suivant : *Étant donnée une variété, et dans cette variété un groupe de transformations, déterminer tous les invariants de ce groupe.* Un invariant est une fonction des coordonnées qui conserve sa forme pour toute transformation du groupe fondamental; on distingue les invariants *absolus* et les invariants *relatifs* : ceux-ci ne se reproduisent qu'à une puissance près d'un facteur dépendant des paramètres de la transformation. Les invariants précédents sont les invariants du corps des éléments générateurs de l'espace; tout corps fini peut admettre des invariants, fonctions des coordonnées des éléments du corps. Certains corps peuvent ne pas admettre d'invariants; mais il existe toujours des corps finis qui en admettent. Il existe aussi d'autres espèces d'invariants, les *invariants différentiels*. Dans sa théorie des groupes de transformations, S. Lie a résolu dans ses traits essentiels le problème de la détermination des invariants. Nous y reviendrons plus loin [*cf.* n° 44 et suiv.].

Le point de vue de F. Klein qui vient d'être exposé a l'avantage de mettre en évidence la vraie nature de la *géométrie différentielle* et de montrer que cette géométrie ne s'oppose pas à la géométrie projective ou à la géométrie algébrique. Elle ne s'oppose qu'à la géométrie de l'*espace complet*. De même qu'il y a une géométrie métrique, une géométrie projective, etc. qui traitent des propriétés métriques, projectives, etc. de l'espace pris dans son intégralité, il y a une géométrie différentielle métrique, une géométrie différentielle projective, etc. qui traitent des propriétés métriques, projectives, etc. de l'espace pris au voisinage d'un point. La théorie des invariants différentiels est du domaine de ces géométries différentielles.

Dans son *Programme d'Erlangen* [6], F. Klein a indiqué plusieurs groupes géométriques dont les théories n'ont été développées que plus tard. De nouveaux groupes géométriques ont été considérés depuis, quelques-uns de leurs sous-groupes ont été ensuite étudiés pour eux-mêmes. Nous nous bornerons dans ce qui suit aux plus importants.

4. La géométrie élémentaire et son groupe fondamental. La géométrie euclidienne. — Le groupe fondamental de la géométrie élémentaire, dont il a déjà été question, est formé de l'ensemble des transformations par similitude qui comprennent en particulier les déplacements et les retournements : ces derniers sont des « opérations de deuxième espèce », dont chacune est le produit d'un déplacement et d'une symétrie. Analytiquement et en coordonnées cartésiennes dans l'espace E_3, toutes ces transformations résultent de la composition :

1° des translations

$$x_1 = x + A, \qquad y_1 = y + B, \qquad z_1 = z + C;$$

2° des rotations autour de l'origine

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + by + cz, \\ y_1 &= a'x + b'y + c'z, \qquad [ab'c''] = 1; \\ z_1 &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

les neuf coefficients de ces formules ne dépendent que de trois paramètres essentiels ;

3° des transformations homothétiques ayant l'origine pour pôle

$$x_1 = \lambda x, \qquad y_1 = \lambda y, \qquad z_1 = \lambda z.$$

Le groupe fondamental de l'espace dépend en tout de 7 paramètres, celui du plan de 4 paramètres, celui de l'espace à n dimensions E_n de $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ paramètres. On donne d'habitude le nom de propriétés *métriques* à celles des propriétés des figures qui sont invariantes par ce groupe. Les distances sont des invariants relatifs, les angles des invariants absolus.

On ne considère ordinairement, en géométrie élémentaire, que les éléments et les transformations réels, bien que les formules précédentes conservent un sens dans le domaine complexe.

F. Klein a appliqué un principe de classification rationnelle des grandeurs géométriques [14] aux « grandeurs hélicoïdales » (mouvements instantanés d'un corps solide, systèmes de forces, torseurs de Ball). Un torseur de Ball, c'est-à-dire l'ensemble des hélices circulaires d'axe donné, de sens de rotation donné et de pas donné, correspond d'une manière univoque au complexe linéaire formé des binormales à ces hélices. Le corps des torseurs de Ball est donc équivalent au corps des complexes linéaires. La théorie des torseurs de Ball est au fond identique à la *géométrie réglée élémentaire* ou *concrète* qui admet le même groupe fondamental que la géométrie élémentaire mais qui utilise le complexe linéaire comme élément générateur de l'espace.

Dans ses cours, F. Klein a repris la classification des grandeurs géométriques de la mécanique et de la physique par rapport au groupe fondamental.

* La *géométrie euclidienne* est celle dont le groupe fondamental est formé des déplacements et des retournements. Ce groupe est invariant dans celui de la géométrie élémentaire ; en géométrie euclidienne les distances sont des invariants absolus.*

5. Groupe projectif général. Géométrie projective. — Le groupe projectif général de l'espace E_n est le groupe des transformations ponctuelles qui jouissent de la propriété que tous les points d'une multiplicité plane E_{n-1} sont transformés dans les points d'une autre multiplicité plane E_{n-1}. Si l'on utilise les coordonnées homogènes, chaque transformation projective est représentée analytiquement par une substitution linéaire et homogène effectuée sur les $n+1$ coordonnées.

On donne le nom de propriétés *projectives* aux propriétés des figures qui sont invariantes vis-à-vis du groupe projectif, et la géométrie projective est celle qui étudie les propriétés projectives. Elle peut être construite en partant des notions fondamentales de multiplicités planes (de différentes dimensions, de *l'incidence* de deux multiplicités planes, de l'ordre des points d'une droite (multiplicité plane à une dimension) [15]. Les différentes propriétés projectives résultent de combinaisons logiques de ces notions. La recherche des invariants projectifs constitue une théorie mathématique désignée souvent sous le nom d' « Algèbre moderne », d' « Algèbre des transformations linéaires », de « Théorie des formes algébriques » [I.11].

Dans E_n le groupe projectif général contient $n(n+2)$ paramètres.

---

[15] F. Enriques, *Lezioni di geometria projettiva*, Bologne, 1898 ; (2e éd.), Bologne, 1904 ; traduit en Allemand par H. Fleischer, Leipzig, 1903, et en français par P. Labérenne, Gauthier-Villars, Paris, 1930 (*voir* en partic., § 5 et 6).

Si l'on ajoute aux transformations projectives proprement dites (homographiques) les transformations dualistiques [dépendant également de $n(n+2)$ paramètres] qui font correspondre aux points les multiplicités planes E_{n-1} et réciproquement, on obtient un groupe mixte, qui est le groupe fondamental de la *Géométrie projective étendue*.

Lorsqu'on prend pour groupe fondamental le groupe formé des transformations homographiques et dualistiques, les points ne forment plus un corps; il faut alors choisir d'autres éléments générateurs de l'espace. Dans E_3 on obtient un corps d'éléments générateurs en prenant l'ensemble des droites; avec ce choix d'éléments générateurs, la géométrie projective prend le nom de *Géométrie réglée projective* [*cf.* n° 10]. On pourra de même dans chaque espace E_n à un nombre impair n de dimensions, prendre les multiplicités planes $E_{\frac{n-1}{2}}$ comme éléments générateurs de l'espace. On peut aussi, pour une valeur quelconque de n, choisir pour élément générateur l'ensemble d'un point et d'une multiplicité plane E_{n-1} ([16]); on peut aussi prendre l'ensemble d'un point et d'une E_{n-1} *contenant ce point*; on obtient ainsi dans le plan l'*élément de courbe*; dans l'espace E_3 l'*élément de surface*, etc.

Dans la géométrie projective proprement dite et la géométrie projective étendue, on peut soit exclure soit admettre les éléments imaginaires. Dans le premier cas on obtient la *Géométrie projective réelle* [III.8] dans laquelle on regarde comme essentiellement distinctes une involution hyperbolique et une involution elliptique sur une droite, et de même une surface du second ordre réglée et une surface non réglée. Dans le second cas on obtient la *Géométrie projective complexe* dans laquelle toute involution a deux points doubles et toutes les involutions, aussi bien que toutes les surfaces du second ordre non dégénérescentes, sont *homologues* (c'est-à-dire sont transformables l'une dans l'autre par une transformation projective convenablement choisie). C'est K. G. Chr. von Staudt ([17]) qui a fondé cette géométrie projective complexe.

Le groupe projectif admet encore une autre sorte d'extension par l'introduction des transformations *antiprojectives* : on obtient une transformation antiprojective en effectuant d'abord une transformation projective et en remplaçant ensuite l'élément transformé par son complexe conjugué ([18]). La nécessité de l'introduction de ces nouvelles transformations ne s'est pas fait sentir tant qu'on s'est borné à considérer en géométrie projective complexe des figures définies par une ou plusieurs équations analytiques entre les coordonnées d'un point. Mais l'introduction de ce que C. Segre ([18]) appelle les figures hyperalgébriques, définies par des équations algébriques par rapport aux coordonnées d'un point et à leurs complexes conjuguées, a nécessité l'introduction des transformations antiprojectives. * Parmi les figures de cette géométrie projective complexe étendue, signalons en particulier les *chaînes* ([19]) qui sont des lieux de points susceptibles d'être transformés par une transformation projective convenable, en des lieux de points tous réels. Signalons aussi les hyperconiques et hyperquadriques réelles obtenues en annulant une forme d'Hermite ([20]) et dont il sera question plus loin. La géométrie projective de la droite complexe, au point de vue étendu qui vient d'être indiqué, est équivalente à la géométrie des rayons vecteurs réciproques du plan, les chaînes de la droite complexe correspondant aux cercles du plan réel.*

On peut enfin considérer une *Géométrie projective bicomplexe*, etc.

6. **Sous-groupes continus du groupe projectif général.** — Certains des sous-groupes du groupe projectif général de E_n présentent un intérêt capital. Presque toutes les géométries considérées jusqu'à présent admettent en effet, par un choix convenable de l'élément générateur et de ses coordonnées, pour groupe fondamental un sous-groupe du groupe projectif général (du moins dans le cas où ce groupe fondamental est

([16]) * N. LENNES, [*Ann. math.* (2), t. 13, 1911/2, p. 11] a établi un système de postulats permettant de fonder la géométrie projective lorsqu'on prend pour élément générateur l'ensemble d'un point et d'un plan. *

([17]) *Beitrage zur Geometrie der Lage*, fasc. 1, Nuremberg, 1856; fasc. 2, Nuremberg, 1857; fasc. 3, Nuremberg, 1860.

([18]) Le fait que ces transformotions ne se ramènent pas à des transformations projectives avait déjà été remarqué par K. G. Chr. von Staudt [*Beiträge* ([17]), n° 225]. Pour $n=1$, c'est-à-dire dans le cas de la droite complexe, ces transformations antiprojectives ne sont pas autre chose que les inversions qui depuis B. Riemann ont joué un rôle si important dans la théorie des fonctions d'une variable complexe (F. KLEIN, *Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer integrale*, Leipzig, 1882; en partic , p. 70 et suiv.). Ces transformations sont introduites explicitement pour $n \geqq 1$ par C. Juel (*Bidrag til den imaginäre linies og plans geometrie*, Diss. Copenhagen, 1885; *Acta math.*, t. 14, 1890/1, p. 1), et, indépendamment de C. Juel, par C. Segre (*Atti Accad. Torino*, t. 25, 1889/90, p. 276, 430, 592; t. 26, 1890/1, p. 33; *Math. Ann.*, t. 40, 1892, p. 413).

([19]) *Les chaînes linéaires sont déjà considérées par K. G. Chr. von Staudt [*Beiträge* ([17]), n° 206. *Voir* aussi C. SEGRE (*Atti Accad. Torino*, t. 25, 1889/90, p. 430); J. W. YOUNG (*Ann. math.*, (2), t. 11, 1910, p. 33; *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 11, 1910, p. 280); dans ce dernier article, J. W. Young considère dans le plan complexe les chaînes *planaires* qui se déduisent, par une transformation projective, de la figure formée par tous les points réels du plan. *

([20]) C. SEGRE, *Atti Accad. Torino*, t. 25, 1889/90, p. 592.

fini). Les résultats connus relativement à ces sous-groupes se rapportent en majorité au cas où les transformations et les paramètres sont complexes ([21]).

a. Le groupe projectif général de la droite ($n=1$) est à trois paramètres. Chacun de ses sous-groupes à deux paramètres est formé de l'ensemble des transformations projectives qui laissent invariant un point fixe; chacun de ses sous-groupes à un paramètre, de l'ensemble des transformations projectives qui laissent invariants deux points fixes (distincts ou confondus) ([22]).

S. Lie ([23]) a aussi démontré le théorème suivant : *Tout groupe continu fini dans une variété (complexe) à une dimension est semblable à un groupe projectif et contient par suite au plus trois paramètres (complexes).*

Ce théorème est aussi vrai ([24]) dans le domaine réel ([25]).

b. S. Lie a déterminé tous les types de groupes continus projectifs du plan, ainsi qu'un représentant de chaque type. Deux groupes projectifs sont dits appartenir au même type lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une même transformation projective effectuée aussi bien sur les éléments primitifs que sur les éléments transformés ([26]).

La détermination effectuée par S. Lie a mis en évidence le théorème suivant : *Tout groupe projectif continu du plan laisse invariant un point ou une droite, à moins qu'il ne soit le groupe projectif général ou le groupe projectif à trois paramètres d'une conique non dégénérescente.*

W. F. Meyer a déterminé les équations finies des différents types de groupes projectifs du plan, aussi bien en coordonnées non homogènes

([21]) En ce qui concerne les groupes réels, *voir* S. Lie, *Transformationsgruppen* ([7]), t. 3, p. 369. On pourra consulter aussi, pour $n=1$ et $n=2$, et pour certains groupes particuliers à trois variables, les travaux de H. B. Newson ([25]).

([22]) S. Lie et G. Scheffers, *Kontinuierliche Gruppen*, p. 129; S. Lie, *Transformationsgruppen* ([7]), t. 3, p. 17.

([23]) *Gött. Nachr.*, 1874; *Math. Ann.*, t. 16, 1880, p. 455; *Theorie der Transformationsgruppen*, t. 3, p. 6.

([24]) *Transformationsgruppen* ([7]), t. 3, p. 369.

([25]) On doit à H. B. Newson (*Bull. Univ. Kansas*, t. 4, 1895, p. 71; *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 6, 1899/1900, p. 431) des recherches synthétiques sur les groupes projectifs continus réels de la ligne droite. Il s'est occupé aussi (*Bull. Univ. Kansas*, t. 1, 1902, p. 115) des groupes projectifs complexes de la droite, interprétés comme groupes conformes rèels du plan.

([26]) *Math. Ann.*, t. 16, 1880, p. 522 et suiv.; *Archiv for Math. og Naturvidenskab* t. 10, 1885, p. 74, (1884); S. Lie et G. Scheffers, *Kontinuierliche Gruppen* p. 288, *Transformationsgruppen* ([7]), t. 3, p. 106.

qu'en coordonnées homogènes ([27]). Chacun de ces types peut être caractérisé par une certaine figure qu'il laisse invariante et aussi par une certaine équation différentielle invariante.

H. B. Newson a déterminé aussi les groupes projectifs du plan, mais d'une manière synthétique ([28]). Il prend pour point de départ les homographies définies par perspective et leurs groupes ([29]), il compose ensuite à l'aide de ces groupes particuliers des groupes projectifs de plus en plus étendus. Il retrouve ainsi tous les groupes projectifs obtenus par S. Lie et il donne de plus les équations finies de chacun d'eux ([30]).

c. Tous les sous-groupes continus du groupe projectif de l'espace E_3 laissent au moins un point, une droite ou un plan invariant, à l'exception :

1° du groupe projectif à dix paramètres d'un complexe linéaire non dégénérescent;

2° du groupe projectif à six paramètres d'une surface du second ordre non dégénérescente;

3° du groupe à trois paramètres d'une cubique gauche.

De ces trois groupes le premier est le seul qui ne laisse invariante ni courbe, ni surface ([31]).

d. Dans l'espace E_4 les seuls groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane sont, en dehors du groupe projectif général d'ordre 24 :

1° le groupe projectif à dix paramètres d'une variété du second ordre à trois dimensions non dégénérescente;

2° le groupe projectif à trois paramètres d'une courbe gauche (variété à une dimension) du quatrième ordre ([32]).

([27]) *Mathematical papers of the Chicago Congress*, 1893, éd. New-York, 1896, p. 187; On peut aussi par des intégrations obtenir les équations finies des groupes finis et continus du plan en partant de leurs transformations infinitésimales.

*W. F. Meyer (*Formen und Invariantentheorie*, Leipzig, 1909) caractérise chaque groupe projectif par un système de huit invariants linéaires. *Cf.* E. Chimanski, *Die algebraischen Invarianten der projektiven Gruppen der Ebene*, Diss. Königsberg, 1910; *voir* aussi W. F. Meyer, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 20, 1911, p. 141.*

([28]) *The Quart. Univ. Kansas*, t. 4, 1895, p. 243; t. 5, 1896, p. 81; *Amer. J. Math.*, t. 24, 1902, p. 109; *Proc. Amer. Assoc. advanc. Sc.*, t. 51, Pittsbourg, 1902, p. 305.

([29]) *Voir* aussi A. Emch, *The Quart. Univ. Kansas*, t. 5, 1896, p. 1.

([30]) Ce n'est que par comparaison avec les résultats de S. Lie que H. B. Newson peut affirmer avoir obtenu tous les groupes projectifs du plan.

([31]) S. Lie, *Archiv for Math. og Naturvidenskad* (Christiania), t. 10, 1885, p. 113 et suiv. (1884); *Transformationsgruppen* ([7]), t. 3, p. 235.

([32]) *G. Kowalewski, *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 51, 1899, p. 69.*

e. Il existe pour n quelconque des théorèmes analogues. *E. Cartan a déterminé tous les groupes projectifs de E_n qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane [33]. Ils se déduisent tous par un procédé de composition régulier d'un nombre fini de groupes projectifs fondamentaux, certains d'entre eux dépendant d'un entier arbitraire (comme le groupe projectif général de E_n, le groupe projectif d'un complexe linéaire de E_{n+1}, etc.).*

Le groupe projectif à $n(n+2)$ paramètres de E_n est simple, c'est-à-dire n'admet aucun sous-groupe invariant; ses plus grands sous-groupes sont à $n(n+1)$ paramètres et sont formés de toutes les transformations qui laissent invariant un point ou un E_{n-1} [34].

*Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane sont simples ou semi-simples; dans ce dernier cas ils sont formés de sous-groupes simples n'ayant aucune transformation infinitésimale commune, les transformations de deux de ces sous-groupes étant échangeables entre elles [35].

Si l'on se borne aux éléments et aux paramètres réels, les résultats sont un peu moins simples [35 bis].

Sur la droite réelle, il existe deux groupes projectifs ne laissant invariant aucun point réel : le groupe projectif général à trois paramètres et le groupe à un paramètre formé des transformations projectives réelles qui laissent invariants deux points imaginaires conjugués.

Dans le plan réel, il existe trois groupes projectifs ne laissant invariant aucun point réel ni aucune droite réelle : le groupe projectif général, le groupe à trois paramètres d'une conique non dégénérescente à points réels, et le groupe à trois paramètres d'une conique non dégénérescente sans points réels.

Dans l'espace E_3 il existe 11 groupes projectifs réels ne laissant invariants ni un point, ni une droite, ni un plan réels :

1° Le groupe projectif général à 15 paramètres;

2° Le groupe projectif à 10 paramètres d'un complexe linéaire;

3° Le groupe projectif à 7 paramètres qui échange entre elles les droites réelles rencontrant deux droites imaginaires conjuguées fixes, ou encore qui laisse invariant un faisceau réel de complexes linéaires dont les deux complexes dégénérescents sont imaginaires conjugués;

4° Le groupe projectif à 6 paramètres, invariant dans le précédent, qui laisse invariant chacun des complexes linéaires du faisceau précédent;

5°, 6°, 7° Le groupe projectif à 6 paramètres d'une quadrique, suivant que l'équation de cette quadrique est réductible à l'une des formes

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0, \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0,$$
$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0;$$

8° Le groupe à 4 paramètres qui laisse invariante une quadrique réglée ainsi que, sur cette quadrique, deux génératrices imaginaires conjuguées de la même famille;

9° Le groupe à 4 paramètres qui laisse invariante une quadrique sans points réels, ainsi que, sur cette quadrique, deux génératrices imaginaires conjuguées de la même famille;

10° Le groupe à 3 paramètres, sous-groupe invariant du précédent, qui laisse invariantes toutes les génératrices d'une famille de cette quadrique (groupe de translations de l'espace elliptique);

11° Le groupe à 3 paramètres d'une cubique gauche réelle.*

7. Groupe affine. Géométrie affine. — Considérons le groupe projectif de E_n qui laisse invariante une multiplicité plane E_{n-1}. Si l'on rejette cette multiplicité plane à l'infini, on obtient ce qu'on appelle le « *groupe affine* » [36] formé de toutes les transformations projectives qui conservent à distance finie les points à distance finie et maintiennent à l'infini les points à l'infini. Ces transformations sont d'habitude limitées au domaine réel. Analytiquement elles sont représentées par des substitutions linéaires entières non homogènes effectuées sur les coordonnées ponctuelles cartésiennes. La géométrie affine fait intervenir les relations entre les éléments qui peuvent se ramener à l'incidence (au sens élémentaire), au parallélisme et à l'ordre des points d'une droite; elle ne considère aucune autre propriété métrique. On obtient le groupe de la géométrie élémentaire en se limitant aux transformations affines qui conservent l'orthogonalité : les angles deviennent alors des invariants.

[33] *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 41, 1913, p. 53. La détermination a été faite auparavant, pour $n=5$, par Mac Apfelstedt (*Ueber eine Gattung von projektiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen*, Diss. Greifswald, 1906, éd. Leipzig, 1906); pour $n=6$, par A. Kummer (*Ueber eine Gattung von projektiven Transformationsgruppen in sechs Veränderlichen*, Diss. Bonn, 1908).

[34] S. Lie, *Math. Ann.*, t. 25, 1885, p. 130; *Theorie der Transformationsgruppen*, t. 1, p. 560-569.

[35] *E. Cartan, *Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. 26, 1909, p. 93; *Bull. Soc. Math.*, t. 41, 1913, p. 53.*

[35bis] *J. Math. pures et appl.*, t. 10, 1914, p. 149.

[36] Ce groupe est appelé par S. Lie groupe linéaire général (*Transformationsgruppen* (¹), t. 1, p. 556/7).

L'importance de la géométrie affine comme intermédiaire entre la géométrie élémentaire et la géométrie projective avait déjà été remarquée par A. F. Möbius ([37]). F. Klein l'a utilisée dans ses *Vorlesungen* sur la théorie des nombres ([38]). Le groupe fondamental de la géométrie élémentaire devient le groupe affine lorsqu'on lui adjoint les homologies dont le centre est rejeté à l'infini, puis le groupe projectif par l'adjonction des homologies dont le centre est quelconque. Des trois notions fondamentales de la géométrie élémentaire : *incidence*, *parallélisme*, *orthogonalité*, les deux premières seulement subsistent dans la géométrie affine, la première seulement dans la géométrie projective. La géométrie projective (réelle) ne connaît que deux classes de coniques non dégénérescentes : les coniques imaginaires (à équation réelle) et les coniques réelles; la géométrie affine décompose cette deuxième classe en ellipses, hyperpoles et paraboles et introduit les notions de centre, de diamètres, d'asymptotes; la géométrie élémentaire enfin introduit les notions nouvelles d'axes, de sommets et de foyers; les ellipses, que rien ne distinguait les unes des autres en géométrie affine, dépendent essentiellement en géométrie élémentaire d'un paramètre arbitraire (l'excentricité par exemple) : le cercle et l'hyperbole équilatère jouent maintenant un rôle tout à fait à part.

En géométrie projective le rapport anharmonique est l'invariant absolu caractéristique; en géométrie affine c'est le rapport des segments déterminés par trois points en ligne droite; en géométrie élémentaire c'est ce même rapport, auquel il faut joindre l'angle de deux droites, qui constituent un système caractéristique d'invariants absolus. Dans chacune des trois géométries ces invariants fournissent un système de coordonnées naturel : en géométrie projective les coordonnées projectives (qui sont des rapports anharmoniques); en géométrie affine les coordonnées cartésiennes les plus générales ([39]); en géométrie élémentaire les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

La géométrie affine admet aussi un invariant intégral important; dans le cas $n=2$, c'est l'aire limitée par une courbe fermée; dans le cas $n=3$, c'est le volume limité par une surface fermée. Cet invariant

([37]) *Der barycentrische Calcul*, Leipzig, 1827, p. 191 et suiv., et p. 366/8; *Werke*, t. 1, Leipzig, 1885, p. 177 et suiv. et p. 316/8.

([38]) *Zahlenth.* ([6]), t. 1, p. 51 et suiv. *Voir* aussi : L. Heffter, *Jahresb. deustch. Math. Ver.*, t. 12, 1903; p. 400; L. Heffter et C. Koehler, *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, t. 1, Leipzig et Berlin, 1904; en partic. nos 9, 10, 28, 83 et suiv., et nos 147 et suiv.

([39]) Les coordonnées barycentriques p, q, r de A. F. Möbius sont aussi des rapports de distances et, par suite, tout à fait appropriés à la géométrie affine.

est relatif. Il caractérise le groupe affine parmi tous les sous-groupes du groupe projectif. Cet invariant est absolu pour un sous-groupe invariant à $n(n+1)-1$ paramètres du groupe affine, c'est le groupe qu'on appelle *affine spécial* ou *équiaffine* ([40]).

Il existe d'autres sous-groupes importants du groupe affine, ce sont les groupes à n^2 et n^2-1 paramètres formés des transformations affines ou équiaffines qui laissent invariant un point à distance finie. Le premier de ces groupes est représenté analytiquement par l'ensemble des transformations linéaires et homogènes à n variables, le second par celles de ces transformations dont le déterminant est égal à 1. S. Lie donne à ces deux groupes les noms de groupe linéaire et homogène *général* et groupe linéaire et homogène *spécial* ([41]). Ces deux groupes sont en relation très simple avec le groupe projectif de E_{n-1}, puisqu'ils échangent projectivement et cela de la manière la plus générale possible, les ∞^{n-1} droites qui sont issues du point fixe laissé invariant par le groupe. Ils peuvent en un certain sens être regardés comme les projections du groupe projectif général de E_{n-1}, projections faites d'un point fixe extérieur à E_{n-1}.

Le groupe linéaire et homogène général de E_n est, d'après cela, isomorphe mériédrique au groupe projectif général de E_{n-1}. Le groupe linéaire et homogène spécial de E_n lui est au contraire isomorphe holoédrique, la relation d'isomorphisme étant d'ordre $(n, 1)$: à chaque transformation du groupe de E_n correspond une transformation et une seule du groupe de E_{n-1}, mais à chaque transformation du groupe de E_{n-1} correspondent n transformations du groupe de E_n.

8. Groupes projectifs qui laissent invariantes des courbes ou des surfaces. — Il existe une série de groupes projectifs continus et mixtes qui sont caractérisés par l'invariance d'une certaine figure (courbe, surface, etc.) et qui, par rapport à cette figure, peuvent être désignés sous le nom de groupes *automorphes*. Ces figures sont celles qui admettent *une infinité de transformations projectives* (formant nécessairement un groupe) ([42]).

a. F. Klein et S. Lie se sont proposés dès 1870 la recherche de ce qu'ils appelaient les courbes W, c'est-à-dire les courbes qui admettent une famille continue de transformations projectives. Ils ont déterminé

([40]) L. Heffter et C. Koehler, *Analyt. Geom.* ([38]), t. 1, p. 320.

([41]) *Transformationsgruppen* ([7]), t. 1, p. 557/8.

([42]) F. Klein [*Progr. Erlangen* ([6])] a posé le problème pour un groupe quelconque. *Voir* aussi : F. Klein et S. Lie, *Math. Ann.* t. 4, 1871, p. 79/84.

toutes les courbes W du plan et de l'espace ([43]). Ces courbes sont les *trajectoires des groupes projectifs à un paramètre.* Dans l'espace E_n les coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ d'un point d'une courbe W sont des fonctions d'un paramètre variable t qui satisfont à un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans seconds membres. Dans le cas général les équations en coordonnées non homogènes d'une courbe W peuvent donc se mettre sous la forme

$$x_1 = x_2^{\alpha_2} = x_3^{\alpha_3} = \ldots = x_n^{\alpha_n}.$$

Si une courbe W est algébrique, elle est en même temps unicursale (de genre zéro) ([44]).

Si une courbe irréductible de E_n qui n'est contenue dans aucune multiplicité plane E_{n-1}, admet un groupe projectif à deux paramètres, elle en admet un à trois paramètres et trois seulement : c'est alors une courbe unicursale du $n^{\text{ième}}$ ordre (courbe normale) ([45]).

Le groupe projectif à trois paramètres d'une courbe normale unicursale du $n^{\text{ième}}$ ordre de E_n est isomorphe holoédrique du groupe projectif général de la droite (n° 7); c'est le seul groupe projectif à trois paramètres de E_n qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane ([46]).

b. F. Klein et S. Lie ont déterminé en 1870 ([47]) toutes les surfaces de E_3 qui admettent un groupe à deux paramètres de transformations projectives échangeables entre elles (surfaces W); ce sont les surfaces *tétraèdrales*, déjà envisagées par J. A. Serret ([47 *bis*]) et dont l'équation en coordonnées homogènes peut se mettre sous la forme

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = \text{const.} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0).$$

*Il faut ajouter à ces surfaces celle dont l'équation, en coordonnées non homogènes, est

$$x_3 = x_1^2 + \log x_2.^*$$

Plus tard H. Poincaré a déterminé quelques courbes et surfaces du troisième ordre admettant une infinité de transformations projectives ([48]).

([43]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 70, 1870, p. 1222 et 1275; *Math. Ann.* t. 4, 1871, p. 50.
([44]) G. Loria. *Voir* aussi : A. Cayley, L. Cremona, E. Bertini.
([45]) S. Lie, *Transformationsgruppen* (¹), t, 3, p. 187.
([46]) S. Lie, *Transformationsgruppen* (¹), t. 3, p. 758, 785.
([47]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 70, 1870, p. 1222.
([47 *bis*]) J. A. Serret, *J. Liouville*, t. 12, 1847, p. 245.
([48]) *J. Éc. polyt.*, (1), cah. 50, 1881, p. 199. H. Poincaré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 97, 1883, p. 949) donna aussi une indication sur la détermination des multiplicités M_{n-1} de E_n qui admettent au moins deux transformations infinitésimales projectives non échangeables entre elles.

En 1882, S. Lie ([49]) a déterminé toutes les surfaces de E_3 qui admettent un groupe projectif continu à trois paramètres au moins. Abstraction faite des plans et des cônes ([50]), il a obtenu :

1° Les surfaces non dégénérescentes du second ordre qui admettent un groupe projectif à dix paramètres;

2° La surface développable dont l'arête de rebroussement est une cubique gauche; comme cette cubique, la surface admet un groupe projectif à trois paramètres.

Il reconnut plus tard ([51]) qu'il fallait ajouter aux surfaces précédentes la surface réglée du troisième ordre de A. Cayley, dont l'équation peut se mettre sous la forme

$$x_3 = x_1 x_2 + x_1^3.$$

Enfin en 1895, S. Lie poursuivit ses recherches ([52]) en recherchant toutes les surfaces de E_3 qui admettent un groupe projectif à deux paramètres. *Abstraction faite de certaines surfaces particulières, qui peuvent être obtenues par des passages à la limite, les surfaces en question peuvent être représentées, en coordonnées non homogènes, par des équations de l'une des formes suivantes :

$$x_3 = x_1 x_2 + x_1^m,$$
$$x_3 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m,$$
$$x_3 = x_1^2 + x_2^m,$$
$$\left(x_3 + \frac{3}{2} x_1 x_2 + x_1^3\right)^2 - k(x_2 + x_1^2)^3 = 0, \qquad k(k-1) \neq 0.^*$$

*Si l'on fait abstraction des surfaces du second ordre et de la développable lieu des tangentes à une cubique gauche, les transformations projectives qui laissent invariantes les surfaces qui viennent d'être indiquées sont, avec les coordonnées choisies, des transformations

([49]) *Archiv for Math. og Naturvidenskab* (Christiania), t. 7, 1882, p. 179.
([50]) Un cône de E_3 admet les ∞^4 transformations homologiques qui ont pour pôle le sommet du cône. Mais il peut encore s'ajouter à ces homologies d'autres transformations projectives; le nombre total est ∞^5 ou ∞^7 si les sections planes du cône sont des courbes W ou des coniques. Dans ce dernier cas le groupe est, dans le domaine complexe, corrélatif du groupe des ∞^7 transformations par similitude qui laissent invariant le cercle imaginaire de l'infini.
([51]) *Forhandlinger Videnskab-Selskabet Christiania*, 1884 (éd. 1885) mém. n° 9; cf. *Transformationsgruppen* (¹), t. 3, p. 190/6.
([52]) *Ber. Ges. Lpz.* (*math.*) t. 47, 1895, p. 209.

affines. Une surface du second ordre à centre admet un groupe affine à trois paramètres, un paraboloïde un groupe affine à quatre paramètres. Quant à la développable, lieu des tangentes à une cubique gauche, elle admet un groupe affine à deux paramètres dans le cas où l'un des plans tangents à la surface est rejeté à l'infini.*

Les recherches de S. Lie étaient essentiellement analytiques et étaient basées sur la considération des transformations infinitésimales. Deux géomètres italiens, F. Enriques ([53]) pour l'espace E_3 et G. Fano ([54]) pour l'espace E_n, se sont proposé d'étudier, par les méthodes de la géométrie projective, les surfaces (variétés à deux dimensions) qui admettent une infinité de transformations projectives. G. Fano est arrivé aux résultats suivants :

1° Toute surface algébrique admettant une infinité de transformations projectives admet une représentation point par point biunivoque sur une surface réglée ;

2° Si une surface algébrique admet un groupe projectif *transitif* (c'est-à-dire tel qu'il existe dans ce groupe une transformation remplaçant un point arbitraire par un autre point arbitraire), elle est *rationnelle*, c'est-à-dire admet une représentation point par point biunivoque sur un plan ([55]).

c. En ce qui concerne les multiplicités algébriques à un nombre quelconque de dimensions, qui admettent un groupe projectif continu et non intégrable ([56]), G. Fano a démontré ([57]) qu'elles se rattachaient d'une manière remarquable à la théorie des invariants des formes binaires. On obtient en effet les équations d'une de ces multiplicités en annulant des invariants ou des covariants d'une forme binaire ou d'un

([53]) *Atti Ist. Veneto*, (7), t. 4, 1892/3, p. 1590 ; (7), t. 5, 1893/4, p. 638.

([54]) *Atti R. Accad. Lincei, Rend. Mat.*, (5) t. 4, I, 1895, p. 149/56 ; *Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 10, 1896, p. 16.

([55]) Par cette représentation sur le plan, le groupe projectif de la surface considérée devient un groupe de transformations de Cremona du plan. Les théorèmes dont il sera question plus loin [n° 29] sur les groupes finis et continus de transformations de Cremona permettent de montrer que la surface en question peut être représentée soit sur un plan, soit sur une quadrique non dégénérescente, soit sur un cône normal rationnel du $n^{\text{ième}}$ ordre E_{m+1}, de manière que par cette représentation le groupe projectif de la surface donnée devienne encore un groupe projectif de la nouvelle surface. On peut en déduire facilement toutes les structures possibles de ces groupes automorphes (*cf.* G. Fano, *Atti R. Accad. Lincei, Rend. Mat.*, (5), t. 4, I, 1895, p. 325 ; *Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 10, 1896, p. 1.

([56]) S. Lie, *Transformationsgruppen* ([1]), t. 1, p. 265 ; t. 3, p. 679.

([57]) *Memorie Accad. Torino*, (2), t. 46, 1896, p. 187.

système de formes binaires, les coefficients de ces formes étant regardés comme des coordonnées ponctuelles. G. Fano a déterminé ainsi tous les cas possibles pour $n \leq 4$.

Pour $n = 4$, G. Fano a aussi déterminé les variétés algébriques à trois dimensions qui admettent un groupe projectif continu, intégrable transitif, à quatre paramètres au moins ([58]).

Les variétés algébriques M_3 de $E_n (n > 3)$ qui admettent un groupe projectif continu transitif, sont rationnelles ([59]).

9. **Groupes projectifs qui laissent invariante une M^2_{n-1}. Les géométries non euclidiennes.** — Le plus important des groupes projectifs automorphes de E_n est le groupe, souvent considéré par S. Lie ([60]), qui laisse invariante une variété non dégénérescente du second ordre $[M^2_{n-1}]$. Ce groupe dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres.

Si n est impair, le groupe est mixte ; il se compose de deux familles continues de transformations : la première famille est formée des transformations qui laissent invariante chacune des deux familles de multiplicités planes $E_{\frac{n-1}{2}}$ qui engendrent M^2_{n-1} ; la seconde famille est formée des transformations qui les échangent entre elles. La première famille de transformations forme un groupe, qui est simple pour $n > 3$.

Si n est pair, le groupe est continu et simple.

La théorie analytique des invariants de ce groupe est la théorie bien connue des *formes quadratiques* à un nombre quelconque de variables et à déterminant non nul (en convenant du moins de regarder comme équivalentes deux formes qui ne diffèrent que par un facteur constant).

Si l'on admet des éléments et des transformations imaginaires, toutes les M^2_{n-1} non dégénérescentes de E_n (et par suite les groupes correspondants) sont *homologues* entre elles, c'est-à-dire qu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation projective.

Si au contraire on se limite aux équations réelles et aux transformations réelles, il faut tenir compte de la *loi d'inertie* des formes quadratiques ; il faut alors, suivant la parité de n, distinguer $\frac{n+3}{2}$ ou $\frac{n+2}{2}$ espèces différentes de M^2_{n-1} et de groupes correspondants, la classification étant fondée sur le nombre des coefficients positifs et négatifs de

([58]) *Atti Ist. Veneto*, (7), t. 7, 1895/6, p. 1069.

([59]) G. Fano, *Atti R. Accad. Lincei, Rend.*, (5), t. 8, I, 1899, p. 562.

([60]) *Transformationsgruppen* ([1]), t. 3, p. 178 et 809. Sur les groupes réels, *voir* p. 385/92.

l'équation de M^2_{n-1} réduite à la forme canonique

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i x_i^2 = 0.$$

On doit à A. Cayley ([61]) une théorie qui a été développée ensuite systématiquement par F. Klein ([62]) et qui permet d'interpréter la géométrie projective d'une M^2_{n-1} dans E_n comme une géométrie *métrique* générale de E_n. On appelle *distance* (cayleyenne) de deux points le logarithme multiplié par un facteur constant du rapport anharmonique de ces deux points et des deux points d'intersection de la droite qui les joint avec la variété M^2_{n-1}; cette variété est ainsi le lieu des points qui sont à une distance infinie; on lui donne le nom de « surface fondamentale » ou de « surface absolue ». On définit de même l'*angle* (cayleyen) de deux droites au moyen du rapport anharmonique de ces deux droites et des deux tangentes à la surface fondamentale menées par leur point d'intersection dans la multiplicité plane E_2 qu'elles déterminent. Les distances et les angles ainsi définis sont invariants vis-à-vis de toutes les transformations projectives de E_n qui laissent invariante M^2_{n-1}.

Dans le cas d'un espace réel E_n, deux de ces géométries métriques sont particulièrement importantes. La première correspond à une quadrique fondamentale représentée par une équation de la forme

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0;$$

c'est la *géométrie non euclidienne elliptique*, dans laquelle la droite a une longueur finie. La seconde correspond à une quadrique fondamentale représentée par une équation de la forme

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0;$$

*si l'on ne considère comme éléments que les points situés à l'*intérieur* de cette quadrique,* on obtient la *géométrie non euclidienne hyperbolique* : elle ne diffère de la géométrie euclidienne qu'en ce que le postulatum d'Euclide n'est pas vrai. La géométrie euclidienne elle-même ou parabolique peut être regardée comme un cas limite des

([61]) *Phil. Trans London*, t. 149, 1859, p. 61; Papers 2, Cambridge, 1889, p. 561; *voir* surtout p. 583 et suiv.

([62]) *Nachr. Ges. Gött.*, 1871 (n° 17); *Math. Ann.*, t. 4, 1871, p. 573; t. 6, 1873, p. 112. **Cf.*, dans le même ordre d'idées, F. Klein, *Jahresb. deustch. Math. Ver.*, t. 19, 1910, p. 281.*

précédentes, en supposant que la quadrique fondamentale se réduise à la variété M^2_{n-2}

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 0, \qquad x_n = 0.$$

Dans les géométries métriques précédentes, l'espace E_n apparaît comme une multiplicité à courbure constante, au sens de B. Riemann ([63]).

*On a enfin dans E_3 une géométrie *quasi-elliptique*, autre dégénérescence de la géométrie elliptique en supposant que la quadrique fondamentale se réduise à deux points imaginaires conjugués et deux plans imaginaires conjugués passant par la droite qui joint les deux points ([64]).*

10. La géométrie réglée projective de E_3. — Il existe toute une série de géométries réglées associées aux géométries précédentes. Il peut arriver, en effet, que par un choix convenable des éléments générateurs de l'espace et de leurs coordonnées, le groupe fondamental soit fourni par les transformations linéaires qui laissent invariante une équation homogène du second degré à discriminant différent de zéro. Nous verrons dans les numéros suivants des géométries jouissant de cette propriété et définies dans chaque espace E_n.

Il est un cas particulier tout à fait intéressant et qui n'existe que pour une valeur particulière de n : c'est le cas de la *géométrie réglée projective de l'espace* E_3. Si l'on regarde la droite comme élément générateur de l'espace et si l'on prend pour coordonnées (plückériennes) ([65])

([63]) *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, Habilitationsschrift Göttingue, 1854; *Abh. Ges. Gött.* (math.), t. 13, 1866/7, éd. 1868, mém. n° 4; *Werke*, publ. par H. Weber (1re éd.), Leipzig, 1876, p. 254; (2e éd.), Leipzig, 1892, p. 272; trad. L. Laugel, Paris, 1898, p. 280.

([64]) *W. Blaschke, *Z. Math. Phys.*, t. 60, 1912, p. 61.*

([65]) Les coordonnées de la ligne droite dans l'espace se présentent déjà, bien que sous une forme tout à fait différente, dans H. Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1884; (2e éd.), Leipzig, 1878; *Werke*, t. 1, publ. par F. Engel, Leipzig, 1894.

J. Plücker [*System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordung und Classen enthaltend*, Düsseldorf, 1846, n° 258; (2e éd.), Düsseldorf, 1852] a déterminé la droite par quatre coordonnées indépendantes; mais on ne peut pas de cette manière représenter sans exception toutes les droites du continu projectif. Les six déterminants à deux lignes et deux colonnes liés par la relation du second degré se trouvent dans A. Cayley (*Quart. j. pure appl. math.*, t. 3, 1860, p. 225; t. 5, 1862, p. 91; Papers 4, Cambridge, 1891, p. 446 et 490). C'est à partir de 1865 que J. Plücker a fait un usage systématique de coordonnées pour l'étude des systèmes de droites dans l'espace, en particulier des complexes du premier et second degré [*Wiss. Abh.*, t. 1, publ. par A. Schoenflies, Leipzig, 1895, p. 462 et suiv.; *Phil. Trans, London*, t. 155, 1865, p. 774; *J. Math. pures et appl.*, (2), t. 11, 1860, p. 402; *Neue Geometrie des Raumes* d'une droite les six déterminants $p_{ik} = -p_{ki}$ formés avec les coordonnées homogènes de deux points de cette droite, on a entre ces six coodonnées la relation

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Or F. Klein a montré que toute transformation homographique ou dualistique de E_3 effectue sur les p_{ik} une substitution linéaire, qui laisse naturellement invariante l'équation $P = 0$, et que réciproquement toute substitution linéaire effectuée sur les p_{ik} et laissant invariante l'équation $P = 0$ provient soit d'une transformation homographique soit d'une transformation dualistique de E_3 [66]. La *géométrie réglée projective peut donc être regardée comme la géométrie projective de la quadrique* M_4^2 *représentée par l'équation* $P = 0$ *dans l'espace* E_5.

La relation polaire

$$\sum_{i<k} p'_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

signifie que les deux droites (p) et (p') se coupent, ce qui est bien une relation projective.

Il importe cependant de remarquer que dans l'interprétation de la géométrie réglée projective de E_3 comme géométrie de E_5, les seuls éléments de E_5 qui entrent en considération sont les points de la quadrique M_4^2, tandis que la géométrie projective de M_4^2 considère aussi les points de E_5 qui n'appartiennent pas à M_4^2. Or un système (α_{ik}) de valeurs de p_{ik} qui ne satisfait pas à l'équation $P = 0$ est facile à interpréter ; il peut être regardé comme constituant les *coordonnées* [67] du complexe

gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, t. 1, Leipzig 1868].

Sur la signification des coordonnées de la droite en tant que moments de cette droite par rapport aux six arêtes d'un tétraèdre de référence, *voir* H. G. Zeuthen, *Math. Ann.*, t. 1, 1869, p. 432; F. Klein, *Math. Ann.*, t. 2, 1870, p. 366.

(66) *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des 2. Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form* [*Diss. Bonn*, 1868; reproduit *Math. Ann.*, t. 23, 1884, p. 539/78, en partic. II, p. 546/52; *voir* aussi : F. Klein, *Math. Ann.*, t. 4, 1871, p. 356; t. 5, 1872, p. 257, § 1; *Progr. Erlangen* (6), § 5]. La théorie projective des complexes de droites du premier et du second degré est traitée au point de vue exclusif de la géométrie réglée projective par F. Klein (*Diss. Bonn*, 1868; *Math. Ann.*, t. 2, 1870, p. 198; extrait dans *Nachr. Ges. Gött.*, 1869, p. 258).

(67) Ces coordonnées homogènes, c'est-à-dire définies à un facteur de proportionnalité près; ces six coordonnées, regardées comme non homogènes définiraient un « dyname », *Voir* J. Plücker, *Neue Geom. des Raumes* (65), t. 1, p. 24/5.

linéaire défini par l'équation

$$\sum_{i<k} \alpha_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4);$$

si l'on a

$$\alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23} = 0$$

ce complexe linéaire est formé des droites qui coupent la droite fixe (α), il peut par suite être identifié à cette droite (α).

En définitive les points de E_5 sont en quelque sorte les *images* des complexes linéaires de E_3; les points de E_5 qui sont sur la quadrique M_4^2 sont les images des complexes linéaires dégénérescents, c'est-à-dire des droites, de E_3 [68]. La géométrie projective de M_4^2 dans E_5 est l'image de la géométrie projective des complexes linéaires dans E^3 La relation polaire

$$\sum_{i<k} p'_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

est l'expression analytique de la relation *d'involution* de deux complexes [69].

Si l'on considère la géométrie projective *réelle* des complexes linéaires de E_3, la quadrique M_4^2 a une équation réductible à la forme

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2 - z_6^2 = 0;$$

la géométrie projective de M_4^2 qui est l'image de la géométrie réglée projective de E_3 n'est donc pas une des géométries non euclidiennes de E_5.

La théorie des torseurs de R. S. Ball et la « Géométrie des Dynames » de E. Study utilisent aussi le complexe linéaire et la ligne droite comme éléments générateurs de l'espace, mais elles correspondent à d'autres groupes fondamentaux.

11. Groupe des rayons vecteurs réciproques. Géométrie conforme. — Le groupe des rayons vecteurs réciproques est formé des transformations qui résultent de la composition des transformations par similitude

(68) F. Klein, *Math. Ann.* t. 2, 1870, p. 201.

(69) On trouvera des exposés de cette théorie dans : Th. Reye, *J. Reine Angew. Math.*, t. 95, 1883, p. 330; R. de Paolis, *Atti R. Accad. Lincei*, *Memorie math.*, (4), t. 1, 1885, p. 205/31. C. Segre (*Atti Accad. Torino*, t. 19, 1883/4, p. 159) a étudié cette géométrie en la traitant comme une métrique générale des complexes linéaires. *Cf.* G. Koenigs, *Ann. Éc. Norm. sup.*, (2), t. 11, 1882, p. 219.*

(groupe fondamental de la géométrie élémentaire) et des inversions ([70]). Chacune de ses transformations peut être regardée comme le produit d'un nombre fini d'inversions.

D'après un théorème de J. Liouville ([71]), ce groupe se confond, dans l'espace E_3, avec le groupe de *toutes les transformations conformes* (réelles), c'est-à-dire de toutes les transformations ponctuelles qui conservent les angles. Ce théorème est vrai pour tous les espaces euclidiens E_n, pourvu que n soit supérieur ou égal à 3 ([72]). Dans le plan, au contraire, le groupe de toutes les transformations conformes est infini, tandis que le groupe des rayons vecteurs réciproques est à six paramètres ([73]) : ou plutôt c'est un groupe mixte formé de deux familles de transformations continues à six paramètres ; les inversions appartiennent à celle des deux familles qui ne forme pas un groupe.

La géométrie qui admet pour groupe fondamental le groupe des rayons vecteurs réciproques s'appelle la *géométrie conforme* ; on la considère d'habitude dans le domaine réel ; mais elle conserve une signification dans le domaine complexe ([74]).

La géométrie conforme de E_n se rattache à la géométrie projective

([70]) Les inversions ont reçu une application remarquable en physique mathématique par la théorie des images électriques de W. Thomson [*J. Math. pures et appl.*, (1), t. 10, 1845, p. 364 ; *Reprint of papers on electrostatics and magnetism*, Londres 1872 ; (2ᵉ éd.) Londres, 1884, p. 144 et suiv.].

([71]) Extension au cas de trois dimensions de la question du tracé géographique, dans G. MONGE, *Applications de l'analyse à la géométrie*, (5ᵉ éd.), revue par J. LIOUVILLE, Paris, 1850, (complément), p. 609.

([72]) S. LIE, *Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 186 ; *Transformationsgruppen*, (7), t. 3, p. 347. On trouvera d'autres démonstrations analytiques dans R. BEEZ, *Z. Math. Physik*, t. 20, 1875, p. 253 ; G. DARBOUX, *Ann. Éc. Norm. sup.*, (2), t. 7, 1878, p. 282. A. Capelli [*Ann. mat. pura appl.*, (2), t. 14, 1886/7, p. 227] a donné pour $n = 3$ une démonstration en partie synthétique.

([73]) Les transformations de ce groupe, ou « transformations circulaires », ont été d'abord signalées par L. I. Magnus (*J. Reine Angew. Math.*, t. 8, 1832, p. 51, en partic. p. 60 ; *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie*, t. 1, Berlin, 1833 ; t. 2, Berlin, 1837, en part., t. 1, p. 336, 290) comme des particuliers de transformations quadratiques. A. F. Möbius (*Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 5, 1853, p. 14 ; *J. Reine Angew. Math.*, t. 52, 1856, p. 218 ; *Werke*, t. 2, Leipzig, 1886, p. 206 ; *Abh. Ges. Lpz.* (math.), t. 2, 1885, p. 529 ; *Werke*, t. 2, Leipzig, 1886, p. 243) en a fait une étude particulière et il les a désignées sous le nom de « Kreisverwandtschaften ». Dans ce dernier Mémoire (p. 282/9, § 27 à 31), il étend la théorie des transformations circulaires aux figures sphériques, les transformations circulaires du plan étant regardées comme les projections stéréographiques des transformations circulaires de la sphère. Dans les paragraphes 32 et suiv., il étend ces transformations à l'espace, chaque sphère étant transformée en une autre sphère.

([74]) *M. Pieri [*Giorn. mat.*, (3), t. 2, 1911, p. 49] a indiqué un système de postulats sur lequel on peut fonder la géométrie conforme.*

d'une quadrique dans l'espace E_{n+1}. Bornons-nous au cas de l'espace E_3 : le raisonnement s'étend sans difficulté au cas général. On peut prendre pour coordonnées homogènes (surabondantes) d'un point les cinq quantités

$$x_1 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad x_2 = x, \qquad x_3 = y, \qquad x_4 = z, \qquad x_5 = 1,$$

où x, y, z sont les coordonnées cartésiennes rectangulaires ; ces cinq quantités sont liées par la relation

$$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1 x_5 = 0.$$

Plus généralement on pourra prendre cinq combinaisons linéaires de ces cinq quantités : elles seront liées par une relation homogène et du second degré

$$\Omega(x) = 0$$

à discriminant différent de zéro. Ce sont les coordonnées dites *pentasphériques* ([75]).

Le groupe fondamental de la géométrie conforme est formé des substitutions linéaires effectuées sur les x_i et laissant invariante l'équation $\Omega = 0$.

La géométrie conforme de E_3 a pour image dans E_4 la géométrie projective de la quadrique M_3^2 définie par l'équation $\Omega = 0$. Les points de M_3^2 sont les images des points de E_3. Aux points de E_4 non situés sur la quadrique M_3^2 on peut aussi faire correspondre des figures de E_3. L'un de ces points (a_i) est lié d'une manière invariante à l'ensemble des points de M_3^2 qui sont dans son plan polaire, c'est-à-dire à l'ensemble des points de E_3 dont les coordonnées pentasphériques x_i satisfont à la relation

$$\sum_{i=1}^{i=5} a_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0.$$

Or le lieu de ces points est une sphère qu'on peut faire ainsi correspondre au point (a_i) de E_4. Les cinq quantités a_i sont dites les coor-

([75]) Les coordonnées pentasphériques d'un point représentent à des facteurs constants près les puissances du point par rapport à cinq sphères fixes linéairement indépendantes. Ces coordonnées ont été introduites par G. Darboux (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires*, Paris, 1873 ; en partic. Note X, p. 256). Elles sont déjà signalées par G. Darboux, (*C. R. Acad. Sc.*, t. 73, 1871, p. 734) qui se réfère à un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1868. Elles sont également indiquées par S. Lie (*Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 252) et F. Klein (*Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 264). *Voir* aussi : F. Klein, *Höhere Geom.*, ([6]), t. 1, p. 98, 198, 373.

données de la sphère. Si le point (a_i) de E_4 appartient à M_3^2, la sphère est de rayon nul et les a_i sont les coordonnées pentasphériques de son centre.

La relation polaire

$$\sum_{i=1}^{i=5} a'_i \frac{\partial \Omega}{\partial a_i} = 0$$

exprime que les deux sphères (a) et (a') sont orthogonales.

Les sphères forment ainsi, en géométrie conforme, un *corps*. Les plans ne forment pas un corps : ils doivent être regardés comme des sphères particulières dont les images dans E_4 forment une multiplicité plane E_3 non invariante. *Les points d'intersection de M_3^2 et de E_3 sont les images des plans isotropes et du plan (ou de la sphère) de l'infini qui doivent ainsi être regardés comme des cas particuliers des sphères de rayon nul. Le plan de l'infini est orthogonal à tous les autres plans ([76]).*

Ce qui précède s'étend à un espace E_n quelconque. La géométrie conforme de E_n est identique à la géométrie projective d'une quadrique générale de E_{n+1}. Si l'on se borne aux éléments réels, le premier membre de l'équation de la quadrique est réductible à la forme $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 - z_{n+1}^2$, de sorte que la géométrie conforme de l'espace réel E_n est équivalente à la géométrie hyperbolique de l'espace réel E_{n+1}.

Dans le cas du plan, cette identité des deux géométries est mise en évidence par une construction géométrique simple. On prend dans E_3 une sphère M_2^2 et l'on en fait la projection stéréographique sur un plan. On peut ainsi faire correspondre à tout point (a) de E_3 le cercle projection stéréographique de la section de la sphère M_2^2 par le plan polaire de (a). La géométrie projective de la sphère devient ainsi la géométrie des rayons vecteurs réciproques du plan. Cette construction, valable dans le domaine réel, s'étend à un espace E_n quelconque ([77]).

La géométrie conforme, en tant qu'elle utilise la sphère comme élément générateur de l'espace, a été appelée par F. Klein, *Géométrie*

([76]) *Les points de l'espace complexe E_3 ne forment, en géométrie conforme, un continu fermé que si on leur adjoint les plans isotropes et le plan de l'infini. *Voir* H. Beck, *Arch. Math. Phys.*, (3), t. 18, 1911, p. 43. Les plans isotropes sont signalés par G. Darboux [*Sur une classe remarquable*, etc. ([73]), p. 261] comme étant à la fois des sphères de rayon nul et de rayon infini.*

([77]) F. Klein, *Progr. Erlangen*, § 6; *Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 257 en partic. § 2; *Höhere Geometrie*, t. 1, p. 373 et suiv.

sphérique élémentaire ([78]). Th. Reye en a donné un exposé élémentaire ([79]); on doit à G. Loria ([80]) des recherches plus étendues avec application à la classification des cyclides.

12. Sous-groupes continus du groupe des rayons vecteurs réciproques. Les géométries non euclidiennes sphérique et pseudo-sphérique. — *Un sous-groupe important du groupe conforme de E_3 est le groupe fondamental de la géométrie élémentaire : il s'obtient en prenant les transformations conformes qui laissent invariant le plan à l'infini, ou qui changent les plans en plans.* Il a pour image dans l'espace E_4 le groupe projectif qui laisse invariants la quadrique M_3^2 et un hyperplan tangent à cette quadrique, par conséquent aussi son point de contact. Les points de la géométrie élémentaire ont pour images les points de la quadrique M_3^2, les plans de la géométrie élémentaire ont pour images les sections hyperplanes de M_3^2 contenant le point fixe susdit, par conséquent aussi les points de l'hyperplan tangent à la quadrique, qui sont les pôles de ces hyperplans.

On a un autre sous-groupe remarquable en considérant les transformations conformes réelles qui laissent invariante une sphère Σ de rayon non nul, réel ou purement imaginaire. Dans le premier cas on a le groupe de la *Géométrie non euclidienne pseudo-sphérique*; dans le second cas le groupe de la *Géométrie non euclidienne sphérique*. Si l'on considère dans l'espace E_4 le point qui est l'image de la sphère invariante Σ et l'hyperplan polaire P de ce point par rapport à la quadrique M_3^2, l'hyperplan P coupe cette quadrique suivant une section réelle dans le cas de la géométrie pseudo-sphérique, suivant une section imaginaire dans le cas de la géométrie sphérique. Le groupe de l'une ou l'autre des géométries non euclidiennes a pour image le groupe des transformations projectives de E_4 qui laissent invariants la quadrique M_3^2 et l'hyperplan P ; les points de l'espace non euclidien, pseudo-sphérique ou sphérique, ont pour images les points de la quadrique M_3^2.

([78]) F. Klein, *Höhere Geometrie*, t. 1, p. 228, 267 et suiv.; t. 2, p. 38.

([79]) *Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme*, Leipzig, 1879. *Voir* aussi : L. Cremona et E. Beltrami, *Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini*, Milan, 1881, p. 241; *J. Reine Angew. Math.*, t. 95, 1883, p. 330 et 347; t. 99, 1886, p. 205.

([80]) G. Loria, *Memorie Accad. Torino*, (2), t. 36, 1884.

E. von Weber [*Arch. Math. Phys.*, (3), t. 7, 1904, p. 286] a étudié les propriétés invariantes vis-à-vis du groupe conforme, de la figure formée par deux cercles de E_3.

*Signalons aussi un Mémoire de E. Cosserat et F. Cosserat [*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, (1), t. 3, 1889, p. 1/81] sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace.*

Si l'on considère ce groupe projectif de E_4 comme opérant *sur les points de l'hyperplan* P on obtient le groupe de la géométrie non euclidienne, *hyperbolique ou elliptique*; il est, à ce point de vue, isomorphe *mériédrique* ([81]) du groupe de la géométrie non euclidienne, *pseudo-sphérique ou sphérique*. A tout point de l'espace elliptique ou hyperbolique correspondent deux points de l'espace sphérique ou pseudo-sphérique, et il existe une transformation du groupe non euclidien sphérique ou pseudo-sphérique qui échange entre eux ces deux points ([82]).

Ce qui précède s'étend à un espace E_n quelconque.

La détermination des autres sous-groupes du groupe conforme de E_n se ramène à celle des sous-groupes du groupe projectif d'une quadrique M_n^2 de E_{n+1}. Ces sous-groupes sont des groupes de transformations quadratiques.

En ce qui concerne le plan, les transformations réelles par rayons vecteurs réciproques peuvent se représenter analytiquement à l'aide d'une variable complexe $x+iy$ ([73]), en exprimant que $x'+iy'$ est fonction homographique (à coefficients complexes) de $x+iy$, ou bien de $x-iy$. On obtient ainsi la représentation analytique du groupe des transformations projectives et antiprojectives ([18]) de la droite complexe. H. B. Newson a déterminé d'une manière synthétique tous les sous-groupes réels du groupe des rayons vecteurs réciproques du plan ([83]). *Les seules courbes réelles qui admettent une infinité de transformations par rayons vecteurs réciproques sont, en dehors du cercle, la spirale logarithmique (et les courbes qui s'y ramènent par inversion).*

U. Amaldi a déterminé les groupes continus conformes réels de E_3 ([84]) en les regardant comme des groupes projectifs d'une quadrique de E_4. Il indique leurs transformations infinitésimales. Tout sous-groupe continu du groupe conforme est homologue à un groupe de déplacements euclidiens ou de transformations par similitude, ou bien est semblable à un groupe de déplacements non euclidiens, ou bien enfin est formé des ∞^4 transformations qui laissent invariant un cercle réel.

([81]) *Voir* H. Beck, *Arch. Math. Phys.*, (3), t. 18, 1911, p. 43 et 220. *Voir* aussi : J. Wellstein, *Arch. Math. Phys.*, (3), t. 17, 1910, p. 195.*

([82]) *La géométrie non euclidienne sphérique à deux dimensions n'est pas autre chose que la géométrie euclidienne des figures tracées sur une sphère. La géométrie non euclidienne elliptique à deux dimensions n'est autre que la géométrie euclidienne des figures formées de droites indéfinies issues du centre de cette sphère. A une droite indéfinie issue du centre (image d'un point du plan elliptique) correspondent sur la sphère deux points diamétralement opposés.*

([83]) *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 4, 1897, p. 107 ; t. 7, 1900, p. 259.

([84]) *Memorie Accad. Torino*, (2), t. 55, 1904/5. *Voir* aussi : H. B. Newson, *Giorn. mat.*, (2), t. 14, 1907, p. 95.* Avant U. Amaldi, H. Stender (*Invariante Flächen und Kurven bei konformen Gruppen des Raumes*, Leipzig, 1899) s'était occupé de la même question mais sans obtenir exactement les mêmes résultats.

U. Amaldi s'est aussi occupé des surfaces qui admettent une infinité de transformations conformes ([85]). Si l'on fait abstraction des sphères (et des plans), ces transformations ne peuvent pas dépendre de plus de deux paramètres. Les surfaces réelles qui admettent un groupe à deux paramètres de transformations échangeables entre elles se ramènent, par une transformation conforme, à un tore et, dans des cas particuliers, à un cône de révolution ou à un cylindre de révolution. *Si elles admettent un groupe à deux paramètres de transformations conformes non échangeables entre elles, elles se ramènent à un cylindre ayant une spirale logarithmique pour section droite. Ces deux familles de surfaces dépendent chacune essentiellement d'un paramètre, au point de vue de la géométrie conforme.*

13. La géométrie des sphères orientées de Lie ([86]). — La géométrie sphérique « *supérieure* » ou « *de Lie* » est une généralisation de la géométrie sphérique élémentaire.

On a défini dans le numéro précédent une sphère au moyen de cinq coordonnées homogènes x_i, les coordonnées d'une sphère de rayon nul satisfaisant à la condition $\Omega(x)=0$. Le rayon d'une quelconque de ces sphères est de la forme

$$r=\pm\frac{\sqrt{\Omega(x)}}{\Sigma c_i x_i},$$

où l'équation $\Sigma c_i x_i = 0$ exprime la condition pour que la sphère se réduise à un plan. Introduisons une nouvelle coordonnée surabondante

$$x_6=\pm\sqrt{\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)};$$

si la sphère n'est pas de rayon nul, cela est possible de deux manières. Nous conviendrons de dire que l'ensemble des six quantités $x_1, \ldots, x_6$ liées par la relation

$$\Phi\equiv x_6^2-\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=0$$

définit une *sphère orientée* de rayon

$$r=\frac{x_6}{\Sigma c_i x_i};$$

([85]) *Atti R. Accad. Lincei* Rend., (5), t. 10, II, 1901, p. 168.

([86]) *Forhandlinger Videnskabs-Selskabet Christiania*, 1871, (éd. 1872) ou bien 1870 (éd. 1871), p. 67, 182; *Nachr. Ges. Gött.*, 1871, p. 191, 535; *Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 145.

une sphère orientée est donc une sphère dont le rayon est défini sans ambiguïté de signe.

Le groupe de la géométrie des sphères orientées ou géométrie de Lie est formé des transformations linéaires qui, effectuées sur les six variables x_i, laissent invariante l'équation $\Phi = 0$.

Les éléments de la géométrie conforme et de la géométrie des sphères orientées sont donc dans les deux cas les sphères; mais une sphère de la géométrie conforme se dédouble (du moins si son rayon n'est pas nul) en deux sphères orientées de la géométrie de Lie.

La relation polaire invariante

$$\sum x'_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$$

exprime que les deux sphères orientées (x) et (x') sont *tangentes :* cela signifie, dans le cas des sphères proprement dites, que le carré de la distance des centres est égal au carré de la différence des rayons : deux sphères orientées réelles de rayons positifs ne sont donc tangentes que si leur contact est intérieur. *La relation de contact est vérifiée par une sphère orientée et un plan isotrope passant par son centre, par deux plans orientés parallèles ou ayant en commun une droite isotrope, par le plan de l'infini et un autre plan quelconque.*

Le groupe de la géométrie de Lie peut encore être défini comme l'ensemble des transformations effectuées sur les sphères orientées et qui changent deux sphères orientées tangentes en deux sphères orientées tangentes. Il est à 15 paramètres.

Ce groupe peut aussi être regardé comme le groupe projectif de E_5 qui laisse invariante la quadrique $\Phi = 0$. Les sphères orientées de E_3 ont pour images les points de la quadrique. *Un point (a) de E_5 qui n'appartient pas à la quadrique est lié d'une manière invariante aux points de la quadrique situés sur son plan polaire. Il peut donc être regardé comme l'image du *complexe linéaire* de sphères orientées défini par l'équation

$$\Sigma a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0.$$

Les six quantités a_i peuvent être regardées comme les coordonnées de ce complexe. Si le point (a_i) est sur la quadrique $\Phi = 0$, le complexe (dégénérescent) est formé des sphères orientées tangentes à la sphère orientée de coordonnées (a_i). Un complexe linéaire non dégénérescent est formé en général des sphères orientées qui coupent une sphère fixe sous un angle constant.*

Dans la géométrie de Lie les points, ou plutôt les sphères de rayon nul ne forment pas un corps, comme dans la géométrie conforme; une sphère de rayon nul peut en effet être transformée en une sphère orientée de rayon différent de zéro. Ce n'est que l'ensemble des sphères orientées qui forme un corps.

*On peut aussi prendre pour éléments générateurs de l'espace les *faisceaux de sphères orientées tangentes;* un tel faisceau est l'ensemble des sphères orientées $(x_i + \lambda x'_i)$ où (x) et (x') sont deux sphères tangentes. Il y a *en général* une correspondance biunivoque entre un faisceau de sphères orientées tangentes et un *élément de surface orienté* (ensemble d'un point et d'un plan orienté passant par ce point). La condition pour que deux éléments de surface orientés infiniment voisins, définis l'un par les deux sphères orientées tangentes $[x, x']$, l'autre par les deux sphères orientées tangentes $[x + dx, x' + dx']$, soient *unis*, est que la sphère orientée (x) soit tangente à la sphère orientée $(x' + dx')$ ou encore qu'on ait

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx'_i = 0.$$

Cette relation étant invariante vis-à-vis du groupe de Lie, il en résulte que ce groupe transforme entre eux les éléments de surface en remplaçant deux éléments unis par deux éléments unis : c'est donc un *groupe de transformations de contact*. C'est le plus grand groupe de transformations de contact qui change les sphères en sphères, ou encore qui conserve les lignes de courbure (87).

Les considérations précédentes s'étendent à toutes les valeurs de n. Dans le cas de $n = 2$, la notion de sphère orientée doit être remplacée par la notion de *cycle* due à *Laguerre* [n° 14] (88).

On a supposé, dans ce qui précède, les éléments complexes. Si l'on se borne aux éléments réels, la forme quadratique Φ est, pour l'espace E_n, réductible par une substitution linéaire réelle, à la forme $z_1^2 + \ldots + z_{n+1}^2 - z_{n+2}^2 - z_{n+3}^2$ (89).

La géométrie des sphères orientées de E_n et la géométrie conforme de E_{n+1} font intervenir toutes les deux le groupe projectif d'une quadrique non dégénérescente de E_{n+2}. Si l'on se borne aux éléments réels,

(87) S. LIE, *Math. Ann.* t. 5, 1872, p. 183; F. KLEIN, *Höhere Geometrie*, t. 1, p. 485/6.

(88) Dans le plan, G. SCHEFFERS [*Ber. Ges. Lpz. math.*), t. 51, 1899, p. 145] a déterminé par une méthode synthétique les transformations du groupe de Lie considérées comme transformations de contact changeant les cycles en cycles.

(89) F. KLEIN, *Höhere Geometrie*, t. 1, p. 209.

les deux quadriques sont essentiellement distinctes et ne sont pas réductibles l'une à l'autre par une transformation réelle, à cause de la loi d'inertie des formes quadratiques. Au contraire, *si l'on admet les éléments complexes*, les deux quadriques sont réductibles l'une à l'autre, de sorte que les deux géométries sont équivalentes. Cette équivalence peut être mise en évidence, dans le cas de $n = 2$, par une construction géométrique simple [90] : on prend dans l'espace E_3 un plan fixe E_2 et l'on fait correspondre à tout *cycle* de E_2 de rayon r le point de E_3 obtenu en portant à partir du centre du cycle sur un axe perpendiculaire au plan E_2 un vecteur égal à ix; inversement le cycle est l'intersection du plan E_2 et de la sphère de rayon nul ayant pour centre le point de E_3. Par cette correspondance le groupe conforme de E_3 devient le groupe des cycles de E_2. En particulier toute droite orientée de E_2 correspond à un plan isotrope (regardé comme sphère de rayon nul) de E_3, et ce plan isotrope contient la droite. Cette construction s'étend à un espace E_n quelconque. La géométrie de Lie de E_n peut ainsi se déduire, par deux constructions géométriques successives, de la géométrie projective d'une quadrique M^2_{n+1} de E_{n+2} [91].

Dans le cas particulier de l'espace *complexe* E_3, il existe une troisième géométrie, différente de la géométrie conforme de E_4, et équivalente à la géométrie des sphères orientées : c'est la géométrie réglée projective qui fait, elle aussi, intervenir une quadrique de E_5. L'équivalence de la géométrie réglée et de la géométrie des sphères orientées de E_3 conduit à une correspondance remarquable (nécessairement imaginaire) entre les droites et les sphères orientées de E_3; à deux droites qui se coupent correspondent deux sphères orientées tangentes. Cette correspondance existe aussi entre les faisceaux de droites et les faisceaux de sphères orientées tangentes, par suite enfin entre les éléments de surface et les éléments de surface orientés; „à deux éléments de surfaces unis correspondent deux éléments de surface orientés unis." De ce dernier point de vue, la correspondance constitue la célèbre transformation de contact, découverte par S. Lie, qui transforme les lignes asymptotiques d'une surface dans les lignes de courbure de la surface

(90) Cette construction remonte au fond à M. Chasles [*Géométrie supérieure* (2e éd.) Paris, 1880, p. 507], A. F. Möbius (*Ber. Ges. Lpz math.*, t. 9, 1857, p. 38) et E. N. Laguerre; W. Fiedler (*Cyclographie*, Leipzig, 1882, en partic. p. 138 et suiv.) en a fait une étude approfondie.

(91) F. Klein, *Höhere Geometrie* t. 1, p. 477 et suiv. *Cf.* F. Klein, *Math. Ann.*, 1872, p. 257, en partic. p. 267.

transformée [92]. Cette transformation de contact ne s'étend pas à un espace E_n quelconque [92bis].

14. La géométrie de direction de Laguerre [93]. — Considérons dans le plan l'ensemble des transformations de Lie qui changent les droites orientées en droites orientées. Dans la correspondance entre la géométrie de Lie du plan et la géométrie conforme de l'espace E_3, ces transformations correspondent aux transformations conformes de E_3 qui changent les plans isotropes en plans isotropes, c'est-à-dire aux transformations du groupe fondamental de la géométrie élémentaire de E_3. La distance de deux points de E_3 est la *distance tangentielle* des deux cycles correspondants du plan. La *Géométrie de direction* de Laguerre est celle qui a pour groupe fondamental l'ensemble des transformations de Lie qui conservent la distance tangentielle de deux cycles : ce groupe correspond au groupe des déplacements et des retournements de l'espace euclidien E_3 [94]. Il est mixte et formé de deux familles continues à six paramètres.

(92) *C. R. Acad. Sc.*, t. 71, 1870, p. 579; *Ber. Akad. Berlin*, 1870, p. 891 (en collaboration avec F. Klein; reproduit *Math. Ann.*, t. 23, 1884, p. 579; *voir*, en particulier no 7); *Forhandlinger Videnskabs-Selskabet Christiania*, 1870 (éd. 1871) ou 1869 (éd. 1870), aussi les articles indiqués (84), et *Geometrie der Beziehungstransformationen*, t. 1, chap. X, § 4.

(92bis) *Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 145. Tout récemment, E. Bompiani [*Rend. R. Accad. Lincei*, (5), t. 21_1, 1912, p. 697] a étudié la correspondance, déterminée par la transformation de Lie, entre les faisceaux des droites tangentes à deux surfaces correspondantes, en des points aussi correspondants. Il en a donné une construction géométrique, avec d'autres applications.

(93) *Sur la géométrie de direction* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 8. 1883, p. 196; *Œuvres*, t. II, Paris, 1905, p. 592; *Sur la transformation par directions réciproques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 71; *Œuvres*, t. II, p. 694); *Transformations par semi-droites réciproques* [*Nouv. Ann. Math.*, (3), t. I, 1882, p. 542; *Œuvres* t. II, p. 608]; *Sur les hypercycles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 94, 1882, p. 778, 933, 1033, 1160; *Œuvres*, t. II, p. 620); *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles* [*Nouv. Ann. Math.*, (3), t. 2, 1883, p. 16; *Œuvres*, t. II, p. 636]; *Sur quelques propriétés des cycles* [*Nouv. Ann. Math.*, (3), t. 2, 1883, p. 65; *Œuvres*, t. II. p. 651]; *Sur les courbes de directions de la troisième classe* [*Nouv. Ann. Math.*, (3), t. 2, 1883, p. 97; *Œuvres*, t. II, p. 660]; *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe* (*Nouv. Ann. Math.*, t. 4, 1885, p. 5; *Œuvres*, t. II, p. 675). On trouvera un exposé d'ensemble dans l'Ouvrage : *Recherches sur la géométrie de direction*, Paris, 1885. „La notion de groupe n'intervient pas dans les recherches de E. N. Laguerre".

(94) „La relation qui vient d'être indiquée entre le groupe de Laguerre et le groupe des déplacements euclidiens à déjà été signalée par S. Lie (*Nachr. Ges. Gött.*, mai 1871, p. 201; *Math. Ann*, t. 5, 1872, p. 186. R. Bricard [*Nouv. Ann. Math.*, t. 6, 1906, p. 159, 433] utilise une représentation qui ramène le groupe de Laguerre *prolongé* au groupe projectif d'un cône de l'espace E_3, les droites orientées du plan étant représentées

On peut prendre pour élément générateur du plan, dans la géométrie de Laguerre, la droite orientée.

Toute transformation du groupe euclidien de E_3 peut être regadée comme le produit d'un nombre fini de symétries par rapport à un plan. A une de ces symétries correspond dans le groupe de Laguerre une *transformation par semi-droites réciproques*. Ces transformations qui permettent ainsi d'engendrer tout le groupe de Laguerre jouissent de la propriété suivante : une droite orientée et sa transformée se coupent sur une droite fixe, l'axe de la transformation; de plus, deux droites orientées et leurs transformées sont tangentes à un même cycle. Ce sont ces transformations par semi-droites réciproques que Laguerre a mises à la base de ses recherches sur la géométrie de direction; elles jouent le même rôle que les inversions dans la géométrie conforme.

La correspondance entre la géométrie de Laguerre du plan et la géométrie euclidienne de l'espace n'a de sens que dans le domaine complexe. Dans le domaine réel la génération du groupe de Laguerre par les transformations par semi-droites réciproques subsiste : le groupe de Laguerre est identique alors au groupe affine de l'espace qui laisse invariante la forme $dx^2 + dy^2 - dz^2$.

Les considérations précédentes s'étendent à un espace E_n quelconque. Dans l'espace E_3 le groupe de Laguerre ([94 bis]) transforme entre eux les plans orientés et peut être engendré par des transformations par semi-plans réciproques; dans une telle transformation un plan orienté (ou semi-plan) et son transformé se coupent sur un plan fixe; deux plans orientés et leurs deux transformés sont tangents à une même sphère orientée. Deux sphères orientées admettent un invariant, qui est la différence entre le carré de la distance de leurs centres et le carré de la différence de leurs rayons.

Le groupe de Laguerre peut être regardé comme un groupe de transformations de contact, au même titre que le groupe de Lie dont il est un sous-groupe ([95]). Dans le plan il change une courbe orientée, regardée

par les points du cône; W. Blaschke [*Arch. Math. Phys.*, (3), t. 18, 1911, p. 132], ramène de même le groupe de Laguerre prolongé au groupe projectif d'un cylindre de révolution; E. Müller (*Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 20, 1911, p. 168) utilise la représentation cyclographique qui ramène le groupe de Laguerre au groupe projectif d'une conique réelle à l'infini de E_3.*

([94 bis]) Court exposé par Butin et Darboux, *Bull.*, (2), t. 30, 1906, p. 19.

([95]) C. Stephanos (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 1195) a étudié les relations qui existent entre la géométrie de Laguerre et la géométrie des sphères orientées de Lie. E. Müller (*Monatsh. Math. Phys.*, t. 9, 1898, p. 289; *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 14, 1905, p. 574) a étudié ses relations avec la géométrie conforme.

comme enveloppe de droites orientées, en une autre courbe orientée. Laguerre appelle « courbe de direction » une courbe orientée séparable analytiquement de l'enveloppe des droites orientées opposées à ses tangentes orientées. L'enveloppe d'un cercle de rayon constant dont le centre décrit une courbe de direction se décompose en deux courbes séparées. *Le cycle est la seule courbe orientée qui admette un groupe de transformations de Laguerre à plus d'un paramètre : ce groupe est à trois paramètres et isomorphe au groupe projectif de la droite. Si une courbe orientée admet un groupe de transformations de Laguerre à un paramètre, elle est réductible soit à une développante de cercle, soit à l'enveloppe de la droite orientée

$$2tx + (1 - t^2)y - t^3 = 0,$$

soit à l'enveloppe de la droite orientée

$$y \operatorname{ch} t - x \operatorname{sh} t - at = 0.^*$$

15. La cinématique nouvelle et le groupe de Lorentz ([96]). — Dans les conceptions cinématiques modernes, on est conduit à représenter un événement, rapporté à un certain système de référence, par quatre coordonnées x, y, z, t, les trois premières localisant l'événement dans l'espace, la dernière dans le temps. Le système de référence est dit normal si, par rapport à ce système, la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse égale à l'unité. On a été conduit à admettre l'existence de systèmes de référence nouveaux *mobiles les uns par rapport aux autres* ([97]). Le passage de l'un de ces systèmes à l'autre constitue une transformation portant sur les variables x, y, z, t et cette transformation doit laisser invariante l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0$$

vérifiée pour tout rayon lumineux. L'ensemble des transformations qui laissent cette équation invariante est un groupe semblable, dans le domaine complexe, au groupe conforme de l'espace E_4. Le groupe de la

([96]) *Les Mémoires relatifs à cette théorie sont très nombreux et ressortissent d'ailleurs de la Physique. Citons parmi les articles fondamentaux, ceux de H. A. Lorentz, *Proc. sect. Sc. K. Akad. Wetensch.* (Amsterdam) t. 12, 1904 (27 mai 1904); H. Poincaré, *Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 21, 1906, p. 129, 144; H. Minkoskwi, *Conférence faite à la 80e Versammlung der deutschen Naturf. und Aerzte*, Cologne 21 sept. 1908, éd. Leipzig, 1909, trad. *Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. 26, 1909, p. 499; F. Klein, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 19, 1910, p. 281*.

([97]) *C'est cette hypothèse qui constitue le *principe de relativité*.*

cinématique nouvelle ou groupe de Lorentz correspond au sous-groupe de ce groupe conforme formé des déplacements euclidiens. Il est semblable, *dans le domaine réel*, au groupe de Laguerre de l'espace E_3. Les transformations génératrices indiquées par Lorentz correspondent aux transformations par semi-plans réciproques de Laguerre.

La similitude des deux groupes peut être mise en évidence en représentant un événement (x, y, z, t) par la sphère orientée de centre (x, y, z) et de rayon t. Un rayon lumineux est alors représenté par un faisceau de sphères orientées tangentes. Chaque transformation du groupe de Lorentz échange entre elles les sphères orientées; la propriété des rayons lumineux exige qu'elle change un faisceau de sphères orientées tangentes en un faisceau de sphères orientées tangentes : c'est donc une des transformations du groupe de Lie. Enfin un événement qui se passe au temps infini doit être transformé en un événement qui se passe au temps infini : la transformation conserve donc le plan de l'infini ou change les plans orientés en plans orientés [98].

Deux événements admettent un invariant, à savoir

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-(t-t')^2,$$

c'est le carré de la distance tangentielle des deux sphères orientées qui les représentent. Si cet invariant est positif, les deux événements ne sont ni antérieurs ni postérieurs l'un à l'autre, aucun courrier ne peut être témoin de ces deux événements; si l'invariant est négatif, celui des deux événements pour lequel t est le plus grand est postérieur à l'autre; enfin si l'invariant est nul, les deux événements peuvent être éclairés par un même rayon lumineux.

Si l'on considère une suite d'événements dépendant d'un paramètre, la quantité $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$ peut être, au voisinage d'une certaine valeur du paramètre, positive, nulle ou négative. Si elle est positive, les événements se déroulent dans l'espace et l'on peut toujours supposer que deux événements infiniment voisins sont simultanés; l'expression $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$ est le carré de la distance spatiale de ces deux événements. Si la quantité $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$ est négative, les événements se déroulent dans le temps et l'on peut toujours supposer que deux événements infiniment voisins se passent au même point de l'espace; l'expression $\sqrt{dt^2-dx^2-dy^2-dz^2}$ est l'intervalle de temps (local) qui les sépare. Enfin si la quantité

$$dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$$

est nulle, deux événements infiniment voisins sont éclairés par un même rayon lumineux : les événements ne se déroulent ni dans le temps ni dans l'espace.

Si une ligne d'événements se déroulant dans le temps admet un sous-groupe à un paramètre du groupe de Lorentz, ses coordonnées peuvent être mises, abstraction faite de cas particuliers limites, sous la forme

$$x=\cos m\tau,\qquad y=\sin m\tau,\qquad z=\operatorname{ch} n\tau,\qquad t=\operatorname{sh} n\tau\qquad (n^2-m^2=1),$$

où τ désigne le temps local variable [99].

16. **La géométrie hermitienne.** — Toutes les géométries précédentes font intervenir comme groupe fondamental le groupe projectif d'une quadrique d'un espace E_n. La géométrie hermitienne fait intervenir un groupe projectif d'une tout autre nature.

Considérons dans un espace complexe E_n un système de coordonnées homogènes complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Le groupe de la géométrie hermitienne est formé des transformations projectives (complexes) qui laissent invariante l'équation

$$\Sigma a_{ik} x_i \overline{x}_k = 0,$$

où $\overline{x}_k$ désigne la quantité complexe conjuguée de x_k et où l'on a

$$a_{ki} = \overline{a}_{ik}.$$

Le premier membre de l'équation est une *forme d'Hermite* [100]; on

---

[98] E. CARTAN, *C. R. Soc. Math. Fr.*, n° 40, 1912, p. 23 (24 janvier 1912); *cf.* H. BATEMAN, *Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 8, 1910, p. 223; E. TIMERDING, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 21, 1913, p. 274.

[99] Sur les relations entre le principe de relativité et la géométrie non euclidienne, *voir* A. SOMMERFELD, *Phys. Z.*, t. 10, 1909, p. 828; V. VARICATE, *Phys. Z.*, t. 11, 1910, p. 93, 287, 586; G. HERGLOTZ, *Ann. Physik*, t. 31, 1910, p. 404; VON V. PARICAK, *Glas syrke Kraljevske Akad.*, t. 13, 1911, p. 211; *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 21, 1912, p. 103; É. BOREL, *C. R. Acad. Sc.*, t. 154, 1912, p. 970.

[100] C. HERMITE, *J. Reine Angew. Math.* t. 47, 1854, p. 435; t. 52, 1856, p. 39; t. 53, 1857, p. 183; *Œuvres*, publ. par É. PICARD, Paris, 1905. Les substitutions linéaires qui laissent invariante une forme d'Hermite avaient déjà été considérées par É. Picard dans ses recherches sur les fonctions hyperfuchsiennes (*Acta Math.*, t. 1, 1884/5, p. 297). Elles ont fait l'objet d'un Mémoire de A. Lœwy (*Nova Acta Akad. Leop.*, 71, 1898, p. 377). C'est G. Fubini qui le premier a considéré le groupe de ces substitutions comme le groupe fondamental d'une géométrie métrique [*Memorie dell' Accad. Geoenia Catania*, 1903; *Atti Ist. Veneto*, (8), t. 6, 1903/4, p. 501]. Le Mémoire le plus important relatif à la géométrie hermitienne est de E. Study (*Math. Ann.*, t. 60, 1905, p. 321).

suppose le discriminant de cette forme différent de zéro. L'équation représente ce que C. Segre appelle une *hyperquadrique* réelle ([101]).

Les éléments générateurs de l'espace dans la géométrie hermitienne sont les points complexes de E_n; ils forment au fond une variété réelle à $2n$ dimensions. Toute forme d'Hermite est réductible, par une substitution linéaire, à la forme canonique

$$\varepsilon_1 x_1 \overline{x}_1 + \varepsilon_2 x_2 \overline{x}_2 + \ldots + \varepsilon_{n+1} x_{n+1} \overline{x}_{n+1},$$

où les ε sont égaux à ± 1. Il existe aussi une loi d'inertie ([102]) d'après laquelle le nombre des coefficients ε positifs est indépendant de la manière dont la forme canonique est obtenue. Il y a donc $\frac{n+2}{2}$ ou $\frac{n+3}{2}$ géométries hermitiennes essentiellement distinctes. La géométrie hermitienne *elliptique* est celle qui correspond à la forme d'Hermite

$$x_1 \overline{x}_1 + \ldots + x_n \overline{x}_n + x_{n+1} \overline{x}_{n+1},$$

la géométrie hermitienne *hyperbolique* à la forme

$$x_1 \overline{x}_1 + \ldots + x_n \overline{x}_n - x_{n+1} \overline{x}_{n+1}.$$

Le groupe de la géométrie hermitienne est à $n(n+2)$ paramètres réels; il est simple, il contient comme sous-groupe le groupe projectif réel de la quadrique

$$\Sigma \varepsilon_i x_i^2 = 0$$

dans l'espace réel E_n. La géométrie hermitienne elliptique ou hyperbolique est donc une extension aux éléments complexes de la géométrie non euclidienne réelle, elliptique ou hyperbolique; cette extension est essentiellement différente de la géométrie non euclidienne complexe.

Dans la géométrie hermitienne elliptique ou hyberbolique, deux points complexes quelconques de E_n ont un invariant absolu, leur distance hermitienne. Les courbes complexes de E_n à une dimension réelle ou *fils* (lieu de points dont les coordonnées sont fonction d'un paramètre réel) qui réalisent la plus courte distance entre deux points sont les *chaînes normales* de E. Study ([103]), toutes homologues entre elles; le minimum de distance est absolu dans le cas de la géométrie hyperbolique.

([101]) C. Segre, *Atti Accad. Torino*, t. 25, 1889/90, p. 284, 592 et suiv., 606. *Voir* aussi *Math. Ann.*, t. 40, 1892, p. 413.*

([102]) *C. Hermite, *J. Reine Angew. Math.*, Crelle, t. 52, 1856, p. 40; *Œuvres*, publ. par É. Picard, t. I, Paris, 1905.*

([103]) *E. Study, *Math. Ann.*, t. 60, 1905, p. 333.*

Dans le cas de la géométrie hermitienne hyperbolique de E_2, la forme d'Hermite fondamentale étant

$$x\overline{x} + y\overline{y} - z\overline{z},$$

et l'espace étant réduit aux points complexes pour lesquels la forme d'Hermite est négative, il existe des fils admettant un sous-groupe à deux paramètres du groupe d'Hermite. Ces fils sont formés de points appartenant tous à une même droite complexe du plan E_2, soit $x = 0$ et l'on a, pour leurs coordonnées homogènes y, z, des formules rentrant dans l'un des trois types suivants :

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{1-m^2}\, s\right), \qquad z = \operatorname{ch}\left(\sqrt{1-m^2}\, s\right) - \frac{im}{\sqrt{1-m^2}} \operatorname{sh} \sqrt{1-m^2}\, s;$$

$$y = s, \qquad z = 1 - is;$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \sin\left(\sqrt{m^2-1}\, s\right), \qquad z = \cos\left(\sqrt{m^2-1}\, s\right) - \frac{im}{\sqrt{m^2-1}} \sin\left(\sqrt{m^2-1}\, s\right);$$

s désigne l'arc hermitien; m est une constante réelle inférieure à 1 dans le premier cas, supérieure à 1 dans le troisième cas. La droite hermitienne est donnée par les premières formules, pour $m = 0$.

Il y a également, en dehors de la variété formée d'une droite complexe de E_2, des variétés à deux dimensions réelles (*membranes*) admettant un groupe à trois paramètres. Ces variétés sont homologues entre elles et l'on peut supposer les coordonnées x, y, z d'un de leurs points données par les formules

$$x = (u+i)(\overline{u}+i), \qquad y = (u-i)(u-i), \qquad z = \sqrt{2}(u\overline{u}+1),$$

où u et $\overline{u}$ sont deux paramètres arbitraires complexes conjugués; le groupe à trois paramètres s'obtient en effectuant sur u une transformation homographique à coefficients réels.

La géométrie hermitienne fait intervenir, pour les éléments générateurs de l'espace (points complexes de E_n), $2n$ coordonnées *réelles* et son groupe fondamental dépend de $n(n+2)$ paramètres *réels*. On aurait une extension de cette géométrie en regardant les $2n$ coordonnées et les $n(n+2)$ paramètres comme des nombres *complexes*. La géométrie hermitienne ainsi étendue serait identique à la géométrie projective de l'espace complexe E_n ([104]), dans laquelle l'élément générateur de

([104]) *Le groupe de la géométrie hermitienne est donc isomorphe, par une transformation *imaginaire*, au groupe projectif général réel. Il est isomorphe à un groupe de transformations de contact signalé par F. Engel [*Ber. Ges. Lpz.* (*Math.*), t. 44, 1892, p. 292].*

l'espace serait l'ensemble d'un point et d'une multiplicité plane E_{n-1} (complexes). Ceux des éléments générateurs qui correspondraient aux points à l'infini de la géométrie hermitienne seraient formés d'un point et d'un E_{n-1} passant par ce point.

On peut également considérer la géométrie hermitienne *parabolique* de E_n; son groupe est formé des transformations affines complexes de E_n qui laissent invariante la forme d'Hermite différentielle

$$dx_1\, d\bar{x}_1 + dx_2\, d\bar{x}_2 + \ldots + dx_n\, d\bar{x}_n.$$

Il est à $n(n+2)$ paramètres et admet un sous-groupe invariant à $n(n+2)-1$ paramètres.

17. ***La géométrie projective quaternionienne.** — Appelons point de l'espace E_n quaternonien l'ensemble de $n+1$ quaternions non tous nuls

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n+1},$$

en convenant de regarder comme identique le point défini par les coordonnées

$$x_1 k, \quad x_2 k, \quad \ldots, \quad x_{n+1} k,$$

où k désigne un quaternion quelconque. Le *groupe projectif* de l'espace quaternionien E_n est formé des transformations de la forme

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1,n+1} x_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_{n+1} &= a_{n+1,1} x_1 + a_{n+1,2} x_2 + \ldots + a_{n+1,n+1} x_{n+1}, \end{aligned}$$

où les coefficients a_{ik} sont des quaternions arbitraires. On ne regarde pas comme distinctes deux transformations pour lesquelles les coefficients diffèrent d'un même facteur constant scalaire (réel). Le groupe projectif précédent dépend donc de $(2n+1)(2n+3)$ paramètres réels.

Le cas le plus simple est celui de la droite quaternionienne, le groupe dépend alors de 15 paramètres. En prenant dans ce cas une coordonnée non homogène, l'équation des transformations du groupe est de la forme

$$x' = (ax+b)(a'x+b')^{-1}.$$

Si un *fil*, lieu de points dépendant d'un paramètre scalaire variable, admet un groupe projectif quaternionien à plus d'un paramètre, il en admet un à six paramètres et alors il est équivalent à un lieu de points à coordonnée scalaire, ou bien il en admet un à deux paramètres et alors

il est réductible au lieu des points

$$x = \mathrm{th}\left(\sqrt{a+iu}\right),$$

où u est un paramètre scalaire variable.

On peut étendre la géométrie projective quaternionienne de l'espace E_n en regardant les $4n-4$ coordonnées des points de l'espace et les $(2n+1)(2n+3)$ paramètres des transformations comme des nombres *complexes*. La géométrie ainsi obtenue est alors identique à la géométrie réglée projective de l'espace complexe E_{2n+1}, l'élément générateur étant la droite [105]. Mais cette identité n'a lieu que dans le domaine complexe [106]*.

18. ***La géométrie projective duale.** — On appelle nombre *dual* une expression de la forme $a+b\varepsilon$, où ε est une unité hypercomplexe satisfaisant à l'équation $\varepsilon^2 = 0$. Le nombre dual est dit réel quand a et b sont réels, complexe quand a et b sont complexes. Il est dit pseudo-nul ou diviseur de zéro quand la partie scalaire, c'est-à-dire a, est nulle.

On appelle point de l'espace dual E_n l'ensemble de $n+1$ nombres duals

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n+1}$$

qui ne sont pas tous nuls, ni tous diviseurs de zéro et l'on convient de regarder comme identique le point défini par les coordonnées

$$kx_1, \quad kx_2, \quad \ldots, \quad kx_{n+1},$$

k étant un nombre dual non diviseur de zéro.

Le groupe projectif de l'espace dual E_n est formé des substitutions linéaires à coefficients duals effectuées sur les x_i, le déterminant des coefficients de la substitution n'étant pas un diviseur de zéro [107]. On

[105] *La géométrie projective de la droite quaternionienne est ainsi rapprochée de la géométrie projective réglée de E_3 et, par suite, de la géométrie des sphères orientées de E_3, un point de la droite quaternionienne correspondant à une sphère orientée*. Cette correspondance, qui n'existe que dans le domaine complexe, a été signalée et utilisée par C. Stephanos (*Math. Ann.*, t. 22, 1883, p. 589).

[106] *Le groupe projectif de l'espace quaternionien E_n est donc isomorphe, par une transformation *imaginaire*, au groupe projectif général réel de E_{2n+1}; il est aussi isomorphe, mais encore par des transformations *imaginaires*, aux différents groupes hermitiens de E_{2n+1} [*voir* n° 41].*

[107] *C. Segre (*Atti Acad. Torino*, t. 47, 1911/2, p. 308) considère plus généralement les géométries projectives duales, pour lesquelles un point est représenté par des coordonnées homogènes $x_i + y_i\varepsilon$, où ε est une unité complexe satisfaisant à l'équation $\varepsilon^2 = g\varepsilon + h$. Un point de l'espace dual peut alors se représenter par une homographie sur une droite. L'homographie est parabolique dans le cas où $\varepsilon^2 = 0$. *Cf.* P. Pradella, *Giorn. mat.*, (3) t. 2, 1911, p. 281.*

obtient la même transformation projective en multipliant tous les coefficients par un même facteur dual non diviseur de zéro.

A tout point de l'espace dual E_n correspond le point de l'espace non dual (réel ou complexe) E'_n qui a pour coordonnées homogènes les parties scalaires des coordonnées du point donné ([108]); inversement à un point de l'espace non dual correspondent ∞^n points de l'espace dual. L'ensemble de ces ∞^n points et tous les ensembles analogues sont transformés entre eux par le groupe projectif dual.

Le groupe projectif de la droite duale réelle a une interprétation simple dans le plan réel : il est identique au groupe de Laguerre du plan ([109]). Faisons en effet correspondre au point $(u + \varepsilon u', v + \varepsilon v')$ de la droite duale la droite orientée

$$2uvx + (v^2 - u^2)y + vu' - uv' = 0;$$

toute transformation projective de la droite duale devient par cette correspondance une transformation de Laguerre du plan; on obtient ainsi celles des transformations de Laguerre qui forment un groupe continu; les autres, en particulier les transformations par semi-droites réciproques, résultent de la composition d'une transformation projective duale avec la transformation qui change de signe le coefficient de ε.

Le groupe projectif de la droite duale complexe a une interprétation également simple dans la géométrie de Laguerre du plan complexe, et par suite dans la géométrie euclidienne de l'espace complexe. Il suffit de faire correspondre au point $(u + \varepsilon u', v + \varepsilon v')$ de la droite duale complexe le plan isotrope

$$2uvx + (v^2 - u^2)y + i(v^2 + u^2)z + vu' - uv' = 0.$$

Par cette correspondance, toute transformation projective de la droite duale devient un déplacement de l'espace euclidien ([110]).

([108]) *Noyau, d'après C. SEGRE ([107]), p. 319.*

([109]) *W. BLASCHKE, *Monatsh. Math. Phys.*, t. 21, 1910, p. 3. *Cf.* G. SCHEFFERS, *Math. Ann.*, t. 60, 1905, p. 491.*

([110]) G. GRÜNWALD (*Monatsh. Math. Phys.*, t. 17, 1906, p. 81) représente les déplacements réels de l'espace par les transformations projectives

$$w' = \frac{(a_0 - a_3 i)w + a_1 i - a_2}{(a_1 i + a_2)w + (a_3 i + a_0)},$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont des paramètres duals réels. Il substitue à la considération des plans isotropes celle des droites orientées réelles (Speer) qu'ils contiennent : il y a ainsi correspondance entre les points du plan dual complexe et les droites orientées de l'espace. *Cf.* W. BLASCHKE, *Monatsh. Math. Phys.*, t. 21, 1910, p. 210. H. BECK (*Ber. Ges. Lpz.* (*Math.*), t. 64, 1912, p. 3) considère la droite minima comme élément générateur de l'espace E_3 et étudie les déplacements euclidiens qui laissent invariante une droite minima au moyen de la représentation des droites minima sur les points de la droite duale.*

Dans le plan dual la théorie des coniques (et des courbes en général) présente des particularités intéressantes. Soit une conique définie par une équation

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dont le discriminant soit supposé ne pas être un diviseur de zéro, et soit

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$$

l'équation tangentielle de cette conique. Si les coordonnées u_1, u_2, u_3 d'une droite duale sont telles que $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ ne soit pas un diviseur de zéro, la droite coupe la conique en deux points duals réels ou imaginaires. Si $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ est un diviseur de zéro sans être nul, la droite n'a aucun point commun avec la conique. Si enfin

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

la droite est dite tangente à la conique et elle a une infinité de points (identiques quant aux parties scalaires de leurs coordonnées) communs avec la conique. Les points du plan dual se partagent de même en trois catégories, suivant que l'on peut mener de ces points deux tangentes, zéro tangente ou une infinité de tangentes à la conique : dans ce dernier cas le point est sur la conique.

On peut d'ailleurs établir une correspondance biunivoque entre les point duals d'une droite (complexe) et les points duals d'une conique, et par suite entre les points duals d'une conique et les plans isotropes de l'espace. Cette correspondance fournit une interprétation dans l'espace euclidien de la géométrie projective du plan dual. Mais pour bien comprendre cette correspondance, il est utile d'indiquer une interprétation analogue de la géométrie projective du plan *complexe* dans l'espace hyperbolique réel.*

19. **La géométrie projective du plan complexe et la géométrie projective radiale de l'espace hyperbolique réel.**

— On peut établir une correspondance biunivoque entre les points complexes d'une droite et les points réels d'une sphère ou plus généralement d'une quadrique réelle non réglée S de l'espace E_3. Il en est de même entre les points complexes d'une conique C d'un plan et les points réels de la quadrique S. Toute droite réelle ou imaginaire du plan, non tangente à la conique C, coupe cette conique en deux points auxquels correspondent sur la sphère S deux points réels. On peut donc faire correspondre à toute droite complexe du plan la droite qui joint deux points réels de S ([111]); E. Study donne à une telle droite le nom de *rayon*. Si la droite du plan est tangente à C on lui fera correspondre un point de S, qu'on regardera comme un rayon impropre.

On peut de même faire correspondre à tout point complexe du plan le rayon, propre ou impropre, qu'on a fait correspondre à la polaire de ce point par rapport à C.

Il y a ainsi correspondance biunivoque entre les points complexes (et aussi les droites complexes d'un plan) et les rayons, propres ou impropres, de l'espace hyperbolique réel dont S est la quadrique fondamentale. On peut alors imaginer, avec E. Study, deux *couches* de rayons, ceux de la première couche correspondant aux points, ceux de la seconde couche aux droites du plan complexe. Deux rayons rectangulaires (au sens de la géométrie non euclidienne hyperbolique), qui appartiennent à deux couches différentes, sont les images d'un point et d'une droite du plan complexe passant par le point.

Toute transformation projective du plan complexe donnera donc dans l'espace hyperbolique une transformation entre eux des rayons de chacune des deux couches, et deux rayons rectangulaires de deux couches différentes sont transformés en deux autres rayons rectangulaires : une telle transformation de l'espace hyperbolique est appelée par E. Study une *collinéation* (ou homographie) *duale*. Si l'on représente analytiquement un rayon de la première couche par les coordonnées homogènes complexes (x_1, x_2, x_3) du point du plan dont il est l'image, un rayon de la seconde couche par les coordonnées homogènes complexes (u_1, u_2, u_3) de la droite dont il est l'image, toute collinéation duale est représentée analytiquement par une substitution linéaire à coefficients complexes effectuée sur les x et par la substitution contragrédiente effectuée sur les u. Un rayon impropre n'est pas nécessairement transformé en un rayon impropre par une collinéation.

A ces collinéations duales on peut adjoindre les *corrélations duales*, images des transformations dualistiques du plan, et enfin les *anti-collinéations* et les *anticorrélations duales*, images des transformations antiprojectives du plan, et qui résultent de la composition des collinéations et des corrélations duales avec un retournement de l'espace hyperbolique.

([111]) F. Klein, *Sitzgsb. phys.-mediz. Soc. Erlangen*, t. 5, 1872/3; reproduit *Math. Ann.*, t. 22, 1883, p. 246.

Le groupe mixte ainsi obtenu contient *toutes* les transformations portant sur les rayons et qui laissent invariant l'ensemble des *réseaux de normales* : un tel réseau est formé des ∞^2 rayons d'une des couches qui coupent à angle droit un même rayon de l'autre couche ([112]).

Le groupe des collinéations duales de l'espace hyperbolique est à 16 paramètres réels ; il contient en particulier comme sous-groupe le groupe des déplacements non euclidiens hyperboliques.

On pourrait considérer, au lieu des rayons qui joignent deux points réels de la quadrique S, les droites d'intersection de deux plans tangents réels à cette quadrique. On aurait ainsi de nouveaux éléments qui devraient être complétés par les éléments impropres, savoir les plans tangents à la quadrique.

20. La géométrie projective du plan dual et la géométrie projective duale de l'espace euclidien. — Considérons ([113]) dans l'espace euclidien, rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires, les six coordonnées d'un système de vecteurs non réductible à un couple, à savoir :

x_{01}, x_{02}, x_{03} sommes des projections des vecteurs sur les axes ;
x_{23}, x_{31}, x_{12}, sommes des moments des vecteurs par rapport aux axes.

Posons alors

$$X_1 = x_{01} + x_{23}\varepsilon, \qquad X_2 = x_{02} + x_{31}\varepsilon, \qquad X_3 = x_{03} + x_{12}\varepsilon.$$

Si l'on multiplie X_1, X_2, X_3 par un même nombre dual

$$\sigma + \tau\varepsilon \qquad (\sigma \neq 0),$$

on obtient pour les x_{ik} les nouvelles valeurs

$$\sigma x_{01}, \quad \sigma x_{02}, \quad \sigma x_{03}; \qquad \sigma x_{23} + \tau x_{01}, \quad \sigma x_{31} + \tau x_{02}, \quad \sigma x_{12} + \tau x_{03},$$

ce sont les coordonnées d'un quelconque des systèmes de vecteurs qui ont même axe central que le système de vecteurs donné.

Les trois nombres duals X_1, X_2, X_3 peuvent donc être regardés comme les coordonnées duales *homogènes* du *rayon* formé par l'axe central du

([112]) E. Study, *Festschrift zu H. Limprichts Jubelfeier « Ueber Nicht-Euklidische und Liniengeometrie »* (*Greifswald*, 1900; reproduit, avec des modifications insignifiantes et quelques additions, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 11, 1902, p. 313). *Voir* aussi : H. Beck, *Die Strahlenketten im hyperbolischen Raume* (*Diss. Bonn*, 1905, éd. Hanovre, 1905); E. Davis, *Die geometrische Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie* (*Diss. Greifswald*, 1904).

([113]) E. Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig, 1903, p. 199 et suiv. et p. 231 et suiv.

système donné. L'équation $X_1 X'_1 + X_2 X'_2 + X_3 X'_3 = 0$ exprime que les deux rayons (X) et (X') se coupent à angle droit.

Nous pouvons d'après cela faire correspondre à tout point (et aussi à toute droite) d'un plan dual un rayon (réel) de l'espace euclidien. Nous imaginerons avec E. Study deux couches de rayons; ceux de la première couche correspondent aux points, ceux de la seconde couche aux droites du plan dual. Toute transformation projective du plan dual aura alors pour image dans l'espace euclidien ce que E. Study appelle une *collinéation duale* qui échange entre eux les rayons de chaque couche et change deux rayons orthogonaux de deux couches différentes en deux autres rayons orthogonaux. On adjoint à ces collinéations les *corrélations duales*, puis les *anticollinéations* et les *anticorrélations duales*. Dans toutes ces transformations deux rayons coïncidents appartenant aux deux couches ne sont pas changés en général en deux rayons coïncidents.

Quatre rayons de la première couche qui coupent à angle droit un même rayon de la seconde couche et tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas parallèles, ont un « rapport anharmonique dual » qui est un invariant absolu du groupe des collinéations duales ([114]).

Le groupe mixte des collinéations, corrélations, anticollinéations et anticorrélations duales ne contient pas toutes les transformations de rayons qui changent un réseau de normales à un rayon propre en un autre réseau. Toutes les transformations qui jouissent de cette propriété forment un groupe à 17 paramètres qui résulte de la composition du groupe mixte précédent avec le groupe des transformations homothétiques ayant pour pôle l'origine. Ce groupe à 17 paramètres est le *groupe des projectivités radiales* ([115]). Ses opérations se décomposent en *collinéations radiales* et *corrélations radiales* suivant que les deux couches de rayons sont conservées ou sont échangées entre elles. Les premières forment un groupe continu. Le rapport anharmonique dual de quatre normales à un même rayon n'est pas un invariant pour le groupe total des projectivités radiales.

Le groupe G_{16} des collinéations duales est le plus grand sous-groupe invariant continu du groupe G_{17}. Le groupe G_{17} contient deux autres sous-groupes invariants continus : le premier, à neuf paramètres, est formé des transformations de G_{17} qui laissent invariante la direction des

([114]) Une collinéation duale est déterminée en général par quatre couples de rayons correspondants; étant donné un rayon quelconque, le rayon homologue déterminé par la collinéation peut alors être obtenu par des constructions successives de normales communes à deux rayons non parallèles de la même couche.

([115]) E. STUDY, *Geometrie der Dynamen* ([113]), p. 440/1.

rayons (c'est-à-dire remplacent un rayon quelconque par un rayon parallèle); le second, à huit paramètres, est formé des transformations communes à G_9 et G_{16}; ces transformations sont les *translations duales* et sont échangeables entre elles.

Le groupe fondamental de la géométrie élémentaire est formé des transformations de G_{13} qui changent deux rayons coïncidents des deux couches en deux rayons coïncidents.

On peut aussi considérer des rayons complexes, définis par trois coordonnées homogènes duales complexes, dont une au moins n'est pas un diviseur de zéro. Mais dans le domaine complexe il n'y a plus, comme dans le domaine réel, identité complète entre la notion de « rayon » et la notion de ligne droite ([116]). Les rayons imaginaires pour lesquels la quantité $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ est un diviseur de zéro, sans être nulle, ne correspondent à aucune ligne droite : autrement dit aucun des systèmes de vecteurs qu'on peut associer aux coordonnées X_1, X_2, X_3 ne peut être ramené à un vecteur unique. D'autre part, si $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ est nul, tous les systèmes de vecteurs qu'on peut associer à X_1, X_2, X_3 peuvent être ramenés à un vecteur unique : le rayon imaginaire correspond à une infinité de droites formant un faisceau de droites minima parallèles situées dans un même plan isotrope; on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les points du plan dual appartenant à la conique (C) :

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$$

et les plans isotropes de l'espace euclidien (complexe).

Cette correspondance résulte d'ailleurs de ce double fait qu'il y a une correspondance biunivoque entre les points d'une droite duale complexe et les points duals complexes d'une conique, et aussi entre les points d'une droite duale complexe et les plans isotropes. On pourrait d'ailleurs partir de là pour retrouver, *au moins en partie*, la relation entre la géométrie projective du plan dual et la géométrie des collinéations duales de l'espace euclidien. Il suffit en effet de faire correspondre à toute droite (V_1, V_2, V_3) du plan dual pour laquelle $V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$ n'est pas un diviseur de zéro, la droite d'intersection des plans tangents au cercle imaginaire de l'infini qui correspondent aux deux points d'intersection de la droite (V_1, V_2, V_3) avec la conique (C) ([117]). On procéderait

([116]) Cela explique pourquoi E. Study emploie systématiquement le mot *rayon* (Strahl) à la place de l'expression *ligne droite*. Il y a à cela une autre raison tenant à ce que la droite de l'infini ne sert pas ici, comme en géométrie projective, à compléter le corps des rayons de manière à obtenir un continuum fermé [*voir* n° 22].

([117]) *Cf.* J. GRÜNWALD ([110]).

d'une manière analogue pour un point (X_1, X_2, X_3) du plan dual. Mais cette méthode tomberait en défaut pour les droites ou les points du plan dual pour lesquels la somme des carrés des coordonnées serait un diviseur de zéro. Cette méthode est d'ailleurs identique à celle qui a été indiquée pour déduire la géométrie projective radiale de l'espace hyperbolique de la géométrie projective du plan complexe ; la quadrique fondamentale de l'espace hyperbolique est remplacée ici par le cercle imaginaire de l'infini.

21. Les éléments impropres de la géométrie projective radiale. — Les *projectivités radiales* conservent le parallélisme des rayons d'une même couche. Les faisceaux de rayons parallèles forment par suite une deuxième espèce de figures (dépendant de quatre constantes) qui peuvent servir d'éléments générateurs de l'espace : on peut aussi trouver pour eux un système simple de coordonnées. On peut faire correspondre à chaque faisceau de parallèles le faisceau « réciproque » formé des rayons qui coupent orthogonalement les rayons du premier ; on obtient ainsi une relation de réciprocité qui se retrouve dans tout le développement de la géométrie projective radiale.

Les rayons considérés jusqu'à présent, ou rayons propres, ne forment pas un continuum fermé, c'est-à-dire qu'il existe des ensembles infinis de rayons qui n'admettent aucun rayon limite. Il en est de même en géométrie élémentaire pour l'ensemble des droites ; elles ne forment un continuum fermé que si on leur adjoint la droite de l'infini. Ce n'est qu'après cette adjonction qu'un grand nombre de théorèmes de la géométrie projective gagnent toute leur généralité ; en particulier, ce n'est qu'alors, que les transformations projectives deviennent *partout* bien définies, uniformes et continues. Mais la manière dont il convient de compléter un ensemble d'éléments par l'adjonction d'éléments impropres, de manière à obtenir un continuum fermé, dépend non seulement de la nature de ces éléments mais encore du groupe fondamental de la géométrie dans laquelle interviennent ces éléments [118]. Et, dans la géométrie projective radiale (réelle) on procède autrement que dans la géométrie projective réglée pour compléter la multiplicité des droites proprement dites.

En géométrie projective radiale l'introduction des rayons impropres peut, comme l'a montré E. Study, être effectuée de deux manières

([118]) C'est ainsi que dans la géométrie conforme, réelle, le corps formé des points situés à distance finie devient un continuum fermé par l'adjonction d'un seul point à l'infini.

différentes. Il substitue pour cela à la considération du rayon supposé réel, celle du réseau de normales correspondant, c'est-à-dire du réseau formé des rayons qui coupent orthogonalement le rayon donné.

a. On peut d'abord regarder ce réseau de normales comme formé de ∞^1 faisceaux de rayons, le sommet de chaque faisceau étant sur le rayon donné et son plan perpendiculaire au rayon donné. On peut alors supposer qu'à la limite tous les sommets de ces faisceaux soient rejetés à l'infini dans une même direction de manière à obtenir un réseau de parallèles. Il y a une correspondance biunivoque entre un tel réseau et son sommet (à l'infini) ; on peut donc regarder ce point à l'infini comme limite d'un rayon proprement dit ; E. Study lui donne le nom de « rayon-point ». Par cette introduction des ∞^2 rayons-points le corps des rayons forme un continuum fermé [119]. *On pourrait d'ailleurs arriver au même résultat en partant d'un système de vecteurs réductible à un couple : il définirait le rayon-point constitué par le point à l'infini dans la direction de l'axe du couple. Les coordonnées X_1, X_2, X_3 d'un rayon-point sont trois nombres duals diviseurs de zéro, non tous nuls.*

b. On peut encore regarder le réseau de normales d'un rayon donné comme formé par ∞^1 faisceaux de rayons parallèles dont les plans forment eux-mêmes un faisceau ayant pour axe le rayon donné ; on peut ensuite supposer que ce faisceau de plans devienne à la limite un faisceau de plans parallèles. On obtient encore comme figure limite du réseau de normales un réseau de droites parallèles, mais un réseau *stratifié*, c'est-à-dire décomposé d'une certaine manière en ∞^1 faisceaux de parallèles. Un tel réseau stratifié correspond d'une manière biunivoque à l'ensemble d'un point à l'infini et d'une droite à l'infini passant par ce point. E. Study donne à ces réseaux stratifiés, considérés comme rayons impropres, le nom de « rayons-limites ». Leur introduction fait de la multiplicité des rayons un second continuum fermé.

Il existe donc deux continuums de rayons, à savoir :

a. l'ensemble des ∞^4 rayons propres et des ∞^2 rayons-points (« premier continuum naturel de rayons ») ;

b. l'ensemble des ∞^4 rayons propres et des ∞^3 rayons-limites (« second continuum naturel de rayons »).

([119]) Le réseau de normales d'un rayon-point doit être considéré comme une figure se composant d'abord de l'ensemble de tous les rayons d'un réseau de parallèles et ensuite de l'ensemble de tous les rayons-points. De même, dans le cas *b*, le réseau de normales d'un rayon limite contient un système de ∞^2 rayons limites.

Pour chacun de ces ensembles, E. Study emploie un système de coordonnées qui lui est approprié (coordonnées de *deuxième* et de *troisième* espèce) ([120]) de manière qu'un rayon variant géométriquement d'une manière continue soit représenté par des coordonnées variant d'une manière continue. Dans chacun de ces continuums, enfin, les projectivités radiales sont partout bien définies, uniformes et continues.

Il existe ainsi deux espèces de géométrie projective radiale, et ces deux géométries sont identiques tant qu'on ne fait intervenir que des rayons propres ([121]).

Ce qui précède s'applique aux éléments réels; mais on peut étendre au domaine complexe la définition des éléments impropres, en donnant dans chaque cas aux coordonnées introduites des valeurs imaginaires aussi bien que réelles.

Les familles de rayons, qui dépendent de un, deux ou trois paramètres s'appellent respectivement des *bandes*, des *congruences* et des *complexes* de rayons. Un complexe algébrique de rayons dans le premier continuum naturel peut être représenté par une seule équation rationnelle entière et homogène entre les coordonnées de deuxième espèce; un tel complexe possède deux entiers caractéristiques dont l'ensemble joue dans la géométrie projective radiale un rôle analogue à celui du degré d'un complexe de droites dans la géométrie réglée de Plücker. E. Study a étudié plus particulièrement les systèmes linéaires de torseurs (représentés par des équations linéaires entre les six coordonnées d'un torseur) et les lieux de leurs axes centraux. Il désigne sous le nom de *chaînes* ces lieux, ainsi que d'autres figures qui peuvent en être regardées comme des limites. Il classe ces systèmes linéaires d'abord d'après leurs propriétés invariantes par rapport à G_{17} ou G_{16}, puis d'après leurs propriétés métriques, c'est-à-dire invariantes par rapport au groupe des déplacements euclidiens ([122]).

22. Représentation projective de la géométrie projective radiale. — E. Study s'est encore occupé d'une question importante, qui permet de formuler d'une manière précise dans des cas très étendus le problème de l'adjonction des éléments impropres. Il cherche dans un espace à un nombre quelconque de dimensions E_n, toutes les variétés M_4 jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Les coordonnées d'un point *arbitraire* de M_4 doivent être des fonctions rationnelles des coordonnées d'un rayon (propre) de E_3 ([122bis]).

2° Par la correspondance ainsi établie entre les rayons de E_3 et les points de M_4, le groupe des projectivités radiales doit devenir un groupe projectif (isomorphe holoédrique) de E_n.

Il est bien évident que tout point de M_4 qui ne correspond à aucun rayon propre de E_3 pourra être regardé comme l'image d'un rayon impropre et que l'ensemble des rayons, propres et impropres, constituera, de même que M_4, un continuum fermé.

Les variétés M_4 jouent ainsi, dans la géométrie projective radiale, le même rôle que la quadrique M_4^2 non dégénérescente de E_5 dans la géométrie projective réglée.

Les variétés M_4 cherchées sont de deux espèces; les unes sont représentables d'une manière biunivoque et bicontinue sur le premier continuum naturel de rayons; les autres sur le second.

La variété M_4 la plus simple de la première espèce peut être construite de la manière suivante. On prend dans un espace E_8 une multiplicité plane E_2 et une multiplicité plane E_5 n'ayant aucun point commun, et l'on considère dans E_5 une surface normale non réglée du quatrième ordre (*voir* n° 37). On établit entre cette surface et E_2 une relation corrélative de manière qu'à chaque point de la surface corresponde une droite de E_2 et à chaque point de E_2 une conique de la surface normale. Les droites dépendant de trois paramètres, qui joignent tous les couples de points correspondants, engendrent la variété cherchée M_4, qui est d'ordre 6 et de classe 3. Les points de E_2 sont les images des rayons-points ([123]).

([120]) E. Study, *Geometrie der Dynamen*, p. 259, 270.

([121]) On peut démontrer qu'il n'existe pas d'autre continuum naturel de rayons, de sorte que les deux continuums indiqués sont parfaitement caractérisés par le groupe G_{27} des rayons propres. Au contraire, le corps des ∞^4 faisceaux de parallèles « propres » peut de *quatre* manières différentes être complété par l'adjonction de faisceaux impropres de manière à former un continuum fermé, dans lequel les opérations du groupe fondamental soient partout bien définies, uniformes et continues [(*voir* n° 22 et note ([125])].

([122]) E. Study, *Geometrie der Dynamen*, p. 309 (§ 29 et 36).

([122 bis]) Il n'est pas postulé que cette correspondance rationnelle entre M_4 et la variété des rayons soit birationnelle, mais le résultat obtenu montre qu'il en est effectivement ainsi.

([123]) On peut généraliser cette génération en remplaçant la surface du 4e ordre par une surface d'ordre n^2 de l'espace à $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensions, à savoir celle qu'on obtient en regardant les coefficients de l'équation d'une courbe plane algébrique de $n^{\text{ième}}$ classe comme des coordonnées homogènes d'un point et en cherchant le lieu des points qui correspondent aux courbes planes formées d'un point n—uple. On obtient ainsi une série de variétés algébriques à quatre dimensions qui admettent un groupe à n^2+2n+9 paramètres de transformations birationnelles. Le premier continuum naturel de rayons de

Les intersections de cette variété M_4^6 avec les plans E_7 sont les images des complexes quadratiques de rayons (qui dépendent de huit constantes); cette variété est par suite très commode pour l'étude de ces complexes et de leurs intersections mutuelles.

Si dans l'espace E_8 on fixe une multiplicité plane E_3 convenablement choisie, le groupe projectif à 17 paramètres de M_4^6 se réduit à un groupe à 7 paramètres qui est isomorphe holoédrique au groupe des transformations par similitude; de plus les figures situées dans E_3 sont échangées entre elles par un groupe qui est semblable, par une transformation projective, au groupe des transformations par similitude. La géométrie métrique de l'espace occupe donc par rapport à la géométrie projective radiale une position analogue à celle de la géométrie projective de la droite par rapport à celle du plan; autrement dit la première peut être regardée comme une section de la seconde.

Si l'on prend pour élément générateur de l'espace le faisceau de rayons parallèles, ou encore la « congruence de chaînes aplanaire » (c'est-à-dire la chaîne à deux dimensions du type le plus général) ([124]), on peut aussi établir des images projectives du nouveau groupe fondamental qui transforme ces éléments. Dans le premier cas, les ∞^4 faisceaux de parallèles correspondent d'une manière biunivoque et bicontinue aux différents points (autres que le sommet) d'un cône normal Γ_4^6 de E_8 ([125]). Dans le second cas, les ∞^8 congruences de chaînes aplanaires correspondent aux points situés à distance finie d'un espace E_8. Ces représentations mettent en évidence de nouvelles analogies entre la géométrie euclidienne et la géométrie projective radiale.

La variété M_4 la plus simple de la seconde espèce, c'est-à-dire représentable d'une manière univoque et continue sur le second continuum naturel de rayons, appartient à un espace E_{17} ([126]).

E. Study est le deuxième terme de cette série; le premier terme n'est autre que le continuum des droites de J. Plücker; les groupes correspondants sont le groupe des projectivités radiales et le groupe affine de E_3 (un plan invariant).

([124]) Toute congruence de chaînes aplanaire résulte d'un réseau de rayons non parallèles par une collinéation duale. Les normales communes entre deux rayons de la congruence appartiennent à une deuxième congruence de la même espèce, et cette propriété est caractéristique des congruences de chaînes aplanaires. Il y a ∞^8 couples de congruences aplanaires.

([125]) Comme les points autres que le sommet du cône normal Γ_4^6 forment un continuum fermé quand on leur adjoint le sommet lui-même, on en déduit la possibilité de fermer le continuum des faisceaux de parallèles par l'adjonction d'un seul faisceau de parallèles impropre ou « singulier ». On obtient ainsi ce que E. Study appelle le premier continuum naturel de faisceaux de parallèles.

([126]) E. STUDY, *Geometrie der Dynamen*, p. 272.

23. La géométrie projective des somas. — E. Study donne le nom de *soma* ([127]) à un système d'axes rectangulaires, considéré comme invariablement lié à un corps solide. Les somas dépendent de six paramètres. On appelle *parallèles* deux somas qui se déduisent l'un de l'autre par une translation, *symétraux* deux somas qui se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'un angle π, *hémisymétraux* ([128]) deux somas qui se déduisent l'un de l'autre par un déplacement hélicoïdal dont l'angle de rotation est π. On peut prendre pour coordonnées d'un soma les paramètres du déplacement qui permet de passer d'un soma fixe (protosoma) au soma donné. On peut définir ce déplacement au moyen de quatre paramètres duals, généralisation des paramètres d'Olinde Rodrigue pour une rotation autour d'un point fixe; soient

$$X_0 = x_0 + x_{123}\varepsilon, \qquad X_1 = x_{01} + x_{23}\varepsilon,$$
$$X_2 = x_{02} + x_{31}\varepsilon, \qquad X_3 = x_{03} + x_{12}\varepsilon.$$

Ces paramètres sont définis à un facteur dual près non diviseur de zéro. De plus, l'un d'eux au moins n'est pas un diviseur de zéro.

D'après cela on peut établir une correspondance univoque entre les points réels d'un E_3 dual et les somas réels. La notion de soma réel peut aussi être regardée comme la généralisation formelle de la notion de *rayon réel*.

Le groupe à trente paramètres des transformations projectives de l'espace E_3 dual peut par suite être regardé comme un groupe de transformations des somas réels : on l'appelle le groupe projectif dual des somas. En le composant avec les transformations homothétiques on obtient un groupe continu à trente et un paramètres dont les transformations effectuées sur les somas, sont partout bien définies, uniformes et continues. E. Study leur donne le nom de *collinéations somatiques* ([129]).

Le G_{30} des transformations projectives duales des somas est un sous-groupe invariant du G_{31} des transformations projectives somatiques. Le groupe G_{31} a encore deux autres sous-groupes continus invariants à seize et quinze paramètres : ils transforment tout soma en un soma parallèle, de plus ils transforment l'ensemble des somas parallèles entre

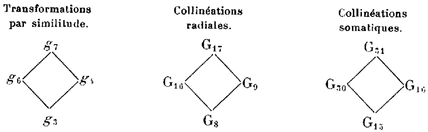
---

([127]) E. STUDY, *Geometrie der Dynamen*, p. 556. *Dans une série de travaux, où n'intervient du reste pas la notion de groupe (*Arch. Sc. phys. et nat.*, Genève, t. 5, 1898, p. 497; *C. R. Acad. Sc.*, t. 133, 1901, p. 1193; *Arch. Sc. phys. et nat.*, Genève, t. 21, 1906, p. 134, 262; *Mémoires Soc. Phys. et Hist. nat.*, Genève, t. 36, 1910, p. 211), R. de Saussure introduit la notion équivalente de *feuillet*; un feuillet est la figure formée d'un point, d'une droite passant par ce point et d'un plan contenant la droite; il y a une correspondance univoque entre les feuillets et les trièdres trirectangles.*

([128]) **Opposés*, d'après R. de Saussure ([127]).*

([129]) E. STUDY, *Geometrie der Dynamen*, p. 561.

eux par une homothétie ou une translation. Le groupe G_{13} est l'intersection de G_{30} et de G_{16} et est formé de transformations échangeables entre elles (translations projectives duales des somas). L'analogie de structure des trois groupes des transformations par similitude, des collinéations radiales et des collinéations somatiques est mise en évidence par les schémas suivants :



On peut aussi considérer deux couches de somas et faire subir aux somas de deux couches différentes des transformations projectives duales contragrédientes. On est ainsi amené, comme dans la géométrie projective radiale, à distinguer les collinéations et les corrélations somatiques, les collinéations et les corrélations duales, etc. Pour le groupe général des *projectivités somatiques* on a le théorème fondamental :

Les projectivités somatiques conservent le parallélisme de deux somas de la même couche et le symétralisme ainsi que l'hémisymétralisme de deux somas de couches différentes.

Les familles analytiques (réelles) de somas dépendant de r paramètres ($r < 6$) sont les images géométriques des systèmes irréductibles d'équations analytiques susceptibles d'être vérifiées par un corps solide à r degrés de liberté. De là résulte l'importance cinématique de la géométrie projective somatique.

L'ensemble des ∞^6 somas ne constitue pas un continuum fermé. Mais il est possible de définir des éléments impropres, ou *parasomas*, dépendant de quatre paramètres et constituant avec les somas propres un continuum fermé. On peut aussi choisir de nouvelles coordonnées (coordonnées de deuxième espèce) grâce auxquelles le parasoma est défini analytiquement d'une manière analogue à celle du rayon-point dans la géométrie projective radiale. Ces coordonnées sont au nombre de dix, à savoir les quatre quantités

$$x_0, \quad x_{01}, \quad x_{02}, \quad x_{03},$$

et les six déterminants formés avec le tableau

$$\begin{Vmatrix} x_0 & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{123} & x_{23} & x_{31} & x_{12} \end{Vmatrix};$$

on obtient le même soma en multipliant les quatre premières coordonnées par un même facteur et les six dernières par ce facteur élevé au carré. On obtient ainsi dix coordonnées liées par certaines relations. Les parasomas s'obtiennent en donnant aux quatre premières coordonnées la valeur zéro, les six autres non toutes nulles étant telles que les relations précédentes soient vérifiées.

Les éléments du continuum fermé formé par les somas et les parasomas peuvent être représentés d'une manière biunivoque sur les points d'une variété M_6 d'un espace E_{15}, de manière que par cette représentation le groupe G_{31} devienne un groupe projectif de M_6. Les parasomas sont représentés par les points d'une variété M_4^2 contenue dans M_6. Si l'on ne considère que les parasomas, la géométrie projective somatique se réduit à la géométrie projective réglée de l'espace E_3. Ces considérations s'étendent à la géométrie projective duale d'un espace E_n quelconque.

24. La géométrie pseudoconforme des somas. — La géométrie pseudoconforme des somas fait intervenir, outre les somas, des éléments impropres distincts des parasomas, appelés *pseudosomas* et constituant avec les somas un nouveau continuum fermé. Dans cette géométrie on choisit, ce qui est toujours possible, parmi toutes les coordonnées duales d'un soma, celles pour lesquelles on a la relation

$$(1) \qquad x_0 x_{123} + x_{01} x_{23} + x_{02} x_{31} + x_{03} x_{12} = 0 \quad [130].$$

Un soma peut donc être regardé comme défini par huit coordonnées homogènes réelles liées par la relation quadratique précédente; on obtient les pseudosomas en supposant les parties scalaires x_0, x_{01}, x_{02}, x_{03} toutes nulles. Les transformations *pseudoconformes* [131] des somas sont définies par E. Study comme les transformations linéaires effectuées sur les huit variables et laissant invariante l'équation (1). Ces transformations pseudoconformes forment un groupe mixte à vingt-huit paramètres dont le sous-groupe continu G_{28} est simple. C'est le groupe d'une quadrique non dégénérescente de l'espace E_7.

L'ensemble des transformations des somas qui sont à la fois projectives et pseudoconformes, forme un groupe mixte G_{13}, H_{13} à treize paramètres; il se compose de toutes les transformations de G_{31} qui respectent la coïncidence des somas de couches différentes; il joue par rapport à G_{31}

[130] *Cf.* R. Bricard, *Nouv. Ann. Math.*, (4), t. 10, 1910, p. 1.*

[131] Ces transformations sont appelées pseudoconformes parce que la géométrie dont ces transformations constituent le groupe fondamental a au fond pour objet, de même que la géométrie conforme, l'étude d'une quadrique dans un espace supérieur.

un rôle analogue à celui du groupe G_7 des transformations par similitude par rapport au groupe G_{17} des projectivités radiales.

Les transformations projectives duales contenues dans G_{13}, H_{13} forment un groupe mixte G_{12}, H_{12}; ce sont les transformations *orthogonales* des somas; elles reproduisent, à un facteur dual près, la forme quadratique duale

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2.$$

Le groupe continu G_{12} est décomposable en deux groupes G_6, G'_6 échangeables entre eux; le premier coïncide avec le groupe des déplacements euclidiens, quand on choisit le soma réel pour élément générateur de l'espace.

25. Transformations de contact. Groupes finis et continus de transformations de contact. — On a déjà signalé des groupes de transformations de contact, à propos de la géométrie des sphères orientées [n° **13**] et de la géométrie de direction [n° **14**].

Dans l'espace E_3, S. Lie appelle *élément de surface* l'ensemble d'un point (x, y, z) et d'un plan

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0$$

passant par ce point. Une *transformation de contact* ([132]) est une transformation portant sur les éléments de surface et laissant invariante l'équation de Pfaff

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Cette équation exprime que les deux éléments de surface infiniment voisins

$$(x, y, z, p, q) \quad \text{et} \quad (x+dx, y+dy, z+dz, p+dp, q+dq)$$

sont *unis*, c'est-à-dire que le plan du premier élément contient le point du second élément (ou inversement). On appelle *multiplicité de contact* toute multiplicité continue d'éléments de surface telle que chacun de ses éléments soit uni avec tout autre élément infiniment voisin. Toute

([132]) S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. 2, Leipzig, 1890, p. 47/9; S. Lie et G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen* t. 1, Leipzig, 1896, p. 647. S. Lie est arrivé à la notion de transformation de contact en généralisant les idées de J. Plücker sur les transformations avec changement des éléments générateurs de l'espace, et en partant soit d'une « aequatio directrix »

$$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

soit de deux ou de trois de ces équations.

transformation de conctact change donc une multiplicité quelconque de contact en une autre multiplicité de contact. Les multiplicités de contact à une dimension sont formées :

— ou bien d'un point et de ∞^1 plans passant par ce point, c'est-à-dire des plans d'un faisceau ou des plans tangents à un cône ayant ce point pour sommet;

— ou bien des points d'une courbe et plans tangents en ces points à une surface développable circonscrite à la courbe.

Les multiplicités de contact à deux dimensions sont formées :

— ou bien d'un point et des plans passant par ce point;

— ou bien des points d'une courbe et des plans tangents à la courbe en tous ces points;

— ou bien des points d'une surface et des plans tangents en ces points à la surface.

Si l'on porte son attention sur le support ponctuel, c'est-à-dire sur le lieu géométrique des points des éléments d'une multiplicité de contact à deux dimensions, on voit qu'une tranformation de contact pourra transformer un point en un point, une courbe ou une surface. Si une transformation de contact transforme un point quelconque en un autre point, elle peut être regardée comme une transformation ponctuelle prolongée; réciproquement toute transformation ponctuelle peut être prolongée en une transformation de contact et tout groupe de transformations ponctuelles peut être prolongé en un groupe de transformations de contact.

Il existe des groupes de transformations de contact qui ne peuvent pas, par une autre transformation de contact, être transformés en un groupe de transformations ponctuelles. S. Lie les appelle groupes *irréductibles* et c'est sur eux que se concentre, dans cette théorie, l'intérêt principal ([133]).

Les considérations précédentes s'étendent à un espace E_{n+1} quelconque; une transformation de contact dans cet espace ([134]) est une transformation aux $2n+1$ variables

$$z, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n,$$

([133]) S. Lie et F. Engel, *Transformationsgruppen*, t. 2 (sections 4 et 5).

([134]) S. Lie et F. Engel, *Transformationsgruppen*, t. 2, p. 114 (pour $n=2$, p. 6); S. Lie et G. Scheffers, *Berührungstransformationen*, t. 1, p. 114 (pour $n=2$, p. 43).

laissant invariante l'équation de Pfaff

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n = 0.$$

Dans le plan tout groupe fini et continu irréductible de transformations de contact est à six, sept ou dix paramètres; dans chacun de ces trois cas tous les groupes sont réductibles l'un à l'autre par une transformation de contact. On peut choisir un représentant de chacun des trois types de manière que les deux premiers soient des sous-groupes du dernier. Le groupe à dix paramètres est le plus grand groupe de transformations de contact du plan qui laisse invariante l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

et, par suite, laisse invariant l'ensemble des paraboles d'axes parallèles à Oy (135); on peut aussi prendre pour représentant du même type le groupe de la géométrie des cycles de Lie qui change les cycles en cycles (136).

Dans le plan on n'obtient ainsi aucun groupe essentiellement nouveau. Dans l'espace E_{n+1} les trois types précédents se retrouvent généralisés (133), le groupe à dix paramètres du plan devenant un groupe à $(n+1)(2n+3)$ paramètres; considérés comme groupe de transformations ponctuelles de l'espace E_{2n+1}, ils sont caractérisés par la propriété que les ∞^{2n-1} éléments linéaires issus d'un point arbitraire et qui satisfont à l'équation de Pfaff

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0$$

soient échangés entre eux de la manière la plus générale possible, c'est-à-dire suivant un groupe projectif à $n(2n+1)$ paramètres. On peut d'ailleurs établir une correspondance entre les éléments de surface de E_{n+1} et les points d'un espace E_{2n+1} de manière qu'à deux éléments de surface infiniment voisins unis de E_{n+1} correspondent deux points infiniment voisins de E_{2n+1} reliés par une droite appartenant à un complexe linéaire fixe et qu'à toute transformation de contact des groupes considérés de E_{n+1} corresponde une transformation *projective* de E_{2n+1}, laissant invariant le complexe linéaire considéré. On obtient ainsi le groupe projectif d'un complexe linéaire de E_{2n+1} et deux de ses sous-groupes. Cette correspondance existe dans le domaine complexe et dans le domaine réel.

Pour $n > 1$ il existe d'autres types de groupes de transformations de contact irréductibles que les précédents; quelques-uns de ceux de l'espace E_3 ont été déterminés par G. Scheffers (137), F. Engel (137a) et C. W. Oseen (137b). Il sera question plus loin des groupes infinis.

(135) *Ce groupe est lié d'une manière simple au groupe projectif d'un complexe linéaire de E_3. *Voir* G. F. Gundelfinger, *Amer. J. Math.*, t. 33, 1911, p. 153; *Cf.* J. Eiesland, *Amer. J. Math.*, t. 26, 1904, p. 103.*

(136) Sur les groupes irréductibles *réels* du plan, *voir* F. Engel, *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 44, 1892, p. 292. *Cf.* note (102).

26. Géométrie projective des éléments du second ordre du plan. — L'élément de courbe, dont la considération est fondamentale dans la théorie des transformations de contact, peut être regardé comme l'ensemble de toutes les courbes analytiques qui passent par un point donné, sont régulières en ce point et y admettent une tangente donnée. On peut, avec E. Study (138), appeler *élément propre du second ordre* l'ensemble de toutes les courbes analytiques passant par un point donné, régulières en ce point, ayant entre elles un contact du second ordre, mais n'ayant avec leur tangente commune qu'un contact du premier ordre. Un élément du second ordre peut être représenté analytiquement par quatre quantités

$$x,\quad y,\quad y',\quad y''.$$

Deux éléments du second ordre infiniment voisins sont dits *unis* s'ils satisfont aux deux équations de Pfaff

$$(1)\qquad dy - y'\,dx = 0,$$
$$(2)\qquad dy' - y''\,dx = 0.$$

Tout ensemble continu d'éléments du second ordre dépendant d'un paramètre et tel que deux éléments infiniment voisins quelconques de l'ensemble soient unis est formé ou bien des éléments du second ordre d'une courbe, ou bien des éléments du second ordre qui correspondent à un élément du premier ordre (x, y, y') fixe.

Les coordonnées homogènes (X_1, X_2, X_3) du point fixe et les coordonnées (U_1, U_2, U_3) de la tangente fixe qui interviennent dans l'élément du second ordre, sont définies à des facteurs de proportionnalité près.

(137) G. Scheffers, *Acta math.*, t. 14, 1891, p. 111.

(137a) F. Engel, *C. R. Acad. Sc.*, t. 116, 1893, p. 786; S. Lie et F. Engel, *Transformationsgruppen*, t. 3, p. 763.

(137b) C. W. Oseen, *Öfversigt Vetensk.-Akad. förhandl.* (Stockholm), t. 58, 1901, p. 307; *Ueber die endlichen, kontinuierlichen, irreduziblen Berührungstransformationsgruppen im Raume*, Diss. Lund, 1901.

(138) *Die Elemente 2. Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie* (*Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 53, 1901, p. 338).

On a entre ces six quantités la relation

$$U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0.$$

On peut établir entre les deux facteurs de proportionnalité qui restent indéterminés une relation telle que le système des équations (1) et (2) soit équivalent au système

$$U_1\,dX_1 + U_2\,dX_2 + U_3\,dX_3 = 0, \tag{3}$$

$$\frac{U_1(U_2\,dU_3 - U_3\,dU_2)}{X_1(X_2\,dX_3 - X_3\,dX_2)} = \frac{U_2(U_3\,dU_1 - U_1\,dU_3)}{X_2(X_3\,dX_1 - X_1\,dX_3)} = \frac{U_3(U_1\,dU_2 - U_2\,dU_1)}{X_3(X_1\,dX_2 - X_2\,dX_1)} = 1. \tag{4}$$

Le facteur de proportionnalité dont dépendent les X étant fixé, le facteur de proportionnalité dont dépendent les U est déterminé à une racine cubique près de l'unité ([139]). Si l'on se donne une des trois déterminations de cette racine cubique, on définit analytiquement un *élément orienté du second ordre*. A un élément du second ordre (x, y, y', y'') donné correspondent donc trois éléments du second ordre orientés; si x, y, y', y'' sont réels, un seul de ces éléments orientés est réel.

E. Study complète l'ensemble des éléments propres du second ordre par l'adjonction des éléments impropres

$$(X_1, X_2, X_3, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad (0, 0, 0, U_1, U_2, U_3),$$

qui sont les points et les droites. Tous ces éléments, propres et impropres, forment un continuum fermé. Il y a d'ailleurs d'autres procédés pour compléter l'ensemble des éléments propres par l'adjonction d'éléments impropres de manière à obtenir un continuum fermé.

La forme des équations (4) montre facilement que si l'on représente une transformation projective du plan par une substitution linéaire de déterminant 1 effectuée sur X_1, X_2, X_3, on aura l'élément du second ordre transformé de l'élément

$$(X_1, X_2, X_3, U_1, U_2, U_3)$$

en effectuant sur U_1, U_2, U_3 la substitution linéaire contragrédiente de la première. On aura ainsi l'expression analytique du groupe g_8 de la géométrie projective du plan, lorsqu'on prend comme élément générateur

([139]) On a

$$U_i = J^{-\frac{3}{2}}(CX)X_i,$$

où $(CZ)^2 = 0$ est l'équation ponctuelle d'une conique admettant l'élément du second ordre donné et où J est l'invariant de cette conique.

l'élément orienté du second ordre. A ce groupe g_8 E. Study adjoint le groupe mixte γ_8 dont la transformation la plus générale s'obtient en effectuant d'abord une transformation de g_8 et ensuite en multipliant U_1, U_2, U_3 par une même racine cubique de l'unité.

Si l'on regarde X_1, X_2, X_3, U_1, U_2, U_3 comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace E_5, il y a une correspondance biunivoque entre les éléments orientés du second ordre, propres et impropres, et les points de la quadrique

$$U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0$$

de E_5. Au groupe g_8 du plan correspond de plus dans E_5, un groupe projectif isomorphe holoédrique et laissant invariante la quadrique. On peut aussi regarder X_1, X_2, X_3, U_1, U_2, U_3 comme les coordonnées plückériennes d'une droite de l'espace E_3 : il y a alors correspondance biunivoque entre les éléments orientés du second ordre, propres et impropres du plan, et les droites de E_3. Aux éléments impropres

$$(X_1, X_2, X_3, 0, 0, 0)$$

correspondent les droites issues d'un point fixe O de E_3 ; aux éléments impropres

$$(0, 0, 0, U_1, U_2, U_3)$$

correspondent les droites situées dans un plan fixe Π de E_3. Au groupe g_8 du plan correspond un groupe projectif de E_3 laissant invariants le point fixe O et le plan fixe Π; on peut toujours supposer que ce groupe projectif est le groupe linéaire et homogène spécial, qui trouve ainsi une interprétation nouvelle dans le plan.

E. Study s'est proposé et a résolu le problème général suivant : Déterminer toutes les multiplicités ponctuelles M_4 d'un espace quelconque E_n jouissant des propriétés suivantes :

1° Les coordonnées projectives d'un point arbitraire de M_4 sont des fonctions rationnelles entières des coordonnées X_i, U_i d'un élément orienté propre du second ordre;

2° La correspondance établie ainsi entre les éléments du second ordre et les points de M_4 doit transformer le groupe g_8 en un groupe projectif isomorphe de E_n.

Il n'est pas exigé que la représentation soit biunivoquement inversible : elle peut l'être; il peut aussi arriver qu'il y ait une correspondance biunivoque entre les points de M_4 et les éléments non orientés du second ordre. En tous les cas la connaissance d'une multiplicité M_4 fournira un procédé pour introduire les éléments impropres de nature à fournir avec les éléments propres un continuum fermé.

La plus simple des représentations satisfaisant aux propriétés précédentes est celle qui a été indiquée plus haut.

E. Study introduit encore dans la théorie des éléments du second ordre un groupe g_9 qui se déduit de g_8 par la composition avec le groupe g_1 à un paramètre défini par les équations

$$\overline{X}_i = \sqrt[3]{\sigma}\,X_i, \qquad \overline{U}_i = \sqrt[3]{\tau}\,U_i,$$

où $\sqrt[3]{\frac{\sigma}{\tau}}$ désigne le paramètre. Il adjoint de même un groupe γ_9 à γ_8 ; g_8 et γ_8 sont des sous-groupes invariants de g_9 et γ_9.

*La théorie précédente pourrait s'étendre à un espace E_n quelconque. Dans l'espace E_3 l'élément propre à considérer serait défini comme l'ensemble des surfaces analytiques qui passent par un point donné, sont régulières en ce point et ont même plan tangent et même courbure totale (différente de zéro). Ces éléments dépendent de six paramètres ; à chacun d'eux on peut faire correspondre quatre éléments orientés dépendant d'une racine quatrième de l'unité. Tout élément orienté est défini analytiquement par huit coordonnées

$$(X_1, \ldots, X_4 ; U_1, \ldots, U_4)$$

liées par la relation

$$U_1 X_1 + \ldots + U_4 X_4 = 0 \quad (^{140})^*.$$

27. Groupe des transformations de Cremona. — On appelle transformation birationnelle, ou de Cremona, une transformation telle que les variables transformées soient des fonctions rationnelles des variables primitives et réciproquement. Les seules transformations birationnelles de la droite, c'est-à-dire à une variable, sont les transformations projectives. Dans l'espace E_n (où $n \geqq 2$), il existe au contraire beaucoup de transformations birationnelles non projectives ([141]). Toutes ces transformations forment un groupe qui ne dépend pas d'un nombre fini de

([140]) Il existe des généralisations plus complètes aux éléments d'ordre supérieur du plan et aux éléments du second ordre de l'espace, dues à F. Engel, *Ber. Ges. Lpz.* (math.) t. 45, 1893, p. 468 ; t. 54, 1902, p. 17. **Voir* aussi : G. Spitz, *Zur Theorie der Elemente höherer Ordnung in der Ebene und im Raume*, Diss. Leipzig, 1912.*

([141]) Dans le plan, les plus simples de ces transformations, à savoir les transformations quadratiques, ont été considérées déjà par L. I. Magnus ; les transformations circulaires de A. F. Möbius ([73]) appartiennent à ce type. Les transformations les plus générales du plan ont été étudiées pour la première fois par L. Cremona [*Memorie Ist. Bologna*, (2),

paramètres, mais qui n'est pas non plus un groupe continu infini, au sens de S. Lie, parce qu'il ne peut pas être défini par un système d'équations différentielles et qu'il ne peut pas non plus être engendré par des transformations infinitésimales. Il contient d'ailleurs un grand nombre de sous-groupes continus.

Toute transformation birationnelle du plan, d'après un théorème énoncé presque simultanément par A. Cayley ([141]), W. K. Clifford ([142]), M. Nöther ([143]) et J. Rosanes ([144]), peut être regardé comme le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques. Ce n'est que plus tard que M. Nöther ([145]) a donné du théorème une démonstration examinant aussi le cas de points fondamentaux infiniment voisins ; cependant, comme l'a remarqué C. Segre ([146]), cette démonstration contient aussi une lacune ; G. Castelnuovo ([147]), par un procédé tout différent, a mis hors de doute la validité du théorème.

Pour $n \geqq 3$ on n'a pas encore abordé la question des transformations génératrices du groupe de Cremona.

La théorie des invariants du groupe des transformations de Cremona est loin d'être aussi avancée que pour les groupes précédents. On sait cependant que les transformations birationnelles laissent invariants les genres et les modules des multiplicités algébriques. Les transformations simplement algébriques jouissent toutefois de la même propriété, pourvu qu'elles soient uniformes sur les multiplicités considérées. On pourrait se demander s'il n'existe pas des propriétés des courbes, surfaces, etc. qui ne seraient invariantes que vis-à-vis des transformations birationnelles *dans tout l'espace*. Mais on ne s'est à cet égard livré à aucune recherche systématique.

On sait cependant que les groupes continus et finis de transformations de Cremona laissent invariants des systèmes linéaires de variétés M_{n-1}.

t. 2, 1862, p. 621 ; (2), t. 5, 1865, p. 3 ; reproduit *Giorn. mat.*, (1), t. 1, 1863, p. 305 ; (1), t. 3, 1865, p. 269 et 363]. Pour l'espace, *voir* L. Cremona [*Nachr. Ges. Gött.*, 1871, p. 129 ; reproduit *Math. Ann.*, t. 4, 1871, p. 213 ; *Reale Ist. Lombardo Rend.*, (2), t. 4, 1871, p. 269, 315 ; *Ann. mat. pura appl.*, (1), t. 5, 1871, p. 213] ; *voir* aussi : A. Cayley [*Proc. London math. Soc.*. (1), t. 3, 1869/71, p. 127 ; Papers 7, Cambridge, 1894, p. 189] et M. Nöther (*Math. Ann.*. t. 3, 1871, p. 547).

([142]) Le théorème est énoncé sans démonstration dans : *Analysis of Cremona's transformations*, qui se trouve dans le supplément de W. K. Clifford (Papers, Londres, 1882, p. 542).

([143]) *Nachr. Ges. Gött.*, 1870, p. 1 ; *Math. Ann.*, t. 3, 1871, p. 161 et, en partic., p. 167.

([144]) *J. Reine Angew. Math.*, t. 73, 1871, p. 97.

([145]) *Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 635.

([146]) *Atti Accad. Torino*, t. 36, 1900/1, p. 645.

([147]) *Id.*, p. 861.

A la géométrie du groupe de Cremona appartient la *classification des involutions de l'espace* E_n, c'est-à-dire la détermination de tous les types de systèmes de ∞^n groupes de k points, tels qu'un point de l'espace E_n soit contenu dans un seul groupe du système : deux involutions étant dites d'un même type lorsqu'elles peuvent être transformées l'une dans l'autre par une transformation de Cremona.

Ces types sont connus seulement pour $n = k = 2$, c'est-à-dire pour les involutions de couples de points dans le plan. Il y a alors *trois* types :

a. Involutions de couples de points appartenant aux droites d'un faisceau;

b. Involution des couples des points d'intersection des courbes du troisième ordre passant par sept points fixes;

c. Involution des couples qui présentent une seule condition au passage des courbes du sixième ordre ayant huit points fixes.

Ces types ont été déterminés par E. Bertini ([147a]) avec certaines limitations que l'on a reconnu plus tard n'être pas nécessaires.

Dans le plan, toutes les involutions d'un degré quelconque k, sont *rationnelles*, en sorte que le système des groupes d'une involution peut être représenté birationnellement sur le système des points d'un plan ([147b]).

Dans l'espace E_3 à trois dimensions, on connaît un exemple d'involution *irrationnelle*, c'est-à-dire ne pouvant pas être représentée sur E_3 lui-même ([147c]).

On pourrait enfin entreprendre une théorie des invariants de certaines formes différentielles, ou de certains systèmes différentiels, vis-à-vis des transformations birationnelles (ou algébriques) ([148]). Cette théorie se relie à la classification des transcendantes définies par ces systèmes différentiels ([149]).

28. Groupes finis et continus de transformations de Cremona; leur représentation projective. — Dans chaque espace E_n il existe un grand nombre de groupes finis et continus de transformations de Cremona;

([147a]) *Ann. mat. pura appl.*, (2), t. 8, 1877, p. 11; *Reale Ist. Lombardo Rend.*, (2), t. 13, 1880, p. 443.

([147b]) G. Castelnuovo, *Atti R, Accad. Lincei Rend. Mat.*, (5), t. 2, II, 1893, p. 205; *Math. Ann.*, t. 44, 1894, p. 125.

([147c]) F. Enriques, *Atti R. Accad. Lincei Rend. Mat.*, (5), t. 21, I, 1912, p. 81; G. Fano, *Atti R. Accad. Torino*, t. 43, 1908.

([148]) F. Klein, *Höhere Geometrie*, t. 1, p. 447 et suiv.

([149]) *Voir* A. Voss, *Math. Ann.*, t. 23, 1884, p. 157 et 349.

citons, parmi les plus simples, le groupe projectif et le groupe conforme. Si une variété M_n d'un espace E_d (où $d > n$) admet un groupe continu projectif et si elle est *rationnelle* (c'est-à-dire représentable d'une manière biunivoque sur un espace E_n), le groupe projectif de M_n devient par cette représentation un groupe fini et continu de Cremona de l'espace E_n.

La réciproque est vraie. Étant donné un groupe fini et continu de transformations de Cremona, il existe une infinité de systèmes linéaires de formes (M_{n-1}) :

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_d f_d = 0,$$

qui sont invariants par toutes les opérations du groupe : il suffit pour cela de considérer le plus petit système linéaire qui contient une variété M_{n-1} et toutes celles qui s'en déduisent par les opérations du groupe. Parmi ces systèmes invariants il y en a toujours (si $d > n$) qui sont *simples*, c'est-à-dire tels que les variétés du système linéaire qui contiennent un point *arbitraire* de l'espace E_n n'ont en commun aucun autre point *variable*. Les équations

$$y_i = f_i$$

dans lesquelles les y_i sont les coordonnées homogènes d'un point de l'espace E_d, définissent une représentation biunivoque de l'espace E_n sur une variété M_n de l'espace E_d; et le groupe donné de transformations de Cremona de l'espace E_n devient, par cette représentation, un groupe birationnel de la variété M_n qui échange entre elles les sections planes de cette variété; en d'autres termes il devient un groupe projectif de l'espace E_d laissant la variété M_n invariante. *Tout groupe fini et continu de transformations de Cremona d'un espace* E_n *peut donc être regardé comme un groupe projectif d'une variété* M_n *d'un espace convenablement choisi* E_d ([150]).

Il résulte de ce qui précède qu'étant donnée une géométrie dont le groupe fondamental est un groupe fini et continu de Cremona, on peut toujours attribuer à l'espace un nombre suffisant de dimensions de manière à faire rentrer cette géométrie dans la catégorie des *géométries projectives*. C'est le cas pour toutes les géométries mentionnées précédemment.

On connaît tous les groupes finis et continus de transformations de Cremona du plan et de l'espace. Ceux du plan ont été ramenés par

([150]) *Cf.* les Mémoires de G. Fano indiqués notes ([153]), ([154]) et ([155]).

F. Enriques ([151]) à *trois* types, à savoir :

a. Le groupe homographique à huit paramètres ;

b. Le groupe à six paramètres des transformations quadratiques à deux points fondamentaux fixes ; en rejetant ces points aux points circulaires à l'infini, le groupe se confond avec le groupe des transformations directes par rayons vecteurs réciproques ([152]) ;

c. Les groupes de de Jonquières qui laissent invariants un faisceau de droites et en même temps un système de courbes d'ordre m admettant le sommet du faisceau de droites pour point multiple d'ordre $m-1$, les tangentes en ce point multiple étant fixes.

Tout autre groupe de Cremona du plan se ramène, par une transformation birationnelle, soit à un des groupes précédents, soit à un de ses sous-groupes.

F. Enriques est arrivé aux résultats précédents en construisant un système linéaire de courbes algébriques invariant par rapport au groupe et en considérant les systèmes adjoints successifs, qui lui sont liés d'une manière invariante. Ce procédé ne peut pas, dans l'état actuel de la théorie des surfaces, se généraliser pour l'espace E_3 ; mais la construction d'un système linéaire invariant de surfaces permet de remplacer le groupe de Cremona par un groupe projectif isomorphe laissant invariante une variété M_3. Le problème est ainsi ramené à la classification des groupes projectifs laissant invariante une variété M_3.

D'après F. Enriques et G. Fano ([153]), tout groupe fini et continu de transformations de Cremona de l'espace E_3 peut, par une transformation birationnelle, être ramené à l'un des groupes suivants ou à l'un de ses sous-groupes :

a. Le groupe homographique à quinze paramètres ;

b. Le groupe conforme à dix paramètres ;

c. Les groupes de de Jonquières généralisés : ce sont des groupes qui laissent invariant un faisceau de plans ou un réseau de droites ;

d. Deux groupes simples à trois paramètres de transformations du troisième et du septième ordre.

([151]) *Atti R. Accad. Lincei Rend.*, (5), t. 2, I, 1892, p. 468, 532.

([152]) Ce groupe est l'une des deux familles continues de transformations qui constituent le groupe total des rayons vecteurs réciproques du plan. *Cf.* n° 11, en part. la note ([73]).

([153]) F. Enriques et G. Fano, *Ann. mat. pura appl.*, (2), t. 6, 1897, p. 59.

G. Fano ([154]) a énuméré les différents groupes du cas *c* ; il a de plus élucidé et utilisé la relation entre les groupes de Cremona et les groupes projectifs ([155]).

M. Nöther ([156]) a énuméré les groupes continus de transformations quadratiques de l'espace ; il en existe cinq, avec leurs sous-groupes.

29. Énumération de quelques groupes infinis de transformations ponctuelles. — Parmi les groupes infinis de transformations ponctuelles nous signalerons les suivants :

a. Le groupe de toutes les transformations ponctuelles analytiques de l'espace E_n. — Toute transformation de ce groupe fait subir aux différentielles $dx_1, dx_2, \ldots,$ des variables une substitution linéaire ; autrement dit on peut au voisinage d'un point arbitraire, regarder une transformation analytique comme projective ; la théorie des invariants des substitutions linéaires se subordonne ainsi à la théorie des transformations analytiques les plus générales.

Une multiplicité analytique de l'espace E_n ne possède, en dehors de sa dimension, aucun invariant vis-à-vis du groupe considéré. Il en est autrement en général des expressions différentielles et des équations différentielles [expressions et équations de Pfaff, équations de Monge, équations aux dérivées partielles ([157])]. Une expression de Pfaff

$$\sum_{(i)} X_i\, dx_i$$

possède un « covariant bilinéaire »

$$\sum_{(i,k)} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) dx_i\, \delta x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

([154]) *Memorie Accad. Torino*, (2), t. 48, 1899, p. 221 (1898).

([155]) *Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 10, 1896, p. 1, 16 ; t. 11, 1897, p. 240 ; *Atti Accad. Torino*, t. 33, 1898, p. 480.

([156]) *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 5, 1896, p. 68.

([157]) L'interprétation géométrique des équations différentielles remonte à G. Monge [*Hist. Acad. Sc. Paris*, 1784 (éd. 1787) ; p. 502 ; *Application de l'analyse à la Géométrie*, 2e partie ; parue d'abord en 1re éd. sous le titre : *Feuilles d'analyse appliquée à la Géometrie*, Paris an III (éd. an IX) ; (3e éd.), Paris, 1807 ; (4e éd.), Paris, 1809 ; (5e éd.), revue par J. Liouville, Paris, 1850]. Ces questions ont été récemment traitées par G. Darboux [*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 1, Paris, 1887 ; t. 2, Paris, 1889 ; t. 3, Paris, 1894 ; t. 4, Paris, 1896 ; (2e éd.), t. 1, Paris, 1914] et S. Lie.

En ce qui concerne la théorie des invariants correspondants, *voir* F. Klein, *Höhere Geometrie*, t. 1 (autographié), Göttingue, 1892, p. 403/36 ; on trouvera dans ce dernier ouvrage des indications bibliographiques.

la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression de Pfaff soit une différentielle exacte est que ce covariant soit identiquement nul. Dans tous les cas l'expression de Pfaff possède, vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles générales, un invariant entier (caractère). Suivant que ce caractère est pair (égal à $2r$) ou qu'il est impair (égal à $2r+1$), l'expression peut se ramener à l'une ou l'autre des formes normales

$$z_{r+1}\,dz_1+z_{r+2}\,dz_2+\ldots+z_{2r}\,dz_r$$

ou

$$dz_0+z_{r+1}\,dz_1+\ldots+z_{2r}\,dz_r \quad (^{158}).$$

Une équation de Pfaff possède également un invariant entier r : elle peut alors se ramener à la forme normale

$$dz_0+z_{r+1}\,dz_1+z_{r+2}\,dz_2+\ldots+z_{2r}\,dz_r=0.$$

Il existe également des formes normales pour les systèmes de deux équations de Pfaff à quatre variables. Mais en général un système d'équations de Pfaff admet des invariants fonctions des variables.

La théorie des invariants d'une expression différentielle quadratique

$$\sum_{(i,\,k)} X_{ik}\,dx_i\,dx_k$$

n'est autre que la géométrie métrique sur la variété dont le ds^2 est représenté par cette expression [n° 35]. Dans le cas de deux variables, C. F. Gauss a trouvé un premier invariant, à savoir la courbure totale, qui s'exprime au moyen des coefficients de l'expression différentielle et de leurs dérivées ([159]). Les autres invariants se déduisent de celui-là au moyen de certaines opérations covariantes, définies par les paramètes différentiels $\Delta_1\Phi$ et $\Delta_2\Phi$ de E. Beltrami ([160]). La notion de courbure a été étendue par B. Riemann au cas de plusieurs variables, en particulier aux variétés géodésiques M_2 d'une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions ([161]). E.B. Christoffel et R. Lipschitz ont repris la question et se sont occupés de l'équivalence de deux expressions différentielles quadratiques ([162]): elle dépend de l'équivalence de certaines formes algébriques vis-à-vis du groupe linéaire général.

On pourrait également étudier les invariants d'une forme différentielle d'Hermite.

S. Lie et V. (W.) de Tannenberg ont effectué une classification des équations aux dérivées partielles du premier ordre vis-à-vis du groupe ponctuel général ([163]); *A. Tresse a résolu le même problème dans le plan pour les équations différentielles du second ordre ([164]).*

b. Le groupe des transformations ponctuelles qui conservent les volumes. — Ce groupe est formé des transformations pour lesquelles le déterminant fonctionnel des nouvelles variables par rapport aux anciennes est égal à ± 1. Il existe dans le domaine réel et dans le domaine complexe. Dans le domaine réel on l'appelle quelquefois *groupe de Möbius* ([165]); il peut être regardé comme le groupe fondamental de la *Géométrie des fluides incompressibles.* Ses transformations se partagent en deux familles suivant que le déterminant fonctionnel est égal à $+1$ ou à -1; la première forme un groupe continu infini. *Il est primitif et simple.* Ses transformations infinitésimales

$$Af=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sont définies par l'équation ([166])

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}=0.$$

([158]) G. Frobenius, *J. Reine Angew. Math.*, t. 82, 1876, p. 230; S. Lie, *Archiv for Math. og Naturvidenskab* (Christiana), t. 2, 1877, p. 338. *Voir* aussi : *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 48, 1896, p. 390.

([159]) *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (envoyé à l'Académie des Sciences de Göttingue en 1827) (*Comm. Soc. Gött. recent.*, t. 6, 1823/7, p. 99/146, mém. n° 6; *Werke*, t. 4, Göttingue, 1873, p. 217). La discussion de la forme différentielle ds^2 fournit les propriétés de la surface qui lui sont communes avec toutes les surfaces sur lesquelles elle est applicable. Les propriétés métriques de la surface ne sont fournies que si l'on considère en même temps que le ds^2, la forme différentielle qui, égalée à zéro, définit les lignes asymptotiques.

([160]) *Giorn. mat.*, (1), t. 2, 1864, p. 15, 33, 62, 228, 311 ou 377; (1), t. 3, 1865, p. 267, 297, 331, 355; *voir* en partic. t. 2, p. 355; *Opere*, t. 1, Milan, 1902, p. 107, en partic. p. 140 et suiv. E. Beltrami [*Memorie Ist. Bologna*, (2), t. 8, 1868, p. 549; *Opere*, t. 2, Milan, 1904, p. 74] a étendu la théorie au cas de n variables. Les paramètres différentiels, en coordonnées curvilignes orthogonales, se trouvent déjà dans G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Paris, 1859.

([161]) Cf. *Habilitationsschrift* ([63]), ainsi que le Mémoire couronné par l'Académie de Paris en 1861 [*Werke*, (1re éd.), Leipzig, 1876, p. 370; (2e éd.), Leipzig, 1892 (n° XXII, avec notes de H. Weber); trad. L. Laugel, Paris, 1898, p. 280].

([162]) E. B. Christoffel, *J. Reine Angew. Math.*, t. 70, 1869, p. 241; R. Lipschitz, *J. Reine Angew. Math.*, t. 70, 1869, p. 71; t. 71, 1870, p. 274, 288; t. 72, 1870, p. 1; t. 74, 1872, p. 116, 150; t. 78, 1874, p. 1.

([163]) *Nachr. Ges. Gött.*, 1872, p. 473.

([164]) *A. Tresse, *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre, $y''=\omega(x, y, y')$* (Mémoire couronné par la Société Jablonowski, Leipzig, 1896.)*

([165]) A. F. Möbius, *J. Reine Angew. Math.*, t. 12, 1834, p. 109; *Werke*, t. 1, Leipzig, 1885, p. 517.

([166]) *Voir*, pour le cas du plan, S. Lie, *Math. Ann.*, t. 24, 1884, p. 537, en partic. p. 561. *Voir* aussi : *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 47, 1895, p. 293.

Le groupe de Möbius est contenu comme sous-groupe invariant dans un groupe plus général, également étudié par A. F. Möbius ([165]) dans le cas du plan et de l'espace. Il est formé des transformations qui reproduisent les volumes à un facteur constant près (dépendant de cette transformation). Il peut être obtenu par la composition du premier groupe et des transformations homothétiques ([167]).

L. Bianchi ([167a]) parvint à ces groupes en les déduisant, par transformation, de groupes de transformations ponctuelles avec une forme différentielle quadratique invariante, à déterminant différent de zéro. Les groupes ∞^r holoédriquement isomorphes à des groupes de transformations proportionnelles non équivalentes doivent contenir un sous-groupe invariant ∞^{r-1}, dont les transformations correspondent aux transformations équivalentes.

W. Blaschke ([167b]) a représenté les droites de l'espace E_3, à trois dimensions, sur les couples de droites d'un plan, de façon que les congruences des droites normales à une surface aient pour image (à quelques exceptions près) les couples de points correspondants d'une transformation *proprement* équivalente (c'est-à-dire à déterminant $+1$).

Les trois groupes infinis dont il vient d'être question (le groupe général et les deux groupes de Möbius) jouissent d'une propriété caractéristique. S. Lie a en effet démontré le théorème suivant ([168]) :

Si un groupe infini de E_n est tel qu'il échange projectivement de la manière la plus générale possible les éléments linéaires issus d'un point arbitraire, ou bien c'est le groupe général des transformations ponctuelles de E_n, ou bien il est semblable au groupe qui conserve les volumes, ou bien il est semblable au groupe dont les transformations altèrent les volumes dans un rapport constant. Ces groupes sont tous primitifs. Si le groupe était fini, il serait semblable au groupe projectif, au groupe linéaire général ou au groupe linéaire spécial de E_n ([169]).

c. Les groupes continus infinis de transformations analytiques

([167]) K. Carda (*Monatsh. Math. Phys.*, t. 8, 1897, p. 170) a déterminé les transformations ponctuelles de E_3 qui laissent invariantes les aires des surfaces. Elles se réduisent aux déplacements et retournements.

([167a]) *Atti R. Accad. Torino*, t. 38, 1903, p. 596, 703.

([167b]) *Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 33, 1912, p. 247. *Voir* aussi : E. Study, *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie*, t. 1, Leipzig et Berlin, 1911, p. 119.

([168]) S. Lie, *Abh. Ges. Lpz.* (math.) t., 21, 1895, p. 61.

([169]) S. Lie, *Archiv. for Math. og Naturvidenskab* (Christiana), t. 3, 1878, p. 375; *Transformationsgruppen*, t. 1, p. 631.

ponctuelles du plan. — S. Lie a déterminé en 1883 tous les types de groupes infinis du plan ([170]). Les seuls groupes primitifs sont, dans le domaine complexe, le groupe général et les groupes de Möbius. Les groupes imprimitifs appartiennent à plusieurs types différents ; chacun d'eux laissent invariantes une ou deux familles de courbes $\varphi(x,y) = \text{const.}$

Dans le domaine réel il existe un groupe primitif important de transformations ponctuelles analytiques, c'est le *groupe des transformations conformes*, c'est-à-dire des transformations qui conservent les angles. Ces transformations se partagent en deux familles séparées, suivant que le sens de l'angle est conservé ou non ; la première famille forme un groupe continu. Les équations

$$x' = u(x, y), \qquad y' = v(x, y)$$

des transformations conformes sont définies par les conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \mp \frac{\partial v}{\partial x},$$

où les signes supérieurs correspondent à la première famille, les signes inférieurs à la seconde. Ces relations expriment que $x' + iy'$ est une fonction analytique de la variable complexe $x \pm iy$. Le groupe conforme réel du plan est donc identique au groupe des transformations analytiques générales d'une variable complexe. Il est simple ([170a]).

30. Groupes infinis de transformations de contact. — Parmi ces groupes infinis nous citerons les suivants :

a. Le groupe de toutes les transformations de contact analytiques de l'espace E_{n+1}. — Les figures géométriques qui possèdent des propriétés invariantes par rapport à ce groupe sont représentées par des équations contenant les $2n+1$ variables z, x_i, p_i, c'est-à-dire par des équations ou systèmes d'équations aux dérivées partielles. On a depuis longtemps en effet utilisé les transformations de contact dans la théorie

([170]) S. Lie, *Forhandlingar Videnskabs-Selskabet Christiana*, 1883 (éd. 1884) ou bien 1882 (éd. 1883), mém. n° 12; *Abh. Ges. Lpz.* (math.), t. 21, 1895, p. 43. *Voir* aussi : E. Cartan [*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 25, 1908, p. 107] qui a déterminé simultanément par la même méthode les groupes finis et les groupes infinis du plan.

([170a]) E. Study [*Ausgew. Gegenstände* ([167b]), t. 1, p. 114/5] parle aussi de transformations *anticonformes* et *antianalytiques*; ce sont des produits de transformations conformes ou analytiques par la transformation qui change chaque élément imaginaire en son conjugué.

des équations aux dérivées partielles. Mais c'est S. Lie qui le premier a fondé une théorie des invariants des transformations de contact ([171]).

Une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

ne possède aucun invariant vis-à-vis du groupe des transformations de contact; on peut toujours, par une transformation de contact convenablement choisie, la transformer dans toute autre équation du premier ordre, par exemple dans l'équation

$$z = 0 \quad ({}^{172}).$$

Ce théorème est vrai quel que soit le nombre des variables.

Au contraire, un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \ldots,$$

ou encore un *système de fonctions* f, $\varphi, \ldots$, possède des propriétés invariantes.

Dans cette théorie le crochet de Poisson $[f\varphi]$ joue un rôle fondamental ([173]). Si l'équation

$$[f\varphi] = 0$$

est une conséquence des équations

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x, y, z, p, q) = 0,$$

ces deux équations aux dérivées partielles sont en involution, c'est-à-dire elles admettent ∞^1 intégrales communes; si le crochet $[f\varphi]$ est identiquement nul, cette propriété appartient aux deux équations

$$f = a, \qquad \varphi = b,$$

([171]) Les deux Mémoires de S. Lie qui sont fondamentaux dans cette théorie se trouvent : ***Forhandlingar Videnskabs-Selskabet Christiania***, 1872 (éd. 1873), ou bien 1871 (éd. 1872), p. 24; et ***Math. Ann.***, t. 8, 1875, p. 215. S. Lie a complété plus tard sa théorie, en particulier : *Transformationsgruppen*, t. 2, Leipzig, 1890; *Berührungstransformationen*, t. 1, Leipzig, 1896; t. 2, Leipzig, 1897. *Voir* aussi : F. Klein, *Höhere Geometrie*, t. 1, Göttingue, 1892, p. 558 et suiv.

([172]) S. Lie, *Forhandlingar Videnskabs-Selskabet Christiania*, 1872 (éd. 1873), p. 24, 132; *Nachr. Ges. Gött.*, 1872, p. 478; F. Klein, *Progr. Erlangen*, § 9.

([173]) S. Lie, *Nachr. Ges. Gött.*, 1872, p. 473, en particulier p. 478/9. *Voir* aussi : *Forhandlingar Videnskabs-Selskabets Christiania*, 1872 (éd. 1873) p. 28. Pour toute cette théorie, consulter E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, t. 1 ou t. 2, Paris, 1891.

quelles que soient les valeurs attribuées aux constantes a et b. Ce sont là des propriétés invariantes vis-à-vis du groupe des transformations de contact.

On peut se proposer de faire une classification des équations aux dérivées partielles du second ordre vis-à-vis du groupe des transformations de contact de l'espace E_3 ([174]). On s'est occupé particulièrement de la théorie des invariants des équations de Monge-Ampère ([175])

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0,$$

où A, B, C, D, E sont des fonctions de x, y, z, p, q et où r, s, t désignent les dérivées partielles du second ordre; ces équations forment en effet une catégorie invariante ([176]). On peut toujours, par une transformation de contact, annuler le coefficient A, c'est-à-dire rendre l'équation linéaire. Les équations linéaires sont caractérisées par la propriété d'admettre pour intégrales les différents points de l'espace; les équations linéaires et homogènes $(A = E = 0)$ admettent aussi les plans pour intégrales.

Les équations de Monge-Ampère qui admettent une intégrale intermédiaire

$$v - \varphi(u) = 0,$$

où φ est une fonction arbitraire et u, v des fonctions indépendantes données de x, y, z, p, q, forment une catégorie invariante. Si u et v sont en involution, l'équation peut se ramener par une transformation de contact à la forme normale $r = 0$; elle admet alors l'intégrale

$$z = Y(y) + xY_1(y) \quad ({}^{177}).$$

E. Cartan ([178]) s'est occupé des invariants d'un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre en involution, ainsi

([174]) *Voir* E. Goursat, *Acta math.*, t. 19, 1895, p. 285, en partic. p. 297; *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. 1, Paris, 1896, p. 196 [n° 87].

([175]) G. Monge, *Hist. Acad. Sc. Paris*, 1784 (éd. 1787), p. 118; A. M. Ampère, *J. Éc. polyt.*, (1), cah. 18, 1820, p. 34.

([176]) S. Lie, *Forhandlingar Videnskabs-Selskabets Christiania*, 1871 (éd. 1872), p. 85; *Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 163; t. 59, 1904, p. 246; F. Klein, *Höhere Geometrie*, p. 561. Sur la théorie des équations de Monge-Ampère, *Voir* aussi : G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 3, Paris, 1894, p. 263 et suiv.

([177]) Lie ou F. Engel, *Math. Ann.*, t. 59, 1904, p. 275/76.

([178]) *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), t. 27, 1910, p. 109. *Voir* aussi : A. Werner, *Ueber Systeme von drei Pfaffschen Gleichungen im Raume von fünf Dimensionen* (*Diss. Greifswald*, 1908, éd. Leipzig, 1908).

que d'une équation à caractéristiques confondues, vis-à-vis du groupe des transformations de contact de l'espace. Les deux problèmes sont en relation étroite entre eux ainsi qu'avec la théorie des invariants d'un système de deux équations de Pfaff à cinq variables vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles de E_5.*

b. Les groupes infinis irréductibles de transformations de contact. — Dans le plan il n'existe que deux types de groupes infinis irréductibles de transformations de contact. Tout groupe infini irréductible peut en effet, par une transformation de contact, être réduit soit au groupe dont la fonction caractéristique est une fonction arbitraire

$$\Omega(x, y, p, q),$$

soit au groupe dont la fonction caractéristique est

$$cz + \Omega(x, y, p, q),$$

où c est une constante arbitraire (179).

Les groupes de transformations de contact de E_{n+1} qui sont la généralisation des groupes précédents jouissent d'une propriété caractéristique. S. Lie a en effet démontré le théorème suivant :

Si un groupe continu infini de transformations de contact de E_{n+1}, considéré comme groupe ponctuel de l'espace E_{2n+1} (z, x_i, p_i), est tel que les ∞^{2n-1} éléments linéaires qui sont issus d'un point arbitraire et qui satisfont à l'équation de Pfaff

$$dz - \sum_{(i)} p_i\, dx_i = 0$$

sont transformés projectivement de la manière la plus générale possible [c'est-à-dire par un groupe projectif à $n(2n+1)$ paramètres], le groupe est irréductible; de plus ou bien il coïncide avec le groupe de toutes les transformations de contact, ou bien il se ramène par une transformation de contact à l'un des deux groupes définis par les fonctions caractéristiques (180)

$$\Omega(x_i, p_i) \quad \text{et} \quad az + \Omega(x_i, p_i).$$

*Dans l'espace E_{2n+1} il n'y a pas d'autre groupe infini primitif que les trois groupes de transformations ponctuelles dont il est question dans le numéro précédent, et le groupe de toutes les transformations de contact de l'espace E_{n+1} (181).

Les groupes de transformations de contact de E_{n+1} dont les fonctions caractéristiques sont

$$\Omega(x_i, p_i) \quad \text{et} \quad az + \Omega(x_i, p_i)$$

ne sont pas primitifs si on les considère comme des groupes ponctuels de E_{2n+1}. Ils transforment en effet entre elles les $2n$ variables x_i, p_i. Ils fournissent ainsi dans l'espace E_{2n} deux groupes de transformations ponctuelles qui sont primitifs. Ce sont, aves les trois groupes ponctuels énumérés au numéro précédent, les seuls groupes infinis de l'espace E_{2n}. Le premier est simple et contenu comme sous-groupe invariant dans le second (182). Ces deux groupes ponctuels de l'espace E_{2n} peuvent encore être définis comme l'ensemble des transformations qui laissent invariante, d'une manière absolue ou à un facteur constant près, l'expression différentielle bilinéaire

$$dx_1\,\delta p_1 - dp_1\,\delta x_1 + dx_2\,\delta p_2 - dp_2\,\delta x_2 + \ldots + dx_n\,\delta p_n - dp_n\,\delta x_n.$$

On pourrait substituer à cette expression différentielle l'invariant intégral

$$\iint dx_1\,dp_1 + dx_2\,dp_2 + \ldots + dx_n\,dp_n.^*$$

Les types de groupes infinis irréductibles de transformations de contact de l'espace E_3 ont été déterminés par U. Amaldi (183).

31. Certains groupes infinis de l'espace réglé. — Il existe dans l'espace réglé certains groupes infinis importants, admettant des invariants caractéristiques intégraux.

a. Le groupe infini des transformations des droites de E_3 qui changent une congruence de normales à une famille de surfaces en une autre congruence de normales. Ce groupe G est d'une grande importance en optique. Si l'on définit analytiquement un *axe* ou *rayon orienté* de l'espace par ses trois cosinus directeurs X, Y, Z et les coor-

(179) S. Lie, *Abh. Ges. Lpz.* (math.), t. 21, 1895, p. 83.
(180) S. Lie, *Id.*, t. 21, 1895, p. 107.

(181) *E. Cartan, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 26, 1909, p. 93.* Dans le cas de $n = 1$, ce théorème a été vérifié par U. Amaldi [*Memorie Accad. Modena*, (3), t. 7, 1906; dans le cas de $n = 2$, par G. Kowalewski [*Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 51, 1899, p. 69].
(182) *É. Cartan, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 26, 1909, p. 93.*
(183) *Memorie Accad. Torino*, (2), t. 57, 1906, p. 141; *Memorie Accad. Modena*, (3), t. 8, 1909, p. 91.

données ξ, η, ζ d'un de ces points, ce groupe admet l'invariant intégral

$$\iint dX\, d\xi + dY\, d\eta + dZ\, d\zeta;$$

cette intégrale double, étendue à une portion quelconque des droites d'une congruence, est reproduite à un facteur constant près par toute transformation du groupe. L'ensemble des transformations qui laissent cette intégrale double invariante forme un sous-groupe invariant G′ du groupe total. Si l'intégrale est nulle pour tout ensemble de droites faisant partie d'une congruence, cette congruence est formée des normales à une famille de surfaces et réciproquement ([184]).

Toute transformation S du groupe précédent permet de définir dans l'espace E_3 une infinité de transformations de contact Σ dépendant d'un paramètre ([185]). Deux surfaces transformées l'une de l'autre par Σ sont normales à deux congruences de droites transformées l'une de l'autre par S. Les transformées d'une même surface par deux des ∞^1 transformations Σ qui correspondent à S sont parallèles entre elles et ont une distance normale constante. Le groupe de transformations de contact Γ ainsi obtenu est le *plus grand groupe de transformations de contact changeant deux surfaces parallèles en deux surfaces parallèles* ([186]); la distance normale des deux premières surfaces est reproduite à un facteur constant près. Celles de ces transformations qui laissent invariante la distance normale forment un sous-groupe invariant Γ' du groupe total.

L'importance en optique des groupes précédents résulte du théorème de Malus-Dupin ([187]) d'après lequel toute congruence de normales engendre, après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions à travers les surfaces de séparation de milieux isotropes, une nouvelle congruence de normales. L'opération par laquelle, les surfaces de séparation étant données, on passe d'une congruence de normales du premier milieu à la congruence de normales du dernier milieu, est une transformation du groupe G; si les rayons n'ont subi que des

([184]) É. CARTAN, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 24, 1896, p. 21.

([185]) E. STUDY (*Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 14, 1905, p. 424), étudie complètement le cas où un plan arbitraire est transformé en une surface non développable. Il fait usage d'un certain système de coordonnées tangentielles.

([186]) Ces transformations laissent invariant le groupe à un paramètre des *dilatations*. *Voir* S. LIE, publ. par G. Scheffers, *Berührungstransformationen*, t. 1, Leipzig, 1896, p. 14. Sur les dilatations dans l'espace, *voir* S. LIE, *Math. Ann.*, t. 59, 1904, p. 209.

([187]) L. MALUS, *J. Éc. polyt.*, (1), cah. 14, 1808, p. 1; CH. DUPIN, *Sur les routes suivies par la lumière* (*Applications de géométrie et de mécanique*, Paris, 1822).

réflexions, c'est une transformation de G′. A ce point de vue le groupe de transformations de contact Γ a une interprétation simple. Si l'on considère une surface du premier milieu comme un lieu de sources lumineuses, il lui correspond à chaque instant t une certaine surface d'onde dans le dernier milieu; cette surface d'onde est la transformée de la première surface par une des opérations du groupe Γ; aux différentes valeurs de t correspondent les différentes transformations de Γ qui correspondent à la même transformation de G.

Le point de vue précédent avait déjà été indiqué par W. R. Hamilton ([188]), qui se servait d'une fonction caractéristique engendrant ∞^1 transformations de contact. E. Study ([185]) utilise une fonction génératrice plus simple qui repose sur la notion d'élément orienté.

Le groupe G s'étend à un espace E_n quelconque. Si l'on définit un rayon orienté de E_n par ses cosinus directeurs

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n,$$

et les coordonnées rectangulaires d'un de ses points

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n,$$

les transformations du groupe reproduisent, à un facteur constant près, l'intégrale double

$$\iint \sum_{(i)} d\xi_i\, dX_i.$$

Elles sont caractérisées par la propriété de changer une congruence de normales à une famille de surfaces en une autre congruence de normales.

Dans le cas particulier où $n = 2$ on peut définir une droite par une équation normale

$$x \cos u + y \sin u - v = 0;$$

le groupe G est alors formé des transformations qui reproduisent à un facteur constant près l'intégrale double

$$\iint du\, dv$$

étendue à un ensemble quelconque de droites; mais la propriété de

([188]) *Voir*, en particulier, le troisième supplément aux *Systems of rays* [*Trans. Irish Acad.* (Dublin), t. 17, 1835, p. 1]. *Voir* aussi : F. KLEIN, *Jahresb. deutsch. Math. Ver.*, t. 1, 1892, p. 35; S. LIE, *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 48, 1896, p. 131.

conserver les congruences de normales n'est évidemment plus caractéristique. L'invariant caractéristique

$$\iint du\, dv$$

a ici une signification métrique simple : étendu à l'ensemble des droites qui traversent un arc de courbe donné (chacune étant comptée autant de fois qu'elle le traverse), il représente le double de la longueur de cet arc de courbe (189). Le groupe infini ainsi obtenu est isomorphe au groupe de Möbius qui reproduit les aires planes à un facteur constant près (190).

b. Il existe dans l'espace réglé un groupe infini analogue, isomorphe au groupe de Möbius de l'espace E_4. Il est formé des *transformations qui reproduisent, à un facteur constant près, l'intégrale quadruple*

$$\iiiint (X\,dY\,dZ + Y\,dZ\,dX + Z\,dX\,dY)(X\,d\eta\,d\zeta + Y\,d\zeta\,d\xi + Z\,d\xi\,d\eta)$$

étendue à un ensemble quelconque de droites. Cette intégrale a d'ailleurs une signification métrique : étendue à l'ensemble des droites qui traversent une portion de surface donnée, elle est égale au produit par $\frac{\pi}{2}$ de l'aire de cette portion de surface (191).

c. De même si l'on considère le plan orienté comme élément générateur de l'espace, on obtient un groupe infini isomorphe au groupe de Möbius de l'espace E_3 en prenant l'*ensemble des transformations qui reproduisent à un facteur constant près l'intégrale triple*

$$\iiint X\,dY\,dZ\,dp + Y\,dZ\,dX\,dp + Z\,dX\,dY\,dp$$

étendue à un ensemble quelconque de plans orientés ; on a désigné par X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale au plan orienté, par p la distance de l'origine à ce plan. Cette intégrale triple étendue aux plans

(189) *E. CARTAN, *Bull. Soc. math.*, t. 24, 1896, p. 3.*

(190) *Le même groupe est étudié par W. Blaschke (*Math. Ann.*, t. 69, 1910, p. 204) qui le rattache au groupe des transformations de contact orientées du plan qui changent deux éléments *syntactiques* (c'est-à-dire ayant une normale positive commune) en deux éléments syntactiques : elles conservent le périmètre des courbes fermées. Le groupe des transformations de contact orientées qui laissent invariant le corps des courbes de largeur constante est formé d'une manière analogue des transformations qui changent deux éléments orientés *antitactiques* en deux éléments orientés antitactiques.*

(191) *É. CARTAN, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 24, 1896, p. 35.*

qui traversent un arc de courbe, est égale au produit par π de la longueur de cet arc de courbe (192).

Chacun des groupes précédents admet un seul sous-groupe invariant formé des transformations qui laissent invariante l'intégrale multiple correspondante. Ce sous-groupe invariant est simple.*

d. W. Blaschke (193) a signalé quelques groupes infinis de transformations de plans orientés dans l'espace euclidien. Il a aussi montré leurs relations avec certaines transformations concernant les aires.

32. Le groupe des transformations équilonges. — Considérons dans un plan une droite orientée représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation normale

$$x \cos u + y \sin u - v = 0 ;$$

les deux quantités u et v, dont la première est définie à un multiple près de 2π, sont les coordonnées de la droite orientée. Les équations

$$u' = \varphi(u), \qquad v' = \chi(u) \pm v\varphi'(u),$$

où les fonctions φ et χ sont arbitraires, définissent un groupe infini mixte de transformations des droites orientées. On l'appelle le *groupe équilonge* (194) ; les transformations qui correspondent au signe + forment un groupe continu (transformations équilonges propres) ; les autres sont les transformations équilonges impropres.

Le groupe équilonge est un groupe de transformations de contact du plan. Ce groupe est le plus grand groupe de transformations de contact qui change les droites orientées en droites orientées et laisse invariante (au sens près) la distance tangentielle de deux courbes. Il contient en particulier les *dilatations* (186).

Le groupe équilonge présente ainsi une analogie remarquable avec le groupe conforme; l'angle invariant du groupe conforme est remplacé par la distance tangentielle de deux courbes. Une transformation conforme change tout couple de familles de ∞^1 courbes isogonales en un couple analogue ; de même toute transformation équilonge change tout couple

(192) *E. CARTAN, *Id.*, p. 15.*

(193) **Archiv Math. Phys.*, (3), t. 16, 1910, p. 182; *Math. Ann.*, t. 69, 1910, p. 204.*

(194) E. Study [*Sitzgsb. der Niederrhein. Ges. für Natur-und Heilkund zu Bonn*, 1904 (éd. Bonn, 1905), section A, p. 50/60] donne aux transformations de ce groupe le nom *d'équidistantes*. Ce groupe a été étudié spécialement par G. Scheffers (*Verh. des 3. intern. Math. Kongr. Heidelberg*, 1904, publié par A. Krazer, Leipzig, 1905, p. 349, et plus en détail, *Math. Ann.*, t. 60, 1905, p. 491, en partic. § 6 et 7).

de familles de ∞^1 courbes équitangentielles (chaque courbe de l'une des familles ayant avec chaque courbe de l'autre une tangente commune de longueur donnée) en un couple analogue.

Cette analogie peut être mise en évidence dans la représentation analytique. En introduisant la variable duale $u+\varepsilon v$ (où $\varepsilon^2=0$), et en posant

$$f(u+\varepsilon v)=\varphi(u+\varepsilon v)+\varepsilon\chi(u+\varepsilon v),$$

les équations des transformations peuvent s'écrire

$$u'+\varepsilon v'=f(u\pm\varepsilon v);$$

dans cette équation f est une fonction analytique arbitraire de la variable duale $u\pm\varepsilon v$.

Le groupe équilonge admet comme sous-groupe fini le groupe mixte de Laguerre, de même que le groupe conforme admet comme sous-groupe fini le groupe des rayons vecteurs réciproques. En posant

$$w=\operatorname{tg}\frac{u+\varepsilon v}{2}=\xi+\varepsilon\eta,$$

les équations des transformations de E. N. Laguerre se mettent sous la forme

$$w'=\frac{aw+b}{cw+d} \qquad \text{et} \qquad w'=\frac{aw+b}{c\overline{w}+d}$$

avec des coefficients duals réels (194). Les cycles, transformés entre eux par le groupe de Laguerre, sont les enveloppes des droites orientées pour lesquelles il existe une relation entière du second degré en ξ et du premier degré en η.

E. Study a aussi étudié les transformations équilonges dans le plan non euclidien. Il introduit à cet effet une unité complexe ε assujettie à satisfaire à l'une des relations

$$\varepsilon^2=-1, \qquad \varepsilon^2=+1,$$

la première correspondant au plan elliptique, la deuxième au plan hyperbolique. Dans le plan elliptique, de conique fondamentale

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

on peut définir une droite orientée par l'équation

$$2\xi x+2\eta y+(\xi^2+\eta^2-1)z=0:$$

en posant

$$z=\xi+\varepsilon\eta, \qquad \overline{z}=\xi-\varepsilon\eta,$$

les transformations équilonges sont définies par les équations

$$z'=f(z), \qquad z'=f(\overline{z}),$$

où $f(z)$ désigne une fonction analytique quelconque de la variable complexe z. *Le groupe équilonge qui se trouve ainsi isomorphe au groupe conforme admet un sous-groupe à six paramètres transformant les cycles en cycles : il est défini par une transformation homographique quelconque de z à coefficients complexes. Tout cycle est l'enveloppe des droites orientées dont les coordonnées ξ, η sont liées par la relation

$$2\alpha\xi+2\beta\eta+\gamma(\xi^2+\eta^2-1)+\delta(\xi^2+\eta^2+1)=0.*$$

Dans le plan hyperbolique, on a une représentation analytique analogue au moyen de fonctions synectiques de la variable complexe $z=\xi+\varepsilon\eta$ ($\varepsilon^2=1$). *On peut aussi représenter une droite orientée par l'équation

$$(\lambda\mu+1)x+(\lambda-\mu)y+(\lambda\mu-1)z=0,$$

la conique fondamentale étant

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

Les transformations équilonges, *non nécessairement analytiques*, sont définies par les équations

$$\lambda'=f(\lambda), \qquad \mu'=\varphi(\mu),$$

ou

$$\lambda'=f(\mu), \qquad \mu'=\varphi(\lambda),$$

dans lesquelles f et φ sont des fonctions quelconques. Le groupe équilonge admet un sous-groupe fini à six paramètres, qui change les cycles en cycles et qui s'obtient analytiquement en prenant pour f et φ deux fonctions homographiques quelconques. Tout cycle est l'enveloppe des droites orientées dont les coordonnées λ, μ sont liées par la relation

$$\alpha\lambda\mu+\beta\lambda+\gamma\mu+\delta=0.*$$

Le groupe équilonge se généralise dans le cas d'un espace E_n quelconque. Dans l'espace non euclidien, elliptique ou hyperbolique, le groupe équilonge est dualistique du groupe conforme, et par suite fini à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ paramètres (195). Dans l'espace euclidien le groupe équilonge est au contraire infini (196).

(195) E. STUDY, *Sitzgsb. der Niederrhein. Ges. für Natur- und Heilkunde zu Bonn* (194), 1904, § 6. *

(196) *J. L. COOLIDGE, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 9, 1908, p. 178.*

33. Autres groupes géométriques. L'analysis situs. — Nous avons déjà cité des groupes qui ne sont pas des groupes de Lie, par exemple le groupe de toutes les transformations de Cremona. En voici deux autres :

a. Le groupe de toutes les transformations ponctuelles algébriques;

b. Le groupe de toutes les transformations réelles bicontinues et biunivoques. Les transformations de ce dernier groupe ne sont pas en général analytiques; de plus elles sont restreintes essentiellement au domaine réel. On peut d'ailleurs prolonger ce groupe en le composant avec les collinéations réelles qui modifient le plan de l'infini.

La théorie des invariants de ce groupe porte habituellement le nom d'*analysis situs*. Les propriétés des figures qui ressortissent à l'analysis situs sont d'abord celles qui ne font intervenir que la *forme* des courbes et des surfaces; citons aussi les notions suivantes qui se rapportent à des ensembles de points :

1° la notion de *point limite*, la notion d'ensemble fermé, dense en soi, parfait;

2° la *connexion*;

3° la *dimension* [197].

La notion de *courbe simple fermée* et de *domaine* limité par cette courbe est également invariante par rapport au groupe fondamental de l'analysis situs du plan [198].

[197] La dimension d'un ensemble de points n'est pas invariante par une transformation ponctuelle réelle arbitraire (non continue). Ce n'est que la *puissance* de l'ensemble qui est conservée et, à ce point de vue, l'espace E_n a la puissance de la droite, c'est-à-dire du continu linéaire (G. Cantor, *J. Reine Angew. Math.*, t. 84, 1878, p. 245). G. Peano (*Math. Ann.*, t. 36, 1890, p. 157) a en outre montré que les points d'un segment de droite peuvent être représentés d'une manière continue sur les points d'une aire carrée; D. Hilbert (*Math. Ann.*, t. 38, 1891, p. 459) a mis géométriquement en évidence le théorème de G. Peano. Le théorème d'après lequel la *dimension* est un invariant de l'analysis situs n'a été démontré que récemment par H. Lebesgue et L. E. J. Brouwer.

[198] Les théorèmes de l'analysis situs sur les courbes et les arcs de courbe ainsi que sur le partage du plan en régions par les courbes fermées, ont été récemment étudiés et démontrés de nouveau, du point de vue de la théorie des ensembles, par A. Schoenflies [*Math. Ann.*, t. 58, 1904, p. 195; t. 59, 1904, p. 129; t. 62, 1906, p. 286; *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 15, 1906, p. 557; *Nachr. Ges. Gött.* (math. phys.), 1907, p. 28]. Il a en particulier déterminé les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire un ensemble de points pour qu'il soit, au sens de l'analysis situs, équivalent à la droite ou à un segment de droite. Les notions auxquelles il arrive peuvent être regardées comme les « notions naturelles » de l'analysis situs, au sens des n°s 48 et suiv.

34. Les différentes géométries sur une variété donnée [199]. — Si une variété M possède un ensemble quelconque de propriétés invariantes vis-à-vis d'un certain groupe de transformations de l'espace auquel appartient M, il peut arriver que ces propriétés restent invariantes par d'autres transformations qui ne soient définies que pour la variété M et non pour l'espace tout entier.

a. Les genres et les modules d'une variété algébrique μ restent invariants, non seulement par les transformations birationnelles de l'espace, mais encore par les transformations simplement rationnelles (c'est-à-dire telles que les transformations inverses ne soient pas univoques), pourvu que tout point arbitraire de la variété μ' transformée de μ soit le transformé d'un seul point de μ, et cela même si le point arbitraire considéré de μ' est le transformé d'un nombre quelconque d'autres points de l'espace n'appartenant pas à μ. C'est ainsi que dans le plan une courbe algébrique de genre un est invariante par une famille de transformations rationnelles dépendant d'un paramètre, et ces transformations, *considérées sur la courbe*, forment un groupe.

Plus généralement on peut considérer des transformations non seulement entre deux espaces E_k au même nombre de dimensions, mais encore entre un espace E_k et une variété M_k située dans un espace $E_n (n > k)$. Les équations indépendantes

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont les coordonnées non homogènes d'un point de l'espace E_k; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ celles d'un point de l'espace E_n, et où les f_i sont des fonctions rationnelles, font correspondre dans l'espace E_n aux différents points de l'espace E_k les différents points d'une variété M_k. A chaque point (x) de l'espace E_k correspond en général un seul point (y) de la variété M_k; mais à chaque point de la variété M_k correspond un nombre discret (≥ 1) de points de E_k. Considérons maintenant dans E_k une variété M_h quelconque ($h<k$); il lui correspond dans M_k une variété $\overline{M}_h$. Bien que la correspondance entre E_k et M_k ne soit pas biunivoque en général, cependant les deux variétés M_h et $\overline{M}_h$ se correspondent point par point d'une manière biunivoque parce que de tous les points de E_k qui correspondent au même point de $\overline{M}_h$, un seul est sur M_h. Les genres et les modules de M_h sont ainsi conservés dans le passage à $\overline{M}_h$.

[199] F. Klein, *Progr. Erlangen*, § 8, 1, 2. *Voir* aussi : F. Enriques, *Conferenze di geometria* (autographiées), Bologne, 1895, n° 28.

L'étude des propriétés d'une variété algébrique, qui sont invariantes par rapport à toutes les transformations de l'espèce précédente, constitue ce qu'on appelle la *Géométrie sur la variété algébrique.* On obtient ainsi une généralisation des idées exposées au n° 28.

b. Des considérations analogues s'appliquent à d'autres espèces de transformations et conduisent à d'autres géométries sur une variété donnée. Dans toutes ces nouvelles géométries on ne porte son attention que sur la variété, sans se préoccuper de la manière dont les transformations considérées se comportent en dehors de cette variété, sans se préoccuper même de savoir si elles ont une existence dans le reste de l'espace.

Considérons en particulier les transformations ponctuelles qui laissent invariantes les longueurs des arcs de courbe sur une variété donnée ; ces transformations, en tant qu'on ne porte son attention que sur l'effet produit sur la variété, portent le nom de *déformations* de la variété. La géométrie fondée sur l'ensemble de toutes ces transformations est la *Géométrie métrique sur la variété donnée.* Elle a pour objet l'étude des propriétés qui se conservent par déformation. Les Géométries métriques sur deux surfaces *applicables* sont à ce point de vue équivalentes. Toute question relative à la courbure totale, aux lignes géodésiques, etc., traitée sur l'une des surfaces est par cela même traitée sur l'autre ([200]).

c. On peut enfin développer une *analysis situs* sur une variété donnée, par exemple une surface, indépendamment de l'espace dans lequel est située cette surface. On peut par exemple, comme F. Klein l'a montré ([201]), définir la connexion d'une surface sans faire appel à l'espace environnant. De même la propriété de la surface de n'avoir qu'un côté ([202]) dépend de certaines autres propriétés intrinsèques de la surface. Deux surfaces sont de même connexion quand on peut établir entre leurs points sans exception une correspondance bicontinue et biunivoque ([203]), etc.

([200]) *Voir* A. Voss, *Math. Ann.*, t. 46, 1895, p. 97.

([201]) F. Klein, *Math. Ann.*, t. 9, 1875, p. 476. *Voir* aussi : *Progr. Erlangen* ([199]).

([202]) D'après P. Stäckel (*Math. Ann.*, t. 52, 1899, p. 598), ce sont A. F. Möbius et J. B. Listing, en cherchant à généraliser le théorème de L. Euler sur les polyèdres, qui sont arrivés en même temps (en 1858), et indépendamment l'un de l'autre, à la découverte des surfaces à un seul côté. *Voir* A. F. Möbius [*Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 17, 1865, p. 31; *Werke*, t. 2, Leipzig, 1886, p. 473, en partic. § 9] et J. B. Listing [*Abh. Ges. Gött.*, t. 10, 1861/2 (éd. 1862), mém. n° 2].

([203]) Ces considérations tirent leur importance de leurs applications aux problèmes de l'analyse. Ce sont des considérations d'analysis situs qui sont à la base de la théorie de B. Riemann sur les fonctions algébriques et leurs intégrales [*J. Reine Angew. Math.*, t. 54, 1857, p. 115; *Werke*, publ. par H. Weber (1re éd.), Leipzig, 1876, p. 81 ; (2e éd.), Leipzig, 1892, p. 88; trad. L. Laugel, Paris 1898, p. 89]. C'est ainsi également que E. Picard a fondé sa théorie des fonctions algébriques de deux variables sur les considérations de connexion relatives aux multiplicités réelles à quatre dimensions [*J. Math. pures et appl.*, (4), t. 5, 1889, p. 135; E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, Paris, 1897, en partic. chap. IV].

II. — GÉOMÉTRIES ÉQUIVALENTES.

35. Géométries à groupes semblables et à groupes isomorphes. — Lorsque les groupes fondamentaux de deux géométries sont *semblables*, c'est-à-dire lorsqu'on peut passer des transformations de l'un aux transformations de l'autre par un changement de variables convenable, on peut regarder les deux géométries comme équivalentes. Si l'on imagine deux livres dont chacun contiendrait l'ensemble des postulats, des définitions et des théorèmes de l'une des géométries, il serait possible d'établir une correspondance biunivoque entre les mots usités dans ces deux livres, de manière que par cette correspondance le premier livre se transformât dans le second. Cette correspondance est fournie par le changement de variables qui ramène le premier groupe au second. F. Klein ([204]) a éclairci par de nombreux exemples cette notion de géométries équivalentes par similitude de leurs groupes.

Il y a un cas plus général où deux géométries doivent être regardées comme équivalentes, c'est celui où, *par un choix convenable des éléments générateurs de l'espace*, on peut amener leurs groupes fondamentaux à être semblables. Il en sera ainsi si l'on peut trouver dans ces géométries deux corps finis (c'est-à-dire dont les éléments ne dépendent que de constantes arbitraires) tels que les groupes qui indiquent comment les groupes fondamentaux échangent entre eux les éléments de ces corps soient semblables.

D'après la théorie des groupes de transformations, il faut et il suffit, pour que cela soit possible, que les deux groupes fondamentaux soient isomorphes holoédriques. Comme, d'autre part, il ne peut évidemment être question d'équivalence pour deux géométries dont les groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes, on arrive à la conclusion suivante :

Pour que deux géométries soient équivalentes, il faut et il suffit que leurs groupes fondamentaux soient isomorphes holoédriques, ou encore aient même structure.

([204]) *Programmschrift*, 1872, § 4. *Voir* aussi F. Klein, *Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 257.

On voit ainsi le rôle important joué par la structure des groupes en géométrie.

Quand les groupes fondamentaux de deux géométries sont isomorphes holoédriques et finis, il suffit, pour mettre en évidence l'équivalence des deux géométries, de prendre pour éléments générateurs de l'espace dans chacune des géométries une figure (courbe, surface, etc.) qui n'admette que la transformation identique du groupe et toutes les figures qu'on en déduit par les transformations du groupe. Avec ce choix des éléments de l'espace les deux groupes fondamentaux deviennent simplement transitifs et semblables ([205]). Dans la plupart des exemples d'équivalence signalés jusqu'à présent, l'équivalence pouvait être mise en évidence d'une manière purement géométrique.

Les groupes projectifs jouant un rôle prépondérant parmi les groupes finis, les exemples d'équivalence que nous allons indiquer se rapportent tous à des géométries projectives. Il est d'ailleurs probable que toute géométrie à groupe fini est équivalente à une géométrie projective ([206]).*

36. **Géométries équivalentes à la géométrie projective de la droite.** — Si l'on fait correspondre à un point (x_1, x_2) d'une droite D le point

$$y_1 = x_1^2, \qquad y_2 = x_1 x_2, \qquad y_3 = x_2^2$$

d'un plan P, à toute transformation projective de la droite D correspondra une substitution linéaire effectuée sur y_1, y_2, y_3, c'est-à-dire une transformation projective du plan P. Cette transformation laissera invariante la conique

$$y_1 y_3 - y_2^2 = 0$$

dont on a fait correspondre les différents points aux points de la droite D. Par suite, *la géométrie projective de la droite* D *est équivalente à la géométrie projective d'une conique du plan* P.

Toute droite du plan P coupe la conique en deux points, de sorte qu'à toute droite du plan P correspond, dans la géométrie projective de la droite D, un couple de points (confondus si la droite donnée est tangente à la conique). On peut de même faire correspondre à un point du plan P non situé sur la conique un couple de points de la droite D, à savoir le même couple qu'on a déjà fait correspondre à la polaire du point par rapport à la conique.

([205]) *É. Cartan, *Bull. Sc. Math.*, (2), t. 34, 1910, p. 1.*

([206]) *Cela serait certain si l'on avait démontré qu'il existe un groupe projectif admettant une structure donnée (finie).*

Ce qui précède revient, comme l'avait déjà fait O. Hesse ([207]), à regarder une équation du second degré

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0,$$

où A, B, C sont des combinaisons linéaires des coordonnées d'un point d'un plan P, comme établissant une correspondance biunivoque entre les points de ce plan et les couples de points d'une droite D. Aux différents points d'une droite du plan P correspondent les couples de points d'une même involution, et les couples de points doubles de l'involution sont représentés dans le plan par les points de la conique

$$B^2 - AC = 0.$$

Par cette représentation les transformations projectives de la droite D deviennent les transformations projectives du plan P qui laissent invariante la conique

$$B^2 - AC = 0.$$

On peut généraliser, avec W. F. Meyer ([208]), le « principe de transfert » de L. O. Hesse. Considérons une équation de degré n

$$(1) \qquad a_0\lambda^n - na_1\lambda^{n-1} + \binom{n}{2} a_2\lambda^{n-2} - \ldots \pm a_n = 0,$$

et regardons les $n+1$ coefficients a_i comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace E_n. Faisons correspondre à ce point de E_n l'ensemble des n points d'une droite D dont les coordonnées sont les racines de l'équation donnée. Toute transformation projective de la droite D donnera, par cette correspondance, une certaine transformation projective de E_n ; le groupe projectif de D donnera un groupe projectif à trois paramètres de E_n. Ce groupe projectif laisse invariante la courbe de E_n qui correspond aux systèmes formés de n points confondus ([209]). Cette courbe est la courbe unicursale normale du $n^{\text{ième}}$ ordre obtenue en annulant tous les déterminants du second ordre du tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{matrix} \right\|.$$

([207]) *J. Reine Angew. Math.*, t. 66, 1866, p. 15 ; *Werke*, Munich, 1897, p. 531.

([208]) *Apolarität und rationale Kurven*, Tubingue, 1883.

([209]) En annulant les invariants et les coefficients des covariants de la forme binaire (1), on obtient toutes les multiplicités invariantes par le groupe à trois paramètres de la courbe normale [G. Fano, *Memorie Accad. Torino*, (2), t. 46, 1896, p. 187].

La géométrie projective de la droite D *est donc équivalente à la géométrie projective de la courbe unicursale normale du* $n^{\text{ième}}$ *ordre de* E_n.

On peut d'ailleurs partir de la représentation de la droite D sur la courbe normale, par les formules

$$a_0 = x_2^n, \qquad a_1 = x_1 x_2^{n-1}, \qquad \ldots, \qquad a_n = x_1^n,$$

qui indiquent le point de la courbe normale qui correspond au point (x_1, x_2) de la droite D. Toute substitution linéaire effectuée sur x_1, x_2 donne une substitution linéaire effectuée sur $a_0, a_1, \ldots, a_n$, et cette substitution linéaire fournit une transformation projective de E_n qui s'applique non seulement aux points de la courbe normale mais à tous les points de E_n. A chaque système de n points de la droite D correspond un système de n points sur la courbe normale et, par suite, l'hyperplan E_{n-1} qui contient ces n points ; le point $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de E_n est le pôle de cet hyperplan E_{n-1} par rapport à la courbe normale.

On obtient ainsi l'interprétation géométrique la plus simple de la théorie des formes binaires d'ordre n. Comme image des zéros d'une forme d'ordre n on peut à volonté considérer, soit un système de n points sur la courbe normale, soit l'hyperplan E_{n-1} qui contient ces n points, soit le pôle de E_{n-1} par rapport à la courbe normale. La théorie de la polarité, la réduction des formes binaires à des formes canoniques, etc. peuvent de cette manière être exposées sous une forme géométrique simple.

Deux formes d'ordre n sont dites *apolaires* ou *conjuguées* (c'est-à-dire elles ont un invariant simultané bilinéaire nul) si le point image de l'une se trouve dans le plan image de l'autre [ou encore si leurs points images sont conjugués par rapport à la courbe normale ([210])]. Si n est impair toute forme est sa propre conjuguée. Plus généralement un groupe de points g_k est dit *apolaire* à un groupe de points G_n si le point image de G_n appartient à la variété plane E_{k-1} déterminée par g_k. Si g_k se compose d'éléments tous distincts

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_k = 0,$$

G_n peut se mettre sous la forme

$$X_1^n + X_2^n + \ldots + X_k^n = 0.$$

([210]) *Voir* W. F. MEYER, *Apolarität* ([208]) ; O. SCHLESINGER, *Diss. Breslau*, 1882, reproduit avec quelques changements et compléments, *Math. Ann.*, t. 22, 1883, p. 520. F. LINDEMANN, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 5, 1877, p. 113 ; t. 6, 1878, p. 195 ; *Math. Ann.*, t. 23, 1884, p. 111 ; L. BERZOLARI, *Rend. Accad. Napoli*, (2), t. 5, 1891, p. 35, 71 ; *Ann. mat. pura appl.*, (2), t. 19, 1891/2, p. 269 ; (2), t. 21, 1893, p. 1.

La recherche des groupes de points apolaires à G_n revient donc à la résolution du problème suivant : Par un point A de l'espace E_n faire passer toutes les variétés E_{k-1} qui coupent la courbe normale en k points. Le point A étant donné, le problème n'est possible en général que si k est au moins égal à une limite fixe $\left(\text{au plus égale à } \frac{n+1}{2}\right)$. Si n est impair et A arbitraire, le problème n'admet qu'une solution pour $k = \frac{n+1}{2}$; autrement dit une forme binaire arbitraire d'ordre impair n peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme d'une somme de $\frac{n+1}{2}$ puissances $n^{\text{ièmes}}$.

Citons encore, comme susceptibles d'interprétation géométrique simple, les questions relatives à la détermination d'une involution I_n^r, c'est-à-dire d'un système linéaire de formes binaires, sous certaines conditions ([211]) ; par exemple la détermination d'une involution I_n^1, c'est-à-dire d'un faisceau de formes binaires, admettant une jacobienne donnée ([212]) ; ce problème revient à la détermination des variétés planes E_{n-2} de l'espace E_n, qui rencontrent $2(n-1)$ tangentes déterminées de la courbe normale ; leur nombre est ([213])

$$\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

Les géométries projectives signalées dans ce numéro sont les seules dont le groupe fondamental soit isomorphe holoédrique du groupe projectif de la droite et ne laisse invariante aucune variété plane. Les éléments et les paramètres sont supposés complexes.

Si l'on se borne aux éléments et aux paramètres réels, il en est encore de même. Cependant il existe d'autres groupes projectifs réels à trois paramètres, ne laissant invariante aucune variété plane et qui sont réductibles aux précédents par une transformation projective *imaginaire*, sans l'être par une transformation projective réelle. Tous ces groupes sont isomorphes holoédriques du groupe des rotations de l'espace autour d'un point fixe.

([211]) *Cf.* W. F. MEYER, *Apolarität* ([208]), p. 320 ; *Math. Ann.*, t. 21, 1883, p. 125.

([212]) Cette question a été traitée pour $n = 4$, par C. STEPHANOS [*C. R. Acad. Sc.*, t. 93, 1881, p. 994 ; *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne*, Mém. présentés Acad. Sc. Paris, (2), t. 27, 1883, mém. n° 7, p. 1/136]. *Voir* aussi A. BRILL, *Math. Ann.*, t. 20, 1882, p. 334 ; D. HILBERT, *Math. Ann.*, t. 33, 1889, p. 227 ; C. STEPHANOS, *Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. 1, 1884, p. 351.

([213]) H. SCHUBERT, *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, t. 1, 1881/9 (éd. Leipzig, 1889), p. 82 (1884) ; *Math. Ann.*, t. 26, 1886, p. 26 ; *Acta math.*, t. 8, 1886, p. 97.

On peut former tous ces groupes en partant du groupe homographique à trois paramètres réels

$$(2)\qquad \lambda' = \frac{a\lambda + b}{-\bar{b}\lambda + \bar{a}},$$

où a et b désignent deux paramètres complexes quelconques, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ leurs conjugués. Les transformations de ce groupe jouissent de la propriété caractéristique de remplacer deux nombres complexes λ, μ liés par la relation

$$\mu = -\frac{1}{\bar{\lambda}}$$

par deux nombres complexes, liés par la même relation.

Considérons alors l'équation

$$(3)\quad a_0\lambda^{2n} + \binom{2n}{1}a_1\lambda^{2n-1} + \binom{2n}{2}a_2\lambda^{2n-2} + \ldots + \binom{2n}{2}\bar{a}_2\lambda^2 - \binom{2n}{1}\bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0 = 0,$$

où

$$a_{2n-i} = (-1)^i \bar{a}_i.$$

Si λ est une racine de cette équation, $-\frac{1}{\bar{\lambda}}$ en est une autre. Les coefficients de cette équation font intervenir $2n+1$ quantités réelles qui peuvent être regardées comme les coordonnées homogènes d'un point réel dans l'espace E_{2n}. Toute transformation (2) effectuée sur λ produit sur les $2n+1$ coordonnées une substitution linéaire réelle. Au groupe (2) correspond ainsi dans l'espace E_{2n} un groupe projectif réel isomorphe qui ne laisse invariante aucune variété plane. Ce groupe est le groupe projectif automorphe d'une courbe normale d'ordre n, réductible par une transformation projective imaginaire à la courbe normale considérée plus haut. Ses équations s'obtiennent en annulant tous les déterminants à deux colonnes du tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & \bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & -\bar{a}_1 & \bar{a}_0 \end{matrix} \right\|.$$

Cette courbe ne possède aucun point réel; dans le cas $n=1$, elle se réduit à une conique imaginaire

$$a_0\bar{a}_0 - a_1^2 = 0,$$

où a_1 est purement imaginaire; dans le cas $n=2$ à la courbe du quatrième ordre

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & -\bar{a}_1 \\ a_1 & a_2 & -\bar{a}_1 & \bar{a}_0 \end{matrix} \right\| \qquad (a_2 \text{ réel}).$$

Les groupes précédents n'existent que dans l'espace E_{2n}. Dans l'espace E_{2n+1} on obtient un groupe projectif réel isomorphe aux précédents en considérant l'équation

$$a_0\lambda^n + \binom{n}{1}a_1\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}a_2\lambda^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

dont les coefficients, complexes, dépendent de $2n+2$ quantités réelles, coordonnées homogènes d'un point de l'espace E_{2n+1}. Si l'on effectue sur λ les différentes transformations du groupe (2), il en résulte une famille de substitutions linéaires réelles effectuées sur ces coordonnées et, par suite, un groupe projectif réel de l'espace E_{2n+1}. Dans le cas le plus simple $n=1$, on obtient le groupe déjà signalé de l'espace E_3 qui laisse invariants les différents complexes linéaires d'un faisceau dont les complexes dégénérescents sont imaginaires conjugués. On obtient une représentation analytique simple de ce groupe par la formule

$$X' = AX,$$

où X est un quaternion formé avec les quatre coordonnées homogènes d'un point de l'espace E_3 et où A est un quaternion paramétrique.*

37. Extension à des systèmes linéaires quelconques de formes algébriques. — Le principe de transfert de Hesse-Klein revient à représenter le système linéaire de toutes les formes binaires d'ordre n par les points (ou les hyperplans E_{n-1}) de l'espace E_n. On peut appliquer ce principe à n'importe quel système linéaire de formes arbitraires. Considérons un système linéaire de formes à $k+1$ variables

$$(1)\qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0 \qquad (n > k).$$

Nous pouvons regarder ces $k+1$ variables comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace E_k, mais nous pouvons aussi regarder les paramètres λ_i comme les coordonnées homogènes d'un point ou d'un hyperplan E_{n-1} de l'espace E_n. A chaque point P de l'espace E_k, l'équation (1) fait correspondre une relation du premier degré entre les coordonnées tangentielles des hyperplans E_{n-1} de E_n, c'est-à-dire un point P' de l'espace E_n. Il correspond ainsi à l'espace E_k, lieu des points P, une variété rationnelle M_k de l'espace E_n, et la correspondance est biunivoque. *La théorie des invariants du système linéaire* (1) *devient ainsi la géométrie projective de la variété* M_k.

Pour $k=1$, le système linéaire (1) représente une involution de degré n et d'un ordre quelconque $m \geq n$ dans le domaine binaire; cette involution est représentée par une courbe rationnelle C^m d'*ordre m* de l'espace E_n. Chaque groupe de points de l'involution est représenté par les points d'intersection de C^m et d'une variété plane E_{n-1}.

Pour $k = 2$, on obtient la représentation biunivoque d'une surface rationnelle sur le plan, les courbes du système linéaire (1) correspondant aux sections hyperplanes de cette surface ; l'ordre de la surface est donné par le nombre des points d'intersection variables de deux courbes (1) quelconques. Si le système (1) se compose de toutes les formes quadratiques ternaires, on obtient une surface du quatrième ordre F^4 de l'espace E_5, considérée par A. Cayley ([214]) et dont G. Veronese ([215]) a étudié les propriétés géométriques. *La théorie des invariants des formes quadratiques ternaires se ramène ainsi à l'étude projective de cette surface* F^4 ([216]).

Les formes du système linéaire (1) peuvent aussi contenir plusieurs séries de variables. Si l'on regarde ces variables comme des coordonnées homogènes dans des espaces E_h, E_k, ..., on arrive à faire correspondre à l'ensemble d'un point de E_h, d'un point de E_k, etc, un seul point d'une certaine variété $M_\rho (\rho = h + k + \dots)$. Les cas les plus simples de cette espèce ont été traités par C. Segre ([217]).

Considérons la forme binaire bilinéaire

$$f = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2;$$

cette forme égalée à zéro définit une transformation projective de la droite. C. Stephanos fait correspondre à chaque homographie $f = 0$ le point $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ de l'espace E_3. Si l'on transforme cette homographie par une transformation projective non dégénérescente A, le point correspondant $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ subit dans E_3 une transformation projective. On obtient ainsi dans E_3 un groupe projectif à trois paramètres. Ce groupe laisse invariante :

1° la surface du second ordre

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

dont les points correspondent aux homographies dégénérescentes ;

2° le plan $a_{12} = a_{21}$ des involutions ;

3° l'intersection de la quadrique et du plan, c'est-à-dire la conique des involutions paraboliques ([218]).

La théorie des invariants des formes binaires bilinéaires revient ainsi à l'étude de la géométrie projective du système d'une quadrique non dégénérescente et d'un plan non tangent à cette quadrique.

([214]) *Phil. Trans. London*, t. 158, 1868, p. 75 ; Papers 6, Cambridge, 1893, p. 191.

([215]) *Atti R. Accad. Lincei Memorie mat.*, (3), t. 19, 1884, p. 544.

([216]) *Voir* C. Segre, *Atti Accad. Torino*, t. 20, 1884/5, p. 487.

Dans ses recherches sur la géométrie des coniques, E. Study a donné plusieurs représentations du corps des ∞^5 coniques du plan, regardées simultanément comme des lieux de points et des enveloppes de droites. La première représentation (*Math. Ann.*, t. 27, 1886, p. 58) est faite sur certains couples d'éléments de l'espace E_5 liés par une transformation quadratique ; la seconde (*Math. Ann.*, t. 40, 1892, p. 551, 563) est faite sur les points d'une variété M_5 ([103]) de l'espace E_{27}. Il est ainsi amené à la considération de la variété F^4 et à l'étude des questions qui s'y rattachent. E. Study (*Methoden zur Theorie der ternären Formen*, Leipzig, 1889, *voir* en partic. p. 114, II, § 12) a développé des recherches analogues sur l'interprétation des systèmes de formes ternaires.

([217]) *Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 5, 1891, p. 192.

38. Le principe de Hesse appliqué à la génération de groupes projectifs isomorphes d'un groupe projectif donné. — Considérons un groupe projectif G de l'espace E_{r-1} et un système de formes linéairement indépendantes

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \quad \dots, \quad f_n$$

d'ordre α en $x_1, x_2, \dots, x_r$. On peut représenter analytiquement toute transformation du groupe projectif par une substitution linéaire à déterminant 1 effectuée sur $x_1, x_2, \dots, x_r$. Supposons que toute transformation du groupe remplace une forme quelconque du système linéaire

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$$

par une forme du même système. Les coefficients $\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ de la forme transformée se déduisent des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la forme primitive par une substitution linéaire. Si l'on regarde les λ comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace E_n, le groupe projectif donné G de E_{r-1} donne ainsi naissance à un groupe projectif isomorphe de l'espace E_n.

On peut plus généralement considérer plusieurs groupes projectifs isomorphes G, G', ..., des espaces E_{r-1}, E_{s-1}, ..., dans lesquels les coordonnées homogènes sont

$$(x_1, x_2, \dots, x_r), \quad (x'_1, x'_2, \dots, x'_s), \quad \dots$$

([218]) C. Stephanos, *Math. Ann.*, t. 22, 1883, p. 299. La représentation des involutions par les points du plan $a_{12} = a_{21}$ est au fond identique à la représentation de L. O. Hesse qui fait correspondre aux couples de points d'une droite (les points doubles des involutions considérées) précisément les points de ce même plan [*cf.* n° 36].

Considérons un système linéaire de formes

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n,$$

chacune des $n+1$ formes indépendantes $f_0, f_1, \ldots, f_n$ étant de degré α par rapport aux x, de degré α' par rapport aux x', etc. Supposons que lorsqu'on effectue sur les séries de variables $x_i, x'_i, \ldots$, des substitutions linéaires correspondantes des groupes G, G′, ..., chaque forme du système linéaire soit changée en une autre forme du même système linéaire. Il en résultera dans l'espace $E_n(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un groupe projectif isomorphe aux groupes donnés. On a ainsi un moyen de déduire des groupes projectifs particuliers G, G′, ..., supposés isomorphes entre eux, autant d'autres groupes isomorphes qu'on veut.

D'une manière encore plus générale, si l'on considère deux séries de groupes projectifs, les groupes de la première série étant isomorphes entre eux, ainsi que ceux de la seconde série, mais les groupes des deux séries n'ayant aucune variable ni aucun paramètre en commun, on pourra former comme il vient d'être dit un système linéaire

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$$

correspondant aux groupes de la première série, un système linéaire

$$\mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 + \ldots + \mu_m \varphi_m$$

correspondant à ceux de la seconde série. Le système linéaire

$$\sum_{i=0,\ h=0}^{i=n,\ h=m} \nu_{ih} f_i \varphi_h$$

permettra dans l'espace E_{mn+m+n} des ν_{ih} de définir un groupe projectif se décomposant en deux groupes isomorphes, l'un aux groupes projectifs donnés de la première série, l'autre aux groupes projectifs donnés de la seconde série.

Il est possible de déduire du principe précédent tous les groupes projectifs ne laissant invariante aucune variété plane [219]. Ces groupes sont formés d'un nombre fini de groupes projectifs simples. Pour chaque type de groupes simples, les groupes projectifs à considérer (groupes fondamentaux) sont au nombre de l, l étant le rang du groupe.

Ce qui précède suppose les variables et les paramètres complexes. Des théorèmes analogues existent, quoique un peu plus compliqués, dans le domaine réel. Nous allons indiquer la formation des groupes projectifs, complexes ou réels, isomorphes au groupe projectif général de l'espace E_{r-1}.*

[219] *É. Cartan, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 41, 1913, p. 53.*

39. *Géométries projectives équivalentes à la géométrie projective de E_{r-1}. — Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r$$

les coordonnées homogènes d'un point de l'espace E_{r-1}. On peut déterminer analytiquement une droite par ses coordonnées plückériennes

$$x_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix},$$

où les x_i et les y_i sont les coordonnées de deux de ses points. Toute transformation projective de l'espace E_{r-1} effectue sur les x_{ik} une substitution linéaire; le groupe projectif de l'espace E_{r-1} est par suite équivalent à un groupe projectif de l'espace $E_{\binom{r}{2}-1}$ (groupe de la géométrie réglée). On aura de même un groupe projectif de l'espace $E_{\binom{r}{3}-1}$ en considérant les variétés planes à deux dimensions de E_{r-1} et en les définissant par $\binom{r}{3}$ coordonnées homogènes

$$x_{ijk} = \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}$$

et ainsi de suite.

On obtiendra ainsi une suite de $r-1$ groupes projectifs dont le premier est le groupe projectif de l'espace E_{r-1} et le dernier le même groupe projectif appliqué aux hyperplans E_{r-2}. Ces groupes, qui ne laissent invariante aucune variété plane, sont les groupes fondamentaux servant à la génération de tous les autres.

Partons de la forme

$$f_0 \equiv x_1^{\alpha_1} x_{12}^{\alpha_2} x_{123}^{\alpha_3} \ldots x_{1,2,\ldots,r-1}^{\alpha_{r-1}}$$

et effectuons sur les différents facteurs de cette forme les transformations du groupe projectif (considérées comme s'appliquant aux points, aux droites, etc. de l'espace). On obtiendra ainsi de nouvelles formes qui appartiendront toutes à un même système linéaire minimum

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n,$$

les formes $f_0, f_1, \ldots, f_n$ de ce système étant de degré α_1 par rapport aux variables x_i, de degré α_2 par rapport aux variables x_{ik}, etc. Toute transformation projective de l'espace E_{r-1} transformera une forme quelconque du système en une autre forme du même système, les nouveaux coefficients λ_i résultant des anciens par une substitution linéaire. Au groupe projectif général de l'espace E_{r-1} correspond donc un groupe projectif équivalent de l'espace $E_n(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ce groupe projectif est le groupe projectif le plus général ne laissant invariante aucune variété plane et équivalent au groupe projectif général de l'espace E_{r-1}.*

Dans le cas particulier où

$$f_0 = x_1^2, \qquad r = 3,$$

on obtient dans l'espace E_5 le groupe projectif, isomorphe holoédrique au groupe projectif général du plan, qui laisse invariante la variété M_3^2

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Si dans les groupes précédents on regarde les paramètres comme complexes et si l'on met en évidence dans les variables λ les parties réelles et les coefficients de i on obtient dans l'espace réel E_{2n+1} des groupes projectifs réels isomorphes au groupe projectif de l'espace E_{r-1} complexe. Les autres groupes projectifs réels isomorphes au groupe projectif complexe de l'espace E_{r-1} et ne laissant invariante aucune variété plane réelle s'obtiennent :

1° en partant d'un des groupes projectifs précédemment déterminés de l'espace E_n et en cherchant de quelle manière ce groupe projectif échange entre elles les hyperquadriques réelles de l'espace E_n ; si l'on regarde les n^2 paramètres réels de ces hyperquadriques comme des coordonnées homogènes d'un point d'un espace réel E_{n^2-1}, on a dans cet espace un groupe projectif réel, ne laissant invariante aucune variété plane et isomorphe au groupe projectif général de l'espace complexe E_{r-1} ;

2° en partant de deux groupes projectifs complexes *différents*, isomorphes au groupe projectif général de l'espace complexe E_{r-1} et ne laissant invariante aucune variété plane. Si les variables de ces deux groupes sont désignées par les lettres x et y, on considère la forme

$$f = \sum_{(i,k)} \lambda_{ik} \bar{x}_i y_k ;$$

quand on effectue simultanément sur les variables x et y les transformations des deux groupes, la forme f se change en une forme f' représentée par la même formule, mais avec d'autres coefficients λ'_{ik}, transformés linéairement des coefficients λ_{ik}. Si l'on met en évidence dans ces coefficients les parties réelles et les coefficients de i, regardées comme des coordonnées homogènes réelles d'un espace E_N, on obtient dans cet espace E_N le groupe projectif réel cherché. Il est invariant dans un groupe projectif à un paramètre de plus, obtenu en le composant avec le groupe

$$\lambda'_{ik} = e^{i\alpha} \lambda_{ik}.*$$

40. **Les géométries projectives réelles équivalentes aux géométries hermitiennes et aux géométries quaternioniennes.***— Les groupes projectifs qui viennent d'être indiqués sont, dans le domaine réel aussi bien que dans le domaine complexe, les groupes les plus généraux ne laissant invariante aucune variété plane et isomorphes au groupe projectif général de l'espace E_{r-1}. Il existe des groupes à structure *réelle* qui peuvent être rendus isomorphes au groupe projectif général de l'espace réel E_{r-1} par un changement *imaginaire* de paramètres, mais non par un changement *réel*. Ils sont isomorphes :

— soit aux groupes des différentes géométries hermitiennes de l'espace E_{r-1} ;

— soit, si r est pair et égal à $2s$, au groupe de la géométrie quaternionienne de E_{s-1}.

a. On peut obtenir de la manière suivante les géométries projectives réelles équivalentes à la géométrie projective quaternionienne. Partons d'un des systèmes linéaires de formes (à coefficients et variables complexes)

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$$

considérés au numéro précédent et convenons d'appeler *anticonjuguée* de la forme f la forme obtenue en remplaçant d'une part tous les coefficients complexes par leurs quantités conjuguées, d'autre part les variables

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad \ldots, \quad x_{2s}$$

par

$$-\bar{x}_2, \quad \bar{x}_1, \quad -\bar{x}_4, \quad \bar{x}_3, \quad \ldots, \quad \bar{x}_{2s-1},$$

les variables x_{ij}, x_{jk} étant modifiées d'une manière analogue. L'anticonjuguée de l'anticonjuguée d'une forme f, n'est autre que la forme f

si $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots$ est pair, la forme $-f$ si $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots$ est impair.

Dans le premier cas on pourra choisir pour les paramètres $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ de f des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) de $n+1$ paramètres réels $\mu_0, \ldots, \mu_n$ de telle sorte que chaque forme f soit complexe conjuguée de son anticonjuguée. Si l'on effectue sur les variables les substitutions linéaires correspondant à la transformation projective (complexe) la plus générale de E_{2s-1} changeant deux points anticonjugués en deux points anticonjugués, la forme f sera remplacée par une forme f' dont les coefficients $\mu'_0, \ldots, \mu'_n$ se déduiront de $\mu_0, \ldots, \mu_n$ par une substitution linéaire réelle. On aura ainsi dans l'espace réel E_n un groupe projectif isomorphe au groupe quaternionien de E_{s-1} et ne laissant invariante aucune variété plane.

Dans le second cas on regardera les paramètres $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ comme des nombres complexes arbitraires; toute transformation projective de E_{2s-1} changeant deux points anticonjugués en deux points anticonjugués donnera naissance dans l'espace réel E_{2n+1} à un groupe projectif ne laissant invariante aucune variété plane. Ce groupe est d'ailleurs invariant dans un groupe à un paramètre de plus, ne laissant invariante aucune variété plane, et obtenu en composant le premier groupe avec le groupe à un paramètre réel k

$$\lambda'_0 = e^{ik}\lambda_0, \qquad \lambda'_1 = e^{ik}\lambda_1, \qquad \ldots, \qquad \lambda'_n = e^{ik}\lambda_n.$$

Si l'on prend, par exemple, $r=4$, $f_0 \equiv x_{12}$, on obtient dans E_3 un groupe projectif réel, qui rentre dans la première catégorie, et est le groupe projectif de la quadrique

$$\lambda_{12}\lambda_{34} - \lambda_{13}\overline{\lambda}_{13} - \lambda_{24}\overline{\lambda}_{24} = 0,$$

où λ_{12}, λ_{34} sont des variables réelles. *La géométrie hyperbolique de* E_5, *et par suite la géométrie conforme de* E_4 *sont donc équivalentes à la géométrie projective de la droite quaternionienne* ([105]), ([106]).

b. Les géométries projectives réelles équivalentes à la géométrie de la forme d'Hermite

$$\varepsilon_1 x_1\overline{x}_1 + \varepsilon_2 x_2\overline{x}_2 + \ldots + \varepsilon_r x_r\overline{x}_r.$$

s'obtiennent d'une manière analogue. Convenons de regarder comme identiques les deux formes élémentaires dualistiques

$$x_{i_1 i_2\ldots i_h} \quad \text{et} \quad (i_1 i_2 \ldots i_h i_{h+1} \ldots i_{r-1})\, u_{i_{h+1} i_{h+2}\ldots i_r},$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sont à l'ordre près les r indices $1, 2, \ldots, r$ et où $(i_1 i_2 \ldots i_r)$ est ± 1 suivant que la permutation indiquée est paire ou impaire. Appelons de plus *anticonjuguée* d'une forme f celle qu'on obtient en remplaçant chaque coefficient par son complexe conjugué et chaque variable

$$x_{i_1 i_2\ldots i_h}$$

par

$$\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\ldots\varepsilon_{i_h}\overline{u}_{i_1 i_2\ldots i_h}.$$

L'anticonjuguée de l'anticonjuguée de la forme f du système linéaire considéré précédemment est égale à

$$(-1)^{(r-1)(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots)}(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_r)^{\alpha_1+\alpha_3+\ldots} f.$$

1° Si l'on a $\alpha_i = \alpha_{r-i}$ et si l'on n'a pas à la fois les trois relations

$$(-1)^r = 1, \qquad (-1)^{\frac{r}{2}} = -1, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_r = (-1)^{\frac{r}{2}+1},$$

il est possible de choisir pour les coefficients λ de la forme f des combinaisons linéaires de $n+1$ coefficients réels $\mu_0, \ldots, \mu_n$ de manière que chaque forme f soit complexe conjuguée de son anticonjuguée. Les transformations du groupe hermitien fournissent alors dans l'espace réel E_n des μ un groupe projectif réel ne laissant invariante aucune variété plane.

2° Dans tous les autres cas on obtient dans l'espace E_{2n+1} un groupe réel invariant dans un groupe à un paramètre de plus.

Si, par exemple, $r=4$, $f_0 = x_{12}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$, on a dans E_5 un groupe de la première classe, qui n'est autre que le groupe projectif de la quadrique

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\lambda_{34}\overline{\lambda}_{34} + \varepsilon_1\varepsilon_3\lambda_{24}\overline{\lambda}_{24} + \varepsilon_1\varepsilon_4\lambda_{23}\overline{\lambda}_{23} = 0.$$

La géométrie hermitienne elliptique de E_3 *est donc équivalente à la géométrie non euclidienne elliptique de* E_5. *La géométrie hermitienne de l'hyperquadrique* $x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 - x_3\overline{x}_3 - x_4\overline{x}_4 = 0$ *est équivalente à la géométrie projective de la quadrique* $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2-z_5^2-z_6^2=0$, *c'est-à-dire à la géométrie des sphères orientées de* E_3.

41. *Géométries équivalentes à groupe fondamental simple. — En dehors d'un petit nombre de groupes à 14, 52, 76, 133 et 248 paramètres, il n'existe que trois classes de groupes simples ([220]) :

([220]) *W. KILLING, *Math. Ann.*, t. 23, 1889, p. 1; E. CARTAN, *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 45, 1893, p. 395; *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (*Thèse*, Paris, 1894).*

A. Les groupes isomorphes au groupe projectif général de E_n ;

B. Les groupes isomorphes au groupe projectif d'une quadrique non dégénérescente de E_n ;

C. Les groupes isomorphes au groupe projectif d'un complexe linéaire non dégénérescent de E_n (n impair).

Deux groupes appartenant à deux classes différentes, ou qui correspondent, dans une même classe, à des valeurs différentes de n, ne sont pas isomorphes. Il y a cependant quelques cas d'exception qui conduisent à des équivalences de géométries déjà en partie signalées.

a. Le groupe projectif d'une conique du plan est isomorphe au groupe projectif de la droite [n° 37]. *La géométrie projective d'une conique est donc équivalente à la géométrie projective de la droite.* Dans cette équivalence les points de la conique correspondent aux points de la droite.

b. Le groupe projectif d'une quadrique non dégénérescente de E_3 est isomorphe au groupe semi-simple composé de deux sous-groupes projectifs d'une droite. Par suite, *la géométrie projective d'une quadrique de* E_3 *est équivalente à l'ensemble des géométries projectives de deux droites.* A tout point d'une des droites correspond une génératrice de la première famille de la quadrique, à tout point de la seconde droite correspond une génératrice de la seconde famille. Un point de la quadrique correspond à un couple de points pris sur les deux droites. Un plan de E_3 correspond à une homographie entre les deux droites, un plan tangent à une homographie dégénérescente. Le groupe projectif de la quadrique peut d'ailleurs s'obtenir par la considération du système linéaire de formes

$$\lambda_{11}x_1y_1+\lambda_{12}x_1y_2+\lambda_{21}x_2y_1+\lambda_{22}x_2y_2,$$

où (x_1, x_2) sont les coordonnées homogènes d'un point de la première droite, (y_1, y_2) celles d'un point de la seconde droite, $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22})$ celles d'un point de l'espace ; la quadrique a alors pour équation

$$\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}=0.$$

c. Le groupe projectif d'une quadrique non dégénérescente de E_4 est isomorphe au groupe projectif d'un complexe linéaire de E_3. *La géométrie projective d'un complexe linéaire de* E_3 *est donc équivalente à la géométrie projective d'une quadrique de* E_4, *ou à la géométrie conforme de* E_3, *ou à la géométrie des cycles du plan.* L'équivalence peut être mise en évidence en remarquant que les coordonnées

plückériennes d'une droite appartenant à un complexe linéaire non dégénérescent sont cinq quantités (homogènes) liées par une relation homogène du second degré. Toute droite du complexe linéaire correspond, dans la géométrie non euclidienne de E_4, à un point de la quadrique fondamentale ; dans la géométrie conforme de E_3, à un point (221) ; dans la géométrie des cycles du plan, à un cycle. Tout point de E_3, dans la géométrie projective orientée d'un complexe linéaire, correspond dans la géométrie conforme de E_3 à une droite isotrope ; dans la géométrie des cycles, à un faisceau de cycles tangents, ou à un élément orienté.

d. Le groupe projectif d'une quadrique non dégénérescente de E_5 est isomorphe au groupe projectif général de E_3. *La géométrie projective de* E_3 *est donc équivalente à la géométrie projective d'une quadrique de* E_5, *ou à la géométrie conforme de* E_4, *ou à la géométrie des sphères orientées de* E_3. Nous avons déjà signalé cette équivalence [n° 13].

Tout ce qui précède s'applique essentiellement au domaine *complexe*. Dans le cas des groupes à paramètres réels, chaque classe de groupes simples complexes correspond à plusieurs types de groupes simples réels admettant entre eux un isomorphisme imaginaire, mais non réel. Nous avons déjà indiqué quels sont les types qui correspondent à la classe A.

Dans la classe B, on a les groupes isomorphes aux groupes projectifs d'une quadrique réelle de E_n et, de plus, si n est impair, les groupes isomorphes au groupe formé des transformations projectives complexes de E_n qui laissent invariante la quadrique

$$x_1x_2+x_3x_4+\ldots+x_nx_{n+1}=0$$

et l'hyperquadrique

$$x_1\bar{x}_1-x_2\bar{x}_2+x_3\bar{x}_3-x_4\bar{x}_4+\ldots+x_n\bar{x}_n-x_{n+1}\bar{x}_{n+1}=0.$$

Dans la classe C, on obtient les groupes isomorphes au groupe projectif réel d'un complexe linéaire réel de E_n (n impair) et, de plus, les groupes isomorphes aux groupes donnés des transformations projectives complexes qui laissent invariant le complexe linéaire

$$p_{12}+p_{34}+\ldots+p_{n,n+1}=0$$

(221) C. Segre (*Atti Accad. Torino*, t. 19, 1883, p. 159) développe des analogies métriques entre la géométrie conforme et la géométrie projective de E_3 (le *point* correspondant à la *droite*, la *sphère* au *complexe linéaire*).

et l'hyperquadrique (222)

$$\varepsilon_1(x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2)+\varepsilon_2(x_3\bar{x}_3+x_4\bar{x}_4)+\ldots+\varepsilon_{\frac{n+1}{2}}(x_n\bar{x}_n+x_{n+1}\bar{x}_{n+1})=0$$
$$(\varepsilon_i^2=1).$$

Aux équivalences signalées plus haut, dans le domaine complexe, correspondent dans le domaine réel, les équivalences suivantes :

a. La géométrie projective de la droite réelle est équivalente à la géométrie non euclidienne hyperbolique du plan et à la géométrie hermitienne hyperbolique de la droite.

a'. La géométrie non euclidienne elliptique du plan est équivalente à la géométrie hermitienne elliptique de la droite. Un point du plan non euclidien elliptique correspond à un couple de points anticonjugués de la droite (223).

b. La géométrie projective réelle d'une quadrique réelle réglée de E_3 *est équivalente à l'ensemble des géométries projectives réelles de deux droites réelles* (224).*

b'. La géométrie non euclidienne hyperbolique de E_3 *(ou géométrie projective d'une quadrique réelle non réglée) est équivalente à la géométrie projective de la droite complexe.* Il en est de même de la *géométrie des rayons vecteurs réciproques du plan.* A tout point $x+iy$ de la droite complexe on peut faire correspondre un point du plan réel et, par projection stéréographique, un point de la sphère réelle de Riemann. Les transformations projectives de la droite complexe, qui dépendent de six paramètres réels, donnent $x'+iy'$ en fonction linéaire soit de $x+iy$, soit de $x-iy$. Les formules ainsi obtenues représentent, dans le plan réel, les transformations par rayons vecteurs réciproques; sur la sphère réelle, les transformations projectives qui laissent la sphère invariante (suivant qu'elles laissent invariante chacune des familles de génératrices imaginaires de la sphère ou qu'elles échangent ces deux familles l'une avec l'autre) (225). A ce point de vue on peut donner des formes binaires une interprétation dans le plan et sur la sphère. Les formes quadratiques et cubiques sont déjà considérées par E. Beltrami dans le plan de Gauss (226); F. Klein a fait un usage systématique de la représentation sur la sphère des formes biquadratiques et d'une manière générale des formes qui admettent des transformations linéaires (en particulier formes des polyèdres réguliers) (227).

La géométrie projective de la droite complexe peut encore être regardée comme la géométrie hermitienne elliptique de la droite, quand on considère la droite comme engendrée par des points *bicomplexes*. La géométrie hermitienne elliptique de la droite complexe étant équivalente à la géométrie euclidienne de la sphère réelle (228), il en résulte l'*équivalence entre la géométrie projective de la droite complexe, la géométrie hyperbolique de* E_3, *la géométrie des rayons vecteurs réciproques du plan et la géométrie euclidienne de la sphère complexe.*

(222) E. Cartan, *Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. 31, 1914, p. 263.*

(223) Les transformations hermitiennes elliptiques de la droite peuvent se mettre sous la forme

$$z'=\frac{(d+ic)z-(b-ia)}{(c+ia)z+(d-ic)}.$$

On peut faire la représentation de la droite complexe sur une sphère réelle (voir *b'*) de manière que deux points *anticonjugués* de la droite deviennent deux points *symétriques* de la sphère. Les formules précédentes représentent alors les *rotations* de la sphère autour de ses diamètres; elles se présentent déjà dans A. Cayley, *Math. Ann.*, t. 15, 1879, p. 238; Papers 10, p. 153. *Voir* aussi : F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, p. 34. Elles étaient déjà connues de W. Gauss [*Werke*, t. 8, Göttingue (Leipzig), 1900, p. 355]. On peut aussi représenter ces relations par la formule

$$X'=A^{-1}XA,$$

X désignant un vecteur variable, A un quaternion.

L'équivalence signalée entre la géométrie du plan elliptique et la géométrie hermitienne elliptique de la droite devient, par la représentation de la droite sur la sphère, l'équivalence entre la géométrie du plan elliptique et la géométrie euclidienne de la sphère, un point du plan elliptique correspondant à deux points symétriques de la sphère.

(224) Les points de la première droite correspondent aux génératrices de la première famille de la quadrique, les points de la seconde droite aux génératrices de la seconde famille. En réalité, pour représenter le groupe projectif total de la quadrique il faudrait encore composer les transformations projectives des deux droites avec une certaine correspondance homographique entre les deux droites; par cette correspondance, les deux familles de génératrices sont échangées entre elles.*

(225) Cette interprétation des transformations homographiques d'une variable complexe se trouve déjà essentiellement dans A. F. Möbius, *Ber. Ges. Lpz.*, t. 4, 1852, p. 41; *Werke*, t. 2, Leipzig, 1886, p. 189; *voir* aussi : *Ber. Ges. Lpz.*, t. 5, 1853, p. 14; *J. Reine Angew. Math.*, t. 52, 1856, p. 218; *Werke*, t. 2, p. 206; *Abh. Ges. Lpz.* (math.), t. 2, 1855, p. 529; *Werke*, t. 2, p. 243. Elle est aussi utilisée occasionnellement par B. Riemann [*Werke*, publ. par H. Weber (1re éd.), Leipzig, 1876, p. 287, en partic. n° 8; (2e éd.), Leipzig, 1892, p. 301; trad. L. Laugel, Paris, 1898, p. 305]. Elle a été systématiquement étudiée par F. Klein (*Progr. Erlangen*, § 6; *Math. Ann.*, t. 8, 1875, p. 113, en partic. p. 185).

(226) E. Beltrami, *Memorie Ist. Bologna*, (3), t. 9, 1869, p. 607; *Opere mat.*, t. 2, Milan, 1904, p. 129.

(227) F. Klein, *Progr. Erlangen*, note VIII; *Math. Ann.*, t. 9, 1875, p. 183; *Vorlesungen über Ikosaeder*, Leipzig, 1884.

On trouvera d'autres applications dans L. Wedekind, *Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen*, Diss. Erlangen, 1875; *Math. Ann.*, t. 9, 1875, p. 209. *Cf.* A. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, publ. par F. Lindemann, t. 2, Leipzig, 1891, p. 606 et suiv.

Dans cette équivalence les *rayons* de l'espace hyperbolique correspondent aux points complexes de la sphère (228).

H. Beck a étudié la correspondance entre les rayons de l'espace hyperbolique et les couples de points du plan réel considéré dans la géométrie des rayons vecteurs réciproques (229).*

b''. La géométrie non euclidienne elliptique de E_3 *est équivalente à la géométrie non euclidienne elliptique de deux plans, ou encore à la géométrie hermitienne elliptique de deux droites, ou encore à la géométrie euclidienne de deux sphères.* Les translations, dextrorsum ou sinistrorsum, de l'espace elliptique correspondent aux déplacements elliptiques de l'un ou l'autre des deux plans, aux transformations hermitiennes de l'une ou l'autre des deux droites (230), aux rotations de l'une ou l'autre des deux sphères. Toute droite de l'espace elliptique correspond à un couple de points réels pris dans les deux plans ; toute droite orientée réelle, à un couple de points réels pris sur les deux sphères (231).

c. La géométrie projective réelle de la quadrique

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2-z_5^2=0$$

de E_4 *ou encore la géométrie des cycles du plan, est équivalente à la géométrie projective réelle d'un complexe linéaire de* E_3. Un point réel de la quadrique de E_4 correspond à un cycle réel du plan et à une droite réelle du complexe linéaire fondamental de E_3. Une génératrice réelle de la quadrique de E_4 correspond à un faisceau de cycles tangents du plan et à un point réel de E_3 (232).

c'. La géométrie non euclidienne hyperbolique réelle de E_4 *ou encore la géométrie conforme réelle de* E_3, *est équivalente à la géométrie projective d'un complexe linéaire*

$$p_{12}+p_{34}=0$$

(228) E. Study, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 11, 1902, p. 331.*

(229) H. Beck, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 11, 1910, p. 414.*

(230) E. Study, *Amer. J. Math.*, t. 29, 1907, p. 148.*

(231) E. Study, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 11, 1902, p. 313 en partic., p. 318 et suiv. ; t. 15, 1906, p. 476. *Voir* aussi : J. S. Coolidge, *Atti Accad. Torino*, t. 39, 1903/5, p. 175. E. Salkowski, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 21, 1912, p. 27.*

(232) La correspondance ainsi établie entre les points de E_3 et les faisceaux de cycles tangents, ou les éléments orientés du plan, met en évidence l'équivalence du groupe d'un complexe linéaire de E_3 et du groupe irréductible des transformations de contact du plan qui changent les cycles en cycles. *Cf.* notes (135), (136).*

et d'une hyperquadrique

$$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2-x_3\bar{x}_3-x_4\bar{x}_4=0$$

de l'espace E_3. Si l'on convient, dans la dernière géométrie, d'appeler anticonjugué du point (x_1, x_2, x_3, x_4) le plan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$, anticonjuguée d'une droite l'intersection de deux plans anticonjugués de deux de ses points, les points réels de la quadrique fondamentale de E_4 ou les points de la géométrie conforme de E_3 correspondent aux droites du complexe linéaire fondamental de E_3 qui sont leurs propres anticonjuguées.

c''. La géométrie non euclidienne elliptique réelle de E_4 *est équivalente à la géométrie projective du complexe linéaire*

$$p_{12}+p_{34}=0$$

et de l'hyperquadrique

$$x_1x_1+x_2x_2+x_3x_3+x_4x_4=0$$

de l'espace E_3. Convenons d'appeler dans E_3, anticonjugué du point (x_1, x_2, x_3, x_4) le plan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$. Les points réels de E_4 correspondent dans E_3 aux complexes linéaires en involution avec le complexe linéaire fondamental et jouissant de la propriété d'être leurs propres anticonjugués.

d. La géométrie projective réelle de la quadrique

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2-z_5^2-z_6^2=0$$

de E_5 *est équivalente à la géométrie projective générale réelle de* E_3. Les points réels de la quadrique correspondent aux droites réelles de E_3, les points réels de E_5 aux complexes linéaires de E_3 [n° **10**].

d'. La géométrie projective réelle de la quadrique

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2-z_5^2-z_6^2=0$$

ou encore la géométrie des sphères orientées de E_3 *est équivalente à la géométrie hermitienne de* E_3 *avec l'hyperquadrique fondamentale*

$$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2-x_3\bar{x}_3-x_4\bar{x}_4=0.$$

Les points réels de la quadrique fondamentale de E_5, ou les sphères orientées réelles de E_3 correspondent aux droites de la géométrie hermitienne qui sont leurs propres anticonjuguées.

d''. La géométrie non euclidienne hyperbolique réelle de E_5, *et la* *géométrie conforme réelle de* E_4 *sont équivalentes à la géométrie projective de la droite quaternionienne.* Tout point de la droite quaternionienne correspond à un point de E_4 et à un point de la quadrique fondamentale de E_5. Par cette correspondance, les transformations conformes réelles de E_4 se représentent analytiquement par la formule

$$x' = (ax+b)(a'x+b')^{-1}.$$

d'''. La géométrie non euclidienne elliptique réelle de E_5 *est équivalente à la géométrie hermitienne elliptique de* E_3. Un point réel de E_5 correspond à un complexe linéaire de E_3 identique à son anticonjugué.

d''''. La géométrie hermitienne hyperbolique de E_3 *est équivalente à la géométrie projective de la quadrique fondamentale*

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$$

et de l'hyperquadrique fondamentale

$$x_1\overline{x}_1 - x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3 - x_4\overline{x}_4 + x_5\overline{x}_5 - x_6\overline{x}_6 = 0$$

de l'espace E_5.

Citons enfin les équivalences suivantes déjà signalées :

e. La géométrie projective de la droite duale réelle est équivalente à la géométrie de Laguerre du plan réel [n° 18].

e'. La géométrie hermitienne elliptique de la droite duale est équivalente à la géométrie euclidienne de E_3.

f. La géométrie projective du plan dual réel est équivalente à la géométrie projective duale de l'espace euclidien E_3 [n° 20].

Parmi les géométries équivalentes à groupe fondamental infini, contentons-nous de rappeler la géométrie conforme du plan euclidien et la géométrie équilonge du plan elliptique. Un point du plan euclidien correspond à une droite du plan elliptique.

42. Géométrie admettant comme groupe fondamental un sous-groupe fondamental d'une autre géométrie. Subordination des géométries euclidienne et non euclidienne à la géométrie projective. — Si le groupe fondamental g d'une géométrie est un sous-groupe du groupe fondamental G d'une autre géométrie, toutes les propriétés des figures qui ont une signification dans la seconde géométrie en ont aussi une dans la première, mais la réciproque n'est pas vraie. Si cependant le premier groupe g est formé de toutes les transformations du second

groupe qui laissent invariante une certaine figure Γ, les propriétés des figures qu'on étudie dans la première géométrie appartiennent également au domaine de la seconde géométrie, mais à une condition, c'est qu'elles soient regardées non comme des propriétés intrinsèques de ces figures, mais comme des propriétés du système formé de ces figures et de la figure Γ.

Nous pouvons, par suite, regarder la première géométrie comme une partie de la seconde, caractérisée par l'*adjonction* de la figure Γ.

Un exemple classique est formé par la *géométrie élémentaire* E_3 (ou la géométrie métrique euclidienne), *qui peut être déduite de la géométrie projective réelle de* E_3 *par l'adjonction du cercle imaginaire de l'infini.* De même, la géométrie non euclidienne peut se déduire de la géométrie projective par l'adjonction d'une surface non dégénérescente du second ordre, sans points réels dans le cas de la géométrie elliptique, à points réels mais non réglée dans le cas de la géométrie hyperbolique.

C'est à Poncelet qu'est due l'introduction en géométrie du cercle imaginaire à l'infini : mais ce géomètre, comme plus tard Plücker et Chasles, n'utilisait qu'occasionnellement ce cercle imaginaire pour mettre sous une forme projective certains théorèmes métriques ; dans son esprit la géométrie projective était encore subordonnée à la géométrie métrique, la notion projective de rapport anharmonique par exemple ayant une origine purement métrique. Le point de vue opposé commença à devenir possible quand Laguerre ([233]), se demandant ce que devient un angle par une transformation homographique, eut démontré que l'angle de deux droites est égal au produit par $\frac{1}{2i}$ du logarithme d'un certain rapport anharmonique, donnant ainsi une forme projective à toute relation entre des angles. A. Cayley ([234]) alla plus loin : il indiqua des formules donnant la distance de deux points et l'angle de deux droites comme des invariants simultanés de ces deux éléments et de l'équation de « l'absolu » ; il résolut aussi implicitement le même problème pour le cas non euclidien en remplaçant (dans le plan) les deux points cycliques à l'infini par une conique non dégénérescente. Si la conique, regardée comme enveloppe de ses tangentes, se décompose en deux points, les formules de A. Cayley donnent à la

([233]) *Nouv. Ann. Math.*, (1), t. 12, 1853, p. 57 ; *Œuvres*, t. II, Paris, 1905, p. 6 ; *voir* en partic. n° 4.

([234]) *Phil. Trans. London*, t. 149, 1859, p. 61 ; Papers 2, Cambridge, 1889, p. 561. *Voir* en partic. les n°s 209 et suiv. *(on the theory of distance).*

limite les formules de la métrique euclidienne [235]. A Cayley arrive ainsi à la conclusion suivante : « Les propriétés métriques d'une figure ne sont pas des propriétés de la figure considérée *en soi*, mais des propriétés de cette figure considérée dans ses relations avec une autre figure, la conique absolue. La géométrie métrique est une partie de la géométrie projective ; on passe de celle-ci à celle-là en fixant la conique absolue. »

F. Klein mit en évidence l'importance géométrique de la métrique générale de A. Cayley en montrant que non seulement elle donnait comme cas particulier la métrique euclidienne, mais encore qu'elle conduisait de même aux géométries métriques qu'avaient fait naître les théories sur les parallèles de Gauss-Lobatchewsky-Bolyai et les spéculations analogues de Riemann et de Helmholtz [236]. Il a en même temps développé le point de vue axiomatique de la théorie de A. Cayley et l'a systématisée à la lumière de la théorie des groupes [237].

La situation de la géométrie métrique vis-à-vis de la géométrie projective se trouve ainsi précisée. Tout théorème de la géométrie projective de E_3, dans lequel entre une quadrique invariante, peut être regardé comme établissant une propriété de la métrique générale de Cayley. Si ce théorème conserve sa signification lorsque la quadrique se réduit, comme enveloppe, à une conique, on obtient une propriété de la métrique euclidienne. Réciproquement étant donné un théorème de la métrique euclidienne, on peut se demander s'il peut être regardé comme un cas particulier d'un théorème plus général, dans lequel le cercle de l'infini serait remplacé par une quadrique quelconque [238].

La géométrie élémentaire peut être dérivée d'autres géométries que la géométrie projective. On peut, par exemple, la déduire de la géométrie conforme en fixant un point de l'espace et faisant jouer aux ∞^3 sphères qui passent par ce point le rôle des ∞^3 plans (n° 12).

([235]) Les considérations de A. Cayley ont été reprises et développées par W. Fiedler [*Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen*, Leipzig, 1862, n^os^ 24/5; *Analystische Theorie der Kegelschnitte*, nach G. Salmon frei bearbeitet (2e éd.), Leipzig, 1866, n^os^ 366 et suiv.].

([236]) F. Klein, *Math. Ann.*, t. 4, 1871, p. 573.

([237]) F. Klein, *Math. Ann.*, t. 6, 1873, p. 111. Dans ce Mémoire, F. Klein étend la théorie au cas de l'espace E_n et démontre la possibilité d'édifier la géométrie projective suivant l'idée de K. G. Chr. von Staudt sans supposer le postulatum d'Euclide. Cf. *Math. Ann.*, t. 7, 1874, p. 531.

([238]) On trouvera des exemples dans W. Fr. Meyer, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.* t. 12, 1903, p. 137; *voir* aussi une série d'articles du même auteur : *Archiv. Math. Phys.*, (3), t. 1, 1901 ; (3), t. 5, 1903; (3) t. 8, 1904; *voir* aussi : *Verhandl. des 3. internat. Math.-Kongress Heidelberg*, 1904, publ. par A. Krazer, Leipzig, 1905, p. 322.

La géométrie élémentaire se déduit encore de la géométrie projective radiale en fixant la « congruence absolue » [239]. Cette congruence absolue, définie dans le premier continuum naturel de rayons, par l'équation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$$

se compose de tous les rayons propres qui se coupent eux-mêmes orthogonalement et de tous les rayons points qui sont à eux-mêmes doublement orthogonaux. La congruence absolue joue ainsi pour la géométrie euclidienne de l'espace E_3 considéré comme engendré par des rayons, le même rôle que le complexe de ∞^3 droites isotropes dans l'espace réglé.

43. Subordination de la géométrie projective à des géométries dont le groupe contient le groupe projectif comme sous-groupe. — De même que la géométrie métrique se subordonne à la géométrie projective, celle-ci se subordonne à d'autres géométries, en particulier à la géométrie dont le groupe est formé de toutes les transformations ponctuelles analytiques, et aussi à l'*analysis situs* [240].

La géométrie projective complexe se déduit de la géométrie de toutes les transformations ponctuelles analytiques en fixant l'ensemble des plans, de même que la géométrie élémentaire se déduit de la géométrie projective en fixant le cercle imaginaire de l'infini. C'est ainsi que, du point de vue de la géométrie des transformations ponctuelles analytiques, la propriété d'une surface de E_3 d'être algébrique d'un certain ordre exprime une relation invariante de cette surface avec la famille des plans de l'espace ; ce point de vue est d'ailleurs mis en évidence par la génération des surfaces due à H. Grassmann.

De même, *la géométrie projective réelle se déduit de l'analysis situs, c'est-à-dire de la géométrie de toutes les transformations ponctuelles réelles bicontinues et biunivoques, en fixant le système des plans réels.*

Cette subordination de la géométrie métrique à la géométrie projective et de celle-ci à l'analysis situs a une importance philosophique

([239]) E. Study, *Geometrie der Dynamen*, p. 292. On peut déduire de la même manière, des sous-groupes invariants G_{16}, G_9, G_8 du groupe G_{17} des projectivités radiales, les sous-groupes invariants du groupe fondamental de la géométrie élémentaire, à savoir les groupes des déplacements euclidiens, des homothéties, et des translations.

([240]) F. Klein, *Progr. Erlangen*, § 8, n° 3.

considérable. Elle permet, dans une exposition logique de la géométrie, de commencer par l'analysis situs qui n'utilise que les notions les plus générales de courbe, de surface, de multiplicité continue à un nombre quelconque de dimensions, puis d'arriver à la géométrie projective en introduisant les notions nouvelles de « plan » et de « droite », et enfin à la géométrie élémentaire en fixant le cercle imaginaire à l'infini et en en déduisant les notions d'angle et de distance.

On passe de même :

a. de la géométrie de toutes les transformations ponctuelles analytiques biunivoques à la géométrie des transformations birationnelles en fixant le système de toutes les multiplicités algébriques ;

b. de la géométrie de toutes les transformations de contact analytiques à la géométrie des sphères orientées de S. Lie en fixant le système des ∞^4 sphères, puis de la géométrie de Lie à la géométrie conforme d'une part, à la géométrie de Laguerre d'autre part, en fixant soit le système de tous les points, soit le système de tous les plans;

c. de la géométrie conforme du plan à la géométrie des rayons vecteurs réciproques du plan en fixant le système des cercles ;

d. de la géométrie équilonge du plan à la géométrie de Laguerre en fixant le système des cycles.*

III. — RECHERCHES SPÉCIALES SUR LES INVARIANTS DES GROUPES

44. Invariants. Invariants différentiels. — Nous avons déjà indiqué [nº 3] ce qu'on entend d'une manière générale par *invariants* d'un groupe de transformations géométriques.

Considérons un ensemble de figures dépendant d'un nombre fini de paramètres arbitraires et tel que les figures de cet ensemble soient échangées les unes avec les autres par toute transformation du groupe.

On appelle *invariant absolu* une fonction analytique des paramètres jouissant de la propriété de se reproduire lorsqu'on applique aux figures de l'ensemble les transformations du groupe : un invariant absolu a même valeur numérique pour une figure quelconque de l'ensemble et pour toutes les figures transformées. Un invariant absolu est donc, dans la géométrie qui admet le groupe donné pour groupe fondamental, une quantité liée d'une manière invariable à la figure considérée.

On appelle *invariant relatif* une fonction analytique des paramètres qui se reproduit à un coefficient près dépendant de la transformation effectuée sur les figures considérées. L'équation obtenue en annulant un invariant relatif exprime une propriété invariante de la figure.

On considère aussi des invariants fonctions non seulement des paramètres de la figure, mais encore des variables ou même de plusieurs séries de variables ; ces invariants rentrent dans les précédents, en considérant la figure formée de la figure dont il s'agit et d'un ou plusieurs points (ou éléments générateurs de l'espace) arbitraires. L'équation obtenue en annulant un invariant relatif peut, à ce point de vue plus général, représenter une nouvelle figure liée d'une manière invariante à la première.

On peut aussi considérer un ensemble de figures dépendant d'une infinité de paramètres arbitraires, par exemple l'ensemble des courbes, des surfaces, etc., de l'espace. On pourrait à cet égard introduire des invariants *fonctionnels* ; mais en réalité on n'a considéré jusqu'ici que des *invariants différentiels* ([241]), fonctions des variables et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. En réalité ce sont des invariants de la figure formée par la courbe (ou surface, etc.), considérée au voisinage d'un de ses points. Ces invariants différentiels suffisent d'ailleurs à caractériser chacune des figures de l'ensemble vis-à-vis du groupe, en ce sens que leur connaissance suffit pour reconnaître si deux figures sont *homologues* (c'est-à-dire si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation du groupe). La notion d'invariant différentiel étend ainsi le domaine de la géométrie des transformations aux problèmes de

---

([241]) La notion d'invariant différentiel entre déjà, d'une manière plus ou moins précise, dans les premiers travaux de S. Lie [*Forhandlingar Videnskabs-Selskabet Christiania*, 1872 (éd. 1873) ou bien 1871 (éd. 1872); *Nachr. Ges. Gött.*, 1874, p. 529]. Le paramètre différentiel de Riemann-Schwarz (H. A. Schwarz, *J. Reine Angew. Math.*, t. 75, 1873, p. 292; *Werke*, t. 2, Berlin, 1890, p. 211) est un exemple isolé d'invariant différentiel du groupe projectif. Ce sont les travaux de G. H. Halphen et de E. Laguerre, entre 1875 et 1879, qui ont donné à la théorie des invariants différentiels une grande impulsion. G. H. Halphen [*C. R. Acad. Sc.*, t. 81, 1875, p. 1053 ; *J. Math. pures et appl.*, (3), t. 2, 1876, p. 257, 371 ; *Thèse sur les invariants différentiels*, Paris, 1878; *J. Éc. polyt.*, (1), cah. 47, 1880, p. 1] étudia les invariants différentiels *projectifs* des courbes et des surfaces; E. Laguerre [*C. R. Acad. Sc.*, t. 88, 1879, p. 116, 224; *Œuvres*, t. I, Paris, 1898, p. 420, 424] étudia les invariants différentiels des équations différentielles linéaires et homogènes, c'est-à-dire les expressions invariantes vis-à-vis du groupe infini $x_1 = F(x)$, $y_1 = y\,\Phi(x)$, où F et Φ sont des fonctions arbitraires; *voir* aussi : F. Brioschi, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 7, 1879, p. 105. Toutes ces recherches sont reliées entre elles par G. H. Halphen dans un Mémoire couronné de 1881 [*Mém. présentés Acad. Sc. Paris*, (2), t. 28, 1884, Mém. nº 1, p. 1 ; *voir* aussi : *Acta math.*, t. 3, 1884, p. 325; *Œuvres complètes*. t. III].

géométrie différentielle. Par exemple, si l'on considère l'ensemble des courbes du plan dans la géométrie élémentaire, le rayon de courbure

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

d'une courbe $y=f(x)$ est un invariant différentiel relatif; il en est de même de son inverse; l'équation obtenue en annulant cet inverse donne une famille de courbes (les droites) qui jouent un rôle invariant en géométrie élémentaire. Si le groupe est infini, il se peut qu'un ensemble donné de variétés n'admette pas d'invariant différentiel; c'est ainsi que si l'on considère le groupe de toutes les transformations de contact, une équation aux dérivées partielles du premier ordre n'admet pas d'invariant. Mais il existe toujours des ensembles de variétés admettant des invariants différentiels ([242]).

S. Lie a indiqué des méthodes générales pour déterminer les invariants d'un groupe donné. Si l'on connaît les équations finies du groupe, on trouve ses invariants par des éliminations; si l'on connaît les transformations infinitésimales, on les trouve par l'intégration de systèmes complets. Cela s'applique aussi aux invariants différentiels dont S. Lie a été le premier à mettre en évidence la vraie signification et l'importance. Ils peuvent être regardés comme des invariants ordinaires d'un groupe « prolongé » ([243]) et on les obtient comme solutions de systèmes complets ([244]).

([242]) Les invariants différentiels du groupe euclidien ont été déterminés par S. Lie (*Kontinuierliche Gruppen*, p. 666, chap. 22). Les invariants différentiels de la géométrie projective ont fait l'objet de travaux récents. L. Berzolari [*Ann. mat. pura appl.*, (2), t. 26, 1897, p. 1] a déterminé les invariants différentiels projectifs d'une courbe dans l'espace E_n. Les invariants différentiels projectifs des surfaces, considérés occasionnellement par G. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, partic. t. I, Paris, 1887; t. II, Paris, 1889), ont été étudiés par E. J. Wilczynski (*Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig, 1906). *Voir* aussi, sur les surfaces réglées, différents Mémoires (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 2, 1901 et années suiv.). *Les invariants différentiels, dans la géométrie conforme, ont été déterminés par A. Tresse (*C. R. Acad. Sc.*, t. 114, 1892, p. 948); P. Calapso (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 22, 1906, p. 197); R. Rothe (*Math. Ann.*, t. 72, 1912, p. 57).*

([243]) S. Lie, *Theorie der Transfgr.* t. 1, p. 523 et suiv. *La recherche des invariants différentiels d'un groupe projectif revient à celle des invariants ordinaires d'une série de groupes projectifs dans des espaces supérieurs. *Voir* F. Engel, *Leipz. Ber.*, 1893, p. 476.*

([244]) S. Lie, *Archiv. for Math. og Naturvidenskab* (Christiania), t. 7, 1882, p. 192; *Forhandlingar Videnskab-Selskabet Christiania*, 1882 (éd. 1883) ou bien 1881 (éd. 1882), p. 21, 22; *Math. Ann.*, t. 24, 1884, p. 552, 566; *Transformationsgruppen*, t. 1, p. 549. *Cf.* M. Nöther, *Math. Ann.*, t. 53, 1900, p. 1, en partic. p. 33 et suiv.

La théorie de S. Lie a l'avantage d'une très grande généralité; mais, outre l'inconvénient d'exiger des intégrations, elle en a un autre plus grave, c'est de ne résoudre les problèmes relatifs aux invariants que du point de vue des fonctions analytiques. Ses résultats ne se rapportent en général qu'à un certain domaine autour d'un point et ne peuvent pas, à cause de la généralité même de la théorie, être étendus à tout l'espace ([245]). En particulier, la théorie de S. Lie ne peut remplacer la théorie *algébrique* des invariants du groupe projectif général, ou de ses sous-groupes algébriques, et des autres groupes algébriques (comme les groupes de Cremona) qui sont équivalents à des groupes projectifs et dont les théories doivent se rapporter à tout l'espace. Il semble d'ailleurs difficile d'appliquer à un groupe algébrique la théorie générale des groupes de transformations pour faire seulement ensuite droit aux exigences de l'algèbre. Les théories algébriques des invariants conservent donc leur autonomie et doivent être traitées par des méthodes qui leur soient propres.

45. **Théorie des invariants du groupe linéaire.** — La théorie des invariants du groupe linéaire, autrement dit la théorie des formes algébriques, s'est surtout développée grâce aux progrès de la géométrie analytique et aussi de la théorie des déterminants et de certaines questions de la théorie des nombres. Elle a constitué bientôt un corps de doctrine autonome, ses points de vue et ses méthodes débordent aujourd'hui au-delà du cadre de la géométrie ordinaire. Il existe des règles et des méthodes générales pour former les invariants d'une forme algébrique donnée. Le problème qu'on s'est d'abord presque exclusivement proposé de résoudre est la formation de fonctions *rationnelles*, *entières*, homogènes des coefficients de la forme (*invariants*) ou encore fonctions des coefficients et des variables (*covariants*), jouissant de la propriété de se reproduire, par une substitution linéaire, à un facteur près, puissance entière du déterminant de la substitution. Ces fonctions étant évidemment en nombre infini, on s'est également proposé d'établir les relations identiques qui existent entre elles. Enfin on s'est proposé de rechercher un nombre fini d'invariants entiers rationnels tels que tout autre invariant rationnel entier s'exprime en fonction rationnelle entière de ceux-là. La possibilité de ce dernier problème cons-

([245]) *E. Study (*Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 17, 1908, p. 125) a fait, de ce point de vue une critique intéressante de la méthode de S. Lie. *Voir*, au sujet de cette critique, F. Engel, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. 17, 1908, p. 143.*

titue un théorème important de la théorie, démontré dans toute sa généralité par A. Hilbert (246).

E. Study (247) suivant une idée de L. Kronecker (248) a étendu la théorie précédente en considérant des invariants irrationnels, comme on l'avait déjà fait d'ailleurs dans des recherches particulières (relatives par exemple aux fonctions elliptiques, hyperelliptiques et abéliennes). Il distingue les invariants (et covariants) « rationnels et entiers », « rationnels », «algébriques entiers » et « algébriques ». Les invariants et covariants des deux dernières catégories sont définis par des équations algébriques dont les coefficients sont des invariants et covariants rationnels entiers, ou simplement rationnels. Toutes ces quantités se reproduisent, par une substitution linéaire des variables, à une puisssance près à exposant rationnel du déterminant de la substitution. E. Study les obtient en appliquant la méthode symbolique, puisque la théorie des invariants irrationnels et fractionnaires se ramène à celle des invariants entiers. E. Study pose le problème de la représentation au moyen d'un nombre fini d'invariants fondamentaux, en spécifiant si la représentation doit être rationnelle et entière, ou rationnelle, etc.

A. Hilbert a démontré le théorème fondamental suivant (249) :

Parmi les invariants rationnels entiers d'un système de formes, on peut toujours en déterminer un nombre fini entre lesquels il n'existe aucune relation algébrique à coefficients constants et au moyen desquels tout autre invariant puisse s'exprimer d'une manière algébrique et entière. A ces invariants particuliers, on peut adjoindre encore un invariant tel que tous les autres puissent s'exprimer rationnellement au moyen de celui-ci et des précédents.

46. Interprétation de la théorie des invariants linéaires au moyen de la géométrie projective. — La géométrie projective de E_{n-1} fournit une interprétation, dont on s'est souvent servi, des invariants et covariants des formes algébriques à n variables. On regarde pour cela les n variables comme les coordonnées homogènes d'un point de E_{n-1} et une forme f

(246) *Math. Ann.*, t 36, 1890, p. 473, en partic. p. 531.

(247) *Methoden zur Theorie der ternären Formen*, Leipzig, 1889. *Voir* aussi : *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 39, 1887, p. 137. On trouvera des applications particulières, principalement aux fonctions elliptiques, *Amer. J. Math.*, t. 16, 1894, p. 156; t. 17, 1895, p. 185, 216.

(248) *J. Reine Angew. Math.*, t. 92, 1882, p. 1.

(249) A. Hilbert, *Math. Ann.*, t. 42, 1893, p. 313. *Voir* aussi : *Mathematical papers of the Chicago Congress*, 1893, éd. New York, 1896, p. 116.

comme le premier membre de l'équation d'une variété algébrique. Dans cette interprétation on ne distingue donc pas entre deux formes qui diffèrent d'un facteur constant.

Les invariants et les covariants de la forme algébrique f, fournissent, égalés à zéro, toutes les équations qui expriment des propriétés projectives de la variété $f = 0$, ou représentent d'autres variétés liées d'une manière projective à celle-ci.

En particulier, l'équation obtenue en annulant un invariant (formé au moyen des seuls coefficients de la forme f) donne la condition pour que la variété $f = 0$ possède une certaine propriété projective.

L'équation obtenue en annulant un covariant formé au moyen d'une seule série de variables représente une nouvelle variété ponctuelle qui a avec $f = 0$ une relation projective. S'il entre dans le covariant plusieurs séries de variables, l'équation peut être interprétée géométriquement par des connexes, complexes etc.

Les équations qui expriment qu'un covariant est *identiquement* nul traduisent, elles aussi, une propriété projective de la variété $f = 0$.

Si n est supérieur ou égal à 3, on considère aussi des « contravariants » et des « formes mixtes ». On désigne sous le nom de contravariant, pour $n = 3$ et quand la forme donnée ne dépend que d'une série de variables, des fonctions qui, en outre des coefficients de la forme, contiennent une ou plusieurs séries de variables se transformant par des substitutions linéaires contragrédientes de celles qui sont appliquées aux variables primitives. Ces nouvelles variables peuvent donc être regardées comme des coordonnées tangentielles dans le plan. S'il n'entre qu'une série de ces variables, l'équation obtenue en annulant le contravariant n'est autre que l'équation tangentielle d'une courbe liée d'une manière invariante avec la courbe $f = 0$.

Pour une valeur quelconque de n, A. Clebsch (250) a montré que, en dehors des coordonnées ponctuelles, il existait encore $n - 2$ catégories remarquables de variables jouissant de la propriété de subir, en même temps que les coordonnées ponctuelles, une substitution linéaire; ces variables peuvent être regardées comme les coordonnées de variétés planes $E_1, E_2, \ldots, E_{n-2}$ de E_{n-1} (251). Un contravariant est une fonction contenant une ou plusieurs séries de variables d'une de ces catégories; si le contravariant ne contient qu'une série de ces variables, il représente,

(250) *Abh. Ges. Gött.* (math.) t. 17, 1872; *Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 427.

(251) *Cf.* n° 40.* Ces différentes quantités jouent déjà dans H. Grassmann [*Die lineale Ausdehnungslehre*, (1re éd.), Leipzig, 1844; *Werke*, t. 1¹, Leipzig, 1894] un rôle fondamental.

égalé à zéro, une variété engendrée par des droites, ou plans, etc., qui est en relation projective avec $f=0$.

Les formes mixtes contiennent des séries de variables de différentes catégories. D'après A. Clebsch, toutes ces formes mixtes se déduisent, par des formations polaires, de celles d'entre elles qui ne contiennent qu'une série au plus de variables de chaque catégorie. L'équation obtenue en annulant ces formes représente des variétés que A. Clebsch a désignées d'une manière générale sous le nom de « *connexes* » (252).

Les « combinants » sont des formations invariantes qui se rapportent à un système linéaire de formes du même ordre et qui se reproduisent à un facteur près quand on remplace les formes de base du système par d'autres formes indépendantes du même système. L'équation obtenue en annulant un combinant exprime des propriétés du système linéaire de formes, ou encore représente de nouvelles variétés liées d'une manière invariante au système linéaire.

On considère enfin des « semicombinants » qui se rapportent à des formes d'ordres différents.

47. Interprétation de la théorie des invariants linéaires au moyen de la géométrie affine. — Au lieu de regarder les n variables d'une forme algébrique comme les coordonnées homogènes d'un point de E_{n-1}, on peut les regarder comme les coordonnées cartésiennes d'un point de E_n. On obtient ainsi une interprétation géométrique plus complète de la théorie des formes algébriques. Cette interprétation présente l'avantage de faire intervenir les variables et les coefficients eux-mêmes et non pas simplement leurs rapports ; on considère également la forme f elle-même et non pas simplement l'équation $f=0$. Certaines propriétés qui échappaient à l'interprétation par la géométrie projective, conservent maintenant une signification géométrique. Le groupe linéaire général des n variables devient, dans cette nouvelle interprétation, le plus grand groupe affine qui laisse invariant un point fixe à distance finie (l'origine des coordonnées). Un invariant relatif d'une forme est une quantité qui, par une transformation affine, se reproduit à un facteur constant près, dépendant de la transformation. Toute propriété des formes invariante par les substitutions linéaires est l'expression analytique d'une propriété affine de certaines figures.

(252) Pour le connexe le plus simple, celui du plan, *voir* A. Clebsch, *Nachr. Ges. Gött.*, 18 sept. 1872, p. 429; *Math. Ann.*, t. 6, 1873, p. 203. Il avait déjà été au fond considéré par J. Plücker (*Analytisch-geometrische Entwicklungen*, t. 1, Essen, 1828; t. 2, Essen, 1831; t. 2², § 2).

Cette représentation géométrique a été récemment utilisée dans la théorie des nombres, en particulier dans la théorie arithmétique des formes quadratiques binaires. On peut représenter une forme

$$f \equiv ax^2 + bxy + cy^2$$

à variables entières, par un « réseau de points » (ensemble des points à coordonnées entières) et la conique ayant pour équation $f=1$ (253). Deux formes sont « équivalentes » si les deux figures correspondantes, formées chacune du réseau de points et d'une conique, sont équivalentes au point de vue de la géométrie affine. On peut encore rapporter les deux formes au même réseau de points, elles sont alors équivalentes si l'on peut passer de l'une des coniques à l'autre par une transformation affine laissant ce réseau de points invariant, c'est-à-dire par une transformation du groupe fondamental de la géométrie affine du réseau de points considéré (254).

48. Calcul géométrique. Géométrie intrinsèque. — Leibniz avait eu l'idée d'une analyse opérant directement sur les êtres géométriques eux-mêmes sans recourir à l'intermédiaire artificiel de coordonnées, comme dans la géométrie analytique ordinaire. Cette idée n'avait pas été comprise de ses contemporains et fut longtemps oubliée. Au XIXᵉ siècle elle fut reprise par A. F. Möbius et H. Grassmann ; le calcul barycentrique (1827) du premier et le calcul extensif (Ausdehnungslehre) (1844) du second furent des tentatives de la réaliser. Ces tentatives furent heureuses jusqu'à un certain point, mais échouèrent finalement parce que leurs auteurs avaient l'ambition de faire servir un calcul unique à tous les domaines de la géométrie. On se rend compte aujourd'hui que cela n'est pas possible et qu'à *des géométries à groupes fondamentaux différents doivent être adaptés des calculs géométriques différents*. Le calcul barycentrique de A. F. Möbius, le calcul extensif (extérieur) de H. Grassmann sont appropriés à la géométrie affine.

D'une manière générale un calcul géométrique opérant directement

(253) F. Klein, *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie* (autographiés), Göttingue, 1896 ; *voir* en partic. t. 1, p. 86 et suiv.

(254) Cette géométrie a pour groupe fondamental le groupe des substitutions linéaires à coefficients entiers, dont le déterminant est égal à ± 1. H. Minkowski (*Geometrie der Zahlen*, Leipzig, 1896) fait un usage systématique des réseaux de points dans l'espace à n dimensions pour démontrer géométriquement des théorèmes sur les volumes de certains corps qui ne sont nulle part concaves ; il en fait des applications arithmétiques aux systèmes de n formes linéaires à n variables, et à la réduction des formes quadratiques positives à n variables.

sur les êtres géométriques devra, pour être approprié à une géométrie donnée, jouir de la propriété que ses opérations (addition, multiplications, etc.) aient une définition invariante vis-à-vis des transformations du groupe fondamental de cette géométrie.* Il en est ainsi par exemple du calcul des quaternions d'Hamilton vis-à-vis du groupe des rotations autour d'un point fixe; cela explique les services que peut rendre ce calcul dans beaucoup de problèmes de géométrie et de physique mathématique où intervient ce groupe : dans ce calcul une rotation autour de l'origine est représentée par la formule simple

$$x' = a^{-1}xa.$$

*Le calcul des biquaternions, où un biquaternion est représenté par l'ensemble d'un nombre dual et d'un *rayon* de l'espace E_3, est également approprié à la géométrie euclidienne de cet espace, du moins lorsqu'on le regarde comme engendré par des rayons.*

On pourrait donc se proposer de créer un algorithme approprié à chaque groupe. Le problème ainsi formulé, même en tenant compte de la condition énoncée plus haut, est assez imprécis. On peut tout au moins se proposer, si l'on ne veut pas créer un calcul géométrique proprement dit et si l'on consent à faire usage de coordonnées, d'éviter le plus possible l'emploi d'éléments analytiques étrangers à la figure considérée, autrement dit de ne raisonner autant que possible que sur les *invariants*. On arrive ainsi à des algorithmes *reposant sur la considération exclusive des invariants*. A chaque groupe correspond ainsi ce qu'on appelle une *géométrie intrinsèque* ([255]) ou *géométrie naturelle*. La formation de ces algorithmes peut présenter de sérieuses difficultés de sorte que les avantages qu'on en doit théoriquement retirer peuvent être compensés et au-delà par les inconvénients; néanmoins l'emploi de ces algorithmes est de nature à faire pénétrer plus profondément dans la structure intime de la géométrie considérée.

49. La géométrie métrique intrinsèque. — La *trigonométrie plane* fournit pour la géométrie euclidienne plane un algorithme dans lequel n'interviennent que les invariants relatifs et absolus des figures que l'on considère, à savoir les longueurs des côtés et les angles avec leurs fonctions trigonométriques. La trigonométrie élémentaire du triangle peut être regardée comme l'étude des relations rationnelles entières existant

([255]) Le nom est dû à E. Cesaro, *Lezioni di geometria intrinseca*, Naples, 1896; trad. allem. de G. Kowalewski, Leipzig, 1901.

entre les trois côtés, les sinus et les cosinus des trois angles du triangle. Ces relations doivent être homogènes par rapport aux côtés, qui sont des invariants relatifs. La *trigonométrie sphérique* joue un rôle analogue vis-à-vis du groupe des rotations de E_3 autour d'un point fixe; les côtés sont ici des invariants absolus ([256]).

E. Study ([257]) s'est proposé d'édifier une théorie plus complète embrassant toute la géométrie métrique. Il considère une forme algébrique ternaire quelconque $F(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3)$ dans laquelle x_1, x_2, x_3 désignent les coordonnées homogènes d'un point et u_1, u_2, u_3 les coordonnées homogènes d'une droite du plan. Il appelle *invariant de mouvement* entier une fonction rationnelle, entière, homogène des coefficients de la forme jouissant de la propriété de se reproduire par un déplacement simultané quelconque du point (x) et de la droite (u), à un facteur près ne dépendant que ce déplacement. Le problème de la recherche d'un système de fonctions de cette espèce au moyen desquelles toutes les autres puissent s'exprimer d'une manière rationnelle et entière, n'est pas susceptible d'une solution générale. Mais on peut restreindre de la manière suivante l'énoncé du problème tout en lui conservant une portée suffisamment générale : déterminer les invariants de mouvement d'un système de formes linéaires (c'est-à-dire de points et de droites) et établir les relations qui les lient. Parmi les invariants particuliers en fonction desquels tous les autres peuvent se représenter symboliquement, certains présentent un très grand intérêt : ce sont ceux que E. Study appelle les invariants fondamentaux; quand les formes sont réelles, ils fournissent tous les invariants réels. Ce sont des fonctions entières et rationnelles de certains invariants fondamentaux élémentaires, qui sont des invariants simultanés projectifs des formes données et de deux autres formes, une linéaire et une quadratique ([258]); il en existe huit types avec 32 relations.

([256]) Pour l'étude systématique de la trigonométrie plane et sphérique du point de vue précédent, *voir* la conclusion d'un Mémoire de E. Study [*Abh. Ges. Lpz.* (math.), t. 33, 1893, p. 81]. *Voir* aussi, en ce qui concerne la trigonométrie sphérique, F. Klein, *Über die hypergeometrische Funktion* (autographié), Göttingue, 1894 (II A, chap. II). W. F. Meyer a donné un exposé élémentaire, reposant sur la théorie moderne des résultants, des identités qui existent entre les premiers membres des formules de la trigonométrie plane et sphérique [*Jahresb. deutch. Math.-Ver.*, t. 7[1], 1898, (éd. 1899) ou t. 8[1], 1899, p. 147; exposé plus détaillé, *J. Reine Angew. Math.*, t. 115, 1899, p. 209].

([257]) *Ber. Ges. Lpz.*, t. 48, 1896, p. 649. Ces recherches s'étendent à tous les groupes réels projectifs qui contiennent le groupe des déplacements comme sous-groupe. Pour l'espace E_3, voir *Geometrie der Dynamen*, p. 140, § 17.

([258]) Ces deux autres formes sont celles qui déterminent les deux points cycliques. Les invariants de ce système prolongé vis-à-vis du groupe projectif général ne peuvent

Les quantités dont on s'occupe de préférence en géométrie élémentaire sont les invariants absolus qui sont des quotients d'invariants de mouvement. E. Study montre par exemple comment la distance de deux points, la distance d'un point à une droite, les fonctions trigonométriques de l'angle de deux droites, la surface du triangle déterminé par trois points ou trois droites, etc. peuvent s'exprimer au moyen des invariants de mouvement. Les relations identiques qui existent entre les invariants de mouvement conduisent ainsi à des théorèmes de géométrie élémentaire, dont les uns sont connus et fréquemment utilisés, mais dont certains autres n'ont pas encore été remarqués. La géométrie élémentaire peut à ce point de vue être regardée comme l'étude d'un système de modules, formé des premiers membres des relations identiques entre les invariants de mouvement.

50. Le rapport anharmonique et ses généralisations en géométrie projective. — La théorie des invariants des formes algébriques est à la base de la géométrie projective, traitée d'une manière intrinsèque; les relations entre les différents invariants fournissent les différents théorèmes de cette géométrie. Bien que cette théorie ait été poussée assez loin, il n'existe pas encore de recherches satisfaisantes tendant à une systématisation de la géométrie projective en tant que géométrie intrinsèque.

Dans la géométrie projective de la droite, le rapport anharmonique de quatre points est le seul invariant absolu fondamental. De ce fait la géométrie projective intrinsèque de la droite ne devrait faire intervenir dans les raisonnements et les calculs que des rapports anharmoniques ([259]).

E. Study ([260]) a étendu cette notion de rapport anharmonique en donnant ce nom à une série d'expressions qui peuvent se ramener de plusieurs manières à des rapports anharmoniques de quatre éléments d'un domaine linéaire; chacune de ces expressions est l'invariant absolu le plus simple d'un certain groupe de transformations qui est de son côté complètement défini par cette expression. On peut introduire des rapports anharmoniques généralisés de cette nature dans les cas suivants :

pas être obtenus par l'application de la théorie générale des invariants des formes ternaires, parce que les deux dernières formes n'ont pas des coefficients indépendants entre eux. Seuls certains invariants de mouvement, les invariants élémentaires, sont ournis par la théorie générale.

([259]) Les coordonnées projectives non homogènes sont bien des rapports anharmoniques, mais ils dépendent du choix des systèmes (arbitraires) de référence.

([260]) *Ber. Ges. Lpz.* (math.), t. 48, 1896, p. 199.

1° Dans la géométrie projective d'une quadrique, la figure formée de quatre points différents de la quadrique fondamentale comporte deux rapports anharmoniques bien déterminés, tant que deux quelconques des quatre points ne sont pas situés sur une même génératrice de la surface ([261]). Si la quadrique est un cône, il faut distinguer les deux cas où les quatre points sont ou non dans un même plan;

2° Dans la géométrie projective de l'espace, la figure formée par quatre droites comporte aussi en général deux rapports anharmoniques ([262]);

3° Dans la géométrie conforme, la figure formée par quatre points de l'espace comporte également deux rapports anharmoniques, tant que deux quelconques de ces quatre points ne sont pas sur une même droite minima;

4° Dans la géométrie des sphères orientées de S. Lie, la figure formée par quatre sphères orientées, comporte en général deux rapports anharmoniques.

51. Les invariants de la géométrie projective d'une quadrique. Le problème d'Apollonius dans la géométrie des rayons vecteurs réciproques. — E. Study ([263]) a développé la théorie des invariants de la géométrie projective d'une quadrique de E_{n-1}. Un système d'un nombre quelconque de formes linéaires admet deux types d'invariants entiers irréductibles : un type symétrique qui se rapporte à deux formes, et un type alterné se rapportant à n formes. Il existe entre ces invariants des relations que E. Study ramène à deux types. Il a donné quelques indications sur la manière de résoudre certains problèmes à l'aide des invariants du groupe fondamental; par exemple on peut déterminer dans l'espace tous les complexes de droites qui dépendent rationnellement d'un complexe de droites quadratique et sont en relation invariante avec lui; il en est de même des complexes de sphères covariants d'un complexe quadratique de sphères orientées.

Le problème d'Apollonius : « Construire un cercle tangent à trois

([261]) Les formules de E. Study coïncident en partie avec celles que L. Wedekind a données pour quatre points d'une quadrique réelle non réglée (*Math. Ann.*, t. 9, 1876, p. 209; t. 17, 1880, p. 1). La notion du rapport anharmonique de quatre points d'une sphère se trouve du reste dans les Mémoires déja signalés [notes ([71]) et ([220])] de A. F. Möbius.

([262]) *Cf.* H. Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre* (1re éd.), Leipzig, 1844, § 165; *Werke*, publ. par F. Engel, t. 1[1], Leipzig, 1884, p. 271. *Cf.* aussi : *Id.*, p. 409 une note de E. Study.

([263]) *Ber. Ges. Lpz.*, t. 49, 1897, p. 443.

cercles donnés » peut être regardé comme un problème de la géométrie des rayons vecteurs réciproques du plan, géométrie équivalente à la géométrie projective d'une quadrique non réglée de E_3. E. Study ([264]) a donné de ce problème une solution qui ne fait intervenir que des invariants du groupe fondamental, et qui s'applique par suite à tous les problèmes équivalents vis-à-vis de ce groupe.

Le problème peut être algébriquement formulé de la manière suivante :

Étant données les équations de trois cercles $\Phi_i(z) = 0$ (en coordonnées tétracycliques), *trouver un covariant irrationnel des formes linéaires* $\Phi_i(x)$, *jouissant de la propriété que ses différentes valeurs égalées à zéro fournissent les équations des cercles tangents aux trois cercles donnés* ([265]).

La *construction* fournie par la solution de E. Study peut être rapprochée des constructions de L. Mascheroni ([266]) en ce sens qu'elle ne fait intervenir que des cercles. Mais elle s'en distingue essentiellement par cette particularité qu'elle n'utilise pas les centres de ces cercles, ces centres n'étant pas liés d'une manière invariante aux cercles eux-mêmes. Le compas est d'ailleurs remplacé par un autre instrument (*biegsames Kreislineal*).

E. Study distingue en outre entre les constructions linéaires et les constructions quadratiques.

Les constructions linéaires reposent sur les postulats suivants :

1° On peut tracer le cercle qui passe par trois points donnés ;

2° Quand deux cercles ont en commun un point connu, l'autre point commun est connu rationnellement.

Il résulte de là qu'on peut par des constructions linéaires construire l'inversion qui admet pour cercle double le cercle déterminé par trois points donnés. On peut aussi construire un faisceau de cercles connaissant les inversions qui admettent pour cercles doubles deux des cercles du faisceau, même si ces cercles ne se coupent pas.

Les problèmes quadratiques reviennent à la recherche des points

([264]) *Math. Ann.*, t. 49, 1897, p. 497.

([265]) C'est d'une manière analogue qu'on peut obtenir les cercles qui coupent quatre autres cercles donnés sous le même angle, en annulant les différentes valeurs d'un covariant irrationnel.

([266]) L. MASCHERONI, *La geometria del compasso*, Pavie, 1797; (nouv. éd.) publ. par G. Fazzari, Palermo, 1903; trad. allem. par G. GRUSON, Berlin, 1825; trad. franç. par CARETTE, 1828.

d'intersection de deux cercles. On peut d'ailleurs par des constructions linéaires se ramener au cas de deux cercles orthogonaux dont l'un est connu par trois points.

Le problème d'Apollonius, dans la géométrie des rayons vecteurs réciproques, s'énonce alors de la manière suivante : Étant donnés trois cercles, trouver, par des constructions linéaires et des constructions quadratiques aussi peu nombreuses que possible, les cercles tangents à ces trois cercles.

Les mêmes constructions s'appliquent au problème d'Apollonius sur une sphère.

52. Applications de la théorie des diviseurs élémentaires à certains problèmes d'équivalence géométrique. — La théorie des diviseurs élémentaires permet dans certains cas de résoudre d'une manière simple et complète des problèmes de classification dans les géométries projectives ou équivalentes à des géométries projectives ([267]).

La théorie des diviseurs élémentaires s'est introduite en mathématiques à l'occasion du problème suivant : « Réduire par une transformation linéaire deux formes quadratiques f et φ de n variables à une forme canonique simple ». Le déterminant de la forme quadratique $\lambda f + \mu\varphi$ joue dans la résolution de ce problème un rôle important. S'il n'est pas identiquement nul et s'il se décompose en un produit de n facteurs linéaires différents, les deux formes peuvent être réduites simultanément à des combinaisons linéaires à coefficients constants des carrés de n formes linéairement indépendantes ([268]). S'il n'en est pas ainsi, on doit distinguer une série de cas, suivant la manière dont chaque facteur multiple du déterminant entre dans les mineurs des différents ordres.

C'est K. Weierstrass qui donna le premier la solution complète du problème dans son Mémoire sur les faisceaux de formes bilinéaires et quadratiques ([269]) et cette solution s'appliquait également aux formes bilinéaires. Soit $\lambda a + \mu b$ un facteur linéaire du déterminant D de la forme $\lambda f + \mu\varphi$, et $l_\rho (\rho > 0)$ l'exposant de la plus haute puissance à laquelle ce facteur entre dans tous les mineurs de degré ρ

([267]) *Cf.* P. MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Leipzig, 1895.

([268]) A. L. CAUCHY, *Exercices de math.*, t. 4, 1829, p. 140; *Œuvres*, (2), t. 9, Paris, 1891, p. 174; C. G. J. JACOBI, *J. Reine Angew. Math.*, t. 12, 1834, p. 1; *Werke*, t. 3, Berlin, 1884, p. 191.

([269]) *Monatsh. Akad. Berlin*, 1868, p. 310; *Werke*, t. 2, Berlin, 1895, p. 19; K. Weierstrass s'était occupé auparavant de la question, sans arriver à une solution complète (*Monatsh. Akad. Berlin*,, 1858, p. 208; *Werke*, t. 1, Berlin, 1894, p. 233).

de $D(\rho = n, n-1, \ldots, n-h+1)$. Toutes les différences

$$e_\rho = l_\rho - l_{\rho-1}$$

sont positives ; de plus si l'on pose

$$e_{n-h+1} = l_{n-h+1},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} D &= (\lambda a + \mu b)^{l_n} (\lambda' a + \mu' b)^{l'_n} \ldots \\ &= (\lambda a + \mu b)^{e_n} (\lambda a + \mu b)^{e_{n-1}} \ldots (\lambda a + \mu b)^{e_{n-h+1}} \\ &\quad \times (\lambda' a + \mu' b)^{e'_n} \ldots (\lambda' a + \mu' b)^{e'_{n-h'+1}} \ldots . \end{aligned}$$

Chacun des facteurs dans lesquels D est finalement décomposé s'appelle un diviseur élémentaire de ce déterminant. C'est un invariant (en général irrationnel) des deux formes f et φ.

Pour que deux couples de formes soient réductibles l'un à l'autre par une transformation linéaire, c'est-à-dire soient équivalents, il faut et il suffit que les déterminants des deux faisceaux correspondants aient les mêmes diviseurs élémentaires. Les coefficients des formes canoniques auxquelles peuvent se réduire deux formes données sont les constantes qui entrent dans les diviseurs élémentaires, c'est-à-dire les invariants simultanés relatifs des deux formes ([270]).

C. Segre ([271]) a revêtu d'une forme géométrique la théorie précédente en montrant qu'elle revenait à rechercher : 1° combien dans le faisceau $\lambda f + \mu\varphi$ il y a de formes dont le déterminant est nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à un ordre donné ; 2° quelle position ces formes occupent dans le faisceau, c'est-à-dire quels sont les rapports anharmoniques de deux quelconques d'entre elles avec f et φ ; ces rapports anharmoniques sont des invariants absolus égaux aux rapports des coefficients des formes canoniques de K. Weierstrass.

Comme application remarquable de cette théorie citons la classification systématique des complexes de droites du second degré, commencée par F. Klein dans sa dissertation ([272]), continuée et achevée par A. Weiler ([273]) et C. Segre ([274]).

([270]) Pour des indications bibliographiques plus complètes, *voir* I B 2, MEYER, Invariants, n° 3.

([271]) *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [*Memorie Accad. Torino*, (2), t. 36, 1884.

([272]) F. KLEIN, *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form*, Diss. Bonn, 1868 ; reprod. *Math. Ann.*, t. 23, 1884, p. 539.

([273]) *Math. Ann.*, t. 7, 1874, p. 145.

([274]) *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* [*Memorie Accad. Torino*, (2), t. 36, 1884].

Ce dernier géomètre ([275]) a fait une autre application de la théorie des diviseurs élémentaires à la classification des transformations homographiques de E_n ; il considère pour cela les deux formes bilinéaires par rapport aux coordonnées ponctuelles d'un point (x) et aux coordonnées tangentielles d'un plan (u), dont l'une définit analytiquement la transformation et dont l'autre exprime, quand on l'égale à zéro, que le plan (u) contient le point (x).

L. Kronecker et G. Frobenius ([276]) ont appliqué la théorie de K. Weierstrass à l'étude des transformations linéaires qui laissent invariante une forme quadratique, ou une forme bilinéaire, symétrique ou alternée. C. Segre a utilisé les résultats obtenus dans le cas de la forme quadratique

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23},$$

qui s'annule identiquement pour les coordonnées plückériennes de la droite; il en a déduit une classification des transformations homographiques et corrélatives de l'espace ([277]).

C. Segre a également ramené à un problème sur les diviseurs élémentaires la classification des surfaces du quatrième ordre à conique double, en regardant ces surfaces comme des projections de l'intersection de deux M_3^2 de l'espace E_4 ; leur classification revient à celle des faisceaux de M_3^2 de E_4 ([278]). Dans le cas où la conique double est le cercle imaginaire à l'infini, la surface est une « cyclide ». G. Loria ([279]), en considérant une cyclide comme l'intersection d'un complexe quadratique de sphères et du complexe quadratique des sphères de rayon nul, a pu également effectuer la classification complète des cyclides dans la géométrie conforme en la ramenant à celle d'un faisceau de formes quadratiques. Cette classification embrasse aussi les cyclides du troisième ordre.

Tous ces problèmes n'étaient pas nouveaux, mais c'est la théorie des diviseurs élémentaires qui a permis de les résoudre complètement.

([275]) C. SEGRE, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [*Atti R. Accad. Lincei*, *Memorie mat.*, (3), t. 19, 1884]. *Cf.* aussi : MUTH ([267]) où l'étude de Segre est reproduite légèrement modifiée.

([276]) *Voir* pour les indications bibliographiques l'article I B 2, p. 332/3.

([277]) C. SEGRE, *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale* [*Memorie Accad. Torino*, (2), t. 37, 1885, mém. n° 10].

([278]) C. SEGRE, *Math. Ann.*, t. 24, 1884, p. 313.

([279]) *Ricerche intorno alla geometria della sfera*, etc. (*Torino mem.*, (2), t. 36, 1884. Sur les applications de cette théorie à la physique mathématique, *voir* M. BÔCHER, *Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie*, Leipzig, 1894.

53. La géométrie différentielle intrinsèque. — On peut étendre à la géométrie différentielle la méthode qui consiste à ne raisonner et n'opérer que sur des invariants; mais ici ce sont les invariants différentiels qui entreront en considération. En particulier à ce point de vue les courbes et les surfaces seront définies par des relations entre des grandeurs indépendantes de tout système de coordonnées et liées d'une manière invariante aux points des courbes et des surfaces considérées; ces quantités seront des invariants différentiels du groupe fondamental de la géométrie. En géométrie euclidienne ce seront des longueurs d'arcs, des rayons de courbure, des rayons de torsion, des angles de tangentes, etc.; quelques auteurs donnent à ces quantités le nom de « coordonnées naturelles »; les équations qui relient ces quantités ont reçu de W. Lewell (280) le nom d'équations intrinsèques. Dans le plan une courbe est représentée en coordonnées naturelles par une relation entre le rayon de courbure et sa dérivée par rapport à l'arc. Au même ordre d'idées appartiennent les recherches de E. Cesàro (281), qui fait un usage systématique des coordonnées naturelles pour l'étude des propriétés infinitésimales des courbes et des surfaces. E. Wölffing (282) a publié une étude d'ensemble de toute la théorie des coordonnées naturelles (283).

*Lorsqu'on fait choix d'un système de coordonnées, les équations intrinsèques d'une multiplicité M_p dans un espace E_n forment un système différentiel *automorphe*, dont la solution générale se déduit d'une solution particulière par les différentes transformations du groupe fondamental de la géométrie considérée. L'intégration de ce système revient à celle d'un système de Lie qui peut être ramené à des types simples, dépendant de la structure du groupe. C'est ainsi que si le groupe est isomorphe au groupe projectif de la droite (groupe de la géométrie non-euclidienne du plan), la détermination des variétés définies par des équations intrinsèques données se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati. Si le groupe est fini, on peut toujours se ramener à l'intégration d'équations linéaires.*

(280) *Trans. Camb. Phil. Soc.*, t. 8, 1842/9, (éd. 1849), p. 659; t. 9, part I, 1849/50 (éd. 1851), ou bien part II, 1850/1, ou bien part III 1851/3, p. 150.

(281) *Lezioni di geometria intrinseca* (251). Les recherches antérieures de E. Cesàro sont indiquées par E. Wölffing (273).

(282) *Bibl. math.*, (3), t. 1, 1900, p. 142. L'auteur considère, comme intermédiaires entre les coordonnées ordinaires et les coordonnées naturelles, les coordonnées *semi-naturelles* qui sont des invariants de certains sous-groupes du groupe des déplacements.

(283) *E. Study (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 10, 1909, p. 1; t. 11, 1910, p. 249) a exposé une théorie nouvelle des coordonnées naturelles; il s'occupe en particulier dans le second Mémoire des équations naturelles des courbes analytiques de l'espace euclidien et de la détermination d'une courbe donnée par son équation naturelle.*

54. La méthode du trièdre mobile et sa généralisation. — On doit à G. Darboux (284) une méthode qui se rattache aux précédentes, tout en les dépassant. Appliquée par son créateur à l'étude des courbes et des surfaces dans la géométrie différentielle euclidienne, elle a été généralisée par Demoulin à la géométrie elliptique et à la géométrie conforme et elle peut l'être à toutes les géométries. G. Darboux fait correspondre à chaque point de la courbe à étudier un trièdre de référence (mobile) dont l'origine est le point considéré de la courbe, l'un des axes la tangente à la courbe, le second axe la normale principale et le troisième la binormale. Les composantes du mouvement instantané de ce trièdre quand le point décrit la courbe avec une vitesse égale à l'unité sont évidemment des quantités invariantes vis-à-vis du groupe des déplacements euclidiens; ce sont les invariants différentiels fondamentaux de la courbe, sa courbure et sa torsion. Les équations intrinsèque de la courbe sont celles qui expriment ces deux quantités en fonction de l'arc. La méthode du trièdre mobile fournit, outre les équations intrinsèques, certains vecteurs liés d'une manière invariante à la courbe (tangente, normale principale, binormale). L'étude des surfaces se fait d'une manière analogue. La méthode s'étend aussi avec des modifications appropriées, à l'étude des courbes minima et des courbes situées dans un plan isotrope (285).

Demoulin a substitué au trièdre mobile dans la géométrie elliptique un tétraèdre mobile (286), dans la géométrie conforme, une figure de référence mobile formée de cinq sphères orthogonales (287). E. J. Wilczinski (288) considère de même, en géométrie projective, un tétraèdre adjoint à chaque point d'une courbe gauche.

D'une manière générale, étant donnée une géométrie dont le groupe fondamental est fini, on considérera une figure particulière (F_0) qui ne soit invariante par aucune transformation du groupe autre que la transformation identique et les figures (F) qu'on en déduit par les transformations du groupe. Ces figures (figures de référence) dépendent d'autant

(284) **Leçons sur la théorie générale des surfaces*, en partic. t. 1, Paris, 1887, p. 1/74 (livre I, chap. I à VII).*

(285) E. Vessiot, *C. R. Acad. Sc.*, t. 140, 1905, p. 1381. *Cf.* sur les courbes minima, E. Study, *Amer. J. Math.*, t. 32, 1910, p. 264.*

(286) **C. R. Acad. Sc.*, t. 139, 1904, p. 393.*

(287) **C. R. Acad. Sc.*, t. 140, 1905, p. 1526.*

(288) **Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 6, 1905, p. 99; *voir* aussi note (231).*

de paramètres qu'il y a d'unités dans l'ordre du groupe et elles sont échangées entre elles par un groupe simplement transitif ([289]) (le groupe des paramètres). Lorsqu'on voudra étudier les propriétés infinitésimales d'une variété, on fera correspondre à chaque point de cette variété une figure de référence dont on particularisera les paramètres* de manière à laisser le moins d'arbitraire possible dans l'opération qui fait passer de cette figure de référence aux figures infiniment voisines ([290]). On arrive ainsi à ne conserver que des quantités liées d'une manière invariante à la variété, mais parmi ces quantités figurent non seulement les invariants différentiels ordinaires, mais encore les expressions différentielles invariantes (comme le ds^2 d'une surface), et aussi certaines figures covariantes ([291]).

Dans le cas de la géométrie affine de E_n avec un point fixe O, on pourra prendre pour figure de référence un système de n vecteurs issus de O; pour l'étude d'une variété, la figure de référence associée à chaque point de cette variété aura par exemple un de ses vecteurs limité à ce point. Dans le cas de la géométrie affine de E_n avec un point fixe O et conservation des volumes, les n vecteurs issus de O qui constituent la figure de référence mobile seront les arêtes d'un polyèdre à faces parallèles de volume égal à l'unité. Cette figure de référence pourra servir pour l'étude de la géométrie projective de E_{n-1}.

On pourra enfin combiner la méthode du trièdre mobile ainsi généralisée avec un procédé de calcul géométrique; par exemple en

([289]) *Le procédé qui consiste à caractériser chaque transformation du groupe par une figure de référence est à rapprocher de celui qui est usité dans la théorie des groupes discontinus fuchsiens, où chaque opération du groupe est caractérisée par un polygone (curviligne) du plan.*

([290]) *E. Cotton, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 33, 1905, p. 1; E. Cartan, *Bull. Sc. Math.*, (2), t. 34, 1910, p. 250 (applic. p. 266).

Voir aussi : G. Pick, *Sitzgsb. Akad. Wien*, t. 115, IIa, 1906, p. 139.

([291]) *Chaque figure de référence associée à un point de la variété qu'on étudie définit un système de coordonnées [coordonnées mobiles, d'après E. Cartan ([290]), coordonnées covariantes d'après G. Pick ([290])]. Les coordonnées mobiles d'un point fixe arbitraire sont données par un système d'équations différentielles de S. Lie (*Identitätsbedingungen* de G. Pick) dans lequel n'interviennent que les invariants différentiels de la variété, et dont l'intégration déterminerait cette variété en supposant connus les seuls invariants différentiels. Pour les applications, *voir* E. J. Wilczinsky ([288]) qui étudie les invariants différentiels projectifs des courbes gauches de l'espace, G. Pick ([290]) qui étudie ceux des courbes planes, E. Cartan ([290]) qui étudie les invariants différentiels métriques des surfaces et particulièrement des surfaces réglées à génératrices isotropes; G. Kowalewski (*Sitzgsb. Akad. Wien*, t. 120, IIa, 1911, p. 531) qui étend en particulier les formules de Frenet-Serret à la géométrie projective d'une quadrique; D. Stransky (*Sitzgsb. Akad. Wien*, t. 121, IIa, 1912, p. 813) qui étudie la géométrie infinitésimale des courbes dans l'espace elliptique.*

géométrie projective on pourra utiliser le calcul barycentrique ou le calcul extensif de H. Grassmann. Le déplacement infiniment petit de la figure de référence formée de n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ sera donné par des formules

$$dA_1 = \omega_{11} A_1 + \omega_{12} A_2 + \dots + \omega_{1n} A_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$dA_n = \omega_{n1} A_1 + \omega_{n2} A_2 + \dots + \omega_{nn} A_n,$$

où les ω_{ik} sont des expressions de Pfaff formées avec les paramètres du groupe projectif et leurs différentielles, et où l'on a

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \dots + \omega_{nn} = 0 \quad ([292]).$$

Quand on aura particularisé le plus possible la figure de référence associée à chaque point de la variété, les expressions ω_{ik} seront des combinaisons linéaires d'un certain nombre d'entre elles indépendantes, et les coefficients de ces combinaisons seront les invariants différentiels fondamentaux de la variété.

Une méthode analogue peut être appliquée aux géométries dont le groupe fondamental est infini ([293]).*

([292]) *Les expressions de Pfaff ω_{ik} qui s'introduisent sont celles qui servent à définir la structure du groupe d'après E. Cartan. Aussi la classification des variétés, dans la théorie généralisée du trièdre mobile, dépend *essentiellement* de la structure du groupe.*

([293]) *E. Cartan ([290]), p. 283, § 11.*

Imprimerie de la Manutention – Septembre 1991 – N° 286-91
Dépôt légal : Septembre 1991

Camille JORDAN
- ▭ *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 tomes)*
- *Traité des substitutions et des équations algébriques*

Stephen C. KLEENE
- *Logique mathématique*

Joseph-Louis LAGRANGE
- *Mécanique analytique*

Trajan LALESCO
- *La géométrie du triangle*

Henri LEBESGUE
- *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*
- *Les coniques*
- *Leçons sur les constructions géométriques*

C. LEBOSSÉ & C. HÉMERY
- *Géométrie (classe de Mathématiques)*

Tullio LEVI-CIVITA
- *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*

Alexandre LIAPOUNOFF
- *Problème général de la stabilité du mouvement*

André LICHNEROWICZ
- *Éléments de calcul tensoriel*

Ernst LINDELÖF
- *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*

Édouard LUCAS
- ▭ *Théorie des nombres*

Ernst MACH
- *La Mécanique*

James Clerk MAXWELL
- *Traité d'Électricité et de Magnétisme (2 tomes)*

Émile MEYERSON
- *La déduction relativiste*

Gaspard MONGE
- *Géométrie descriptive*
- *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*

John von NEUMANN
- *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

Isaac NEWTON
- *Principes mathématiques de la philosophie naturelle (2 tomes)*

Julius PETERSEN
- *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*

Émile PICARD
- ▭ *Traité d'Analyse (3 tomes)*
- *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*
- *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*
- *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*
- *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*

Johann Christian POGGENDORFF
- *Histoire de la physique*

Henri POINCARÉ
- *Calcul des probabilités*
- *La Mécanique nouvelle (Théorie de la Relativité)*
- *Théorie du potentiel newtonien*
- *Théorie des tourbillons*
- *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
- *Électricité et Optique*
- *Théorie mathématique de la lumière*

George POLYA
- *Comment poser et résoudre un problème*

Alfred RÉNYI
- *Calcul des probabilités*

Bernhard RIEMANN
- *Œuvres mathématiques*

F. RIESZ & B. SZ.-NAGY
- *Leçons d'analyse fonctionnelle*

Erwin SCHRÖDINGER
- *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

Joseph-Alfred SERRET
- *Cours d'Algèbre supérieure (2 tomes)*

Paul TANNERY
- *Pour l'histoire de la science hellène*
- *La géométrie grecque*

François-Félix TISSERAND
- *Traité de Mécanique céleste* suivi de *Leçons sur la détermination des orbites (4 tomes)*

Georges VALIRON
- *Équations fonctionnelles - Applications*

Vito VOLTERRA
- *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY
151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS
Tél. (1) 43 54 64 64 - Fax : (1) 43 54 87 00

▭ = ▭blong®

ÉDITIONS JACQUES GABAY

RÉIMPRESSIONS

Niels Henrik ABEL
- *Œuvres complètes (2 tomes)*
suivies de :
— *Niels Henrik Abel - Tableau de sa vie et de son action scientifique* par C.-A. BJERKNES

Jean D'ALEMBERT
- *Traité de dynamique*

André-Marie AMPÈRE
- *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques*

Paul APPELL
- *Traité de Mécanique rationnelle (5 tomes)*

Paul BARBARIN
- *La Géométrie non euclidienne*

Ludwig BOLTZMANN
- *Leçons sur la théorie des gaz*

Émile BOREL
- *Leçons sur les séries divergentes*

Émile BOREL & André CHÉRON
- ▭ *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous*
suivie de :
– *Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard,* par Émile BOREL & Jean VILLE
– *Valeur pratique et philosophie des probabilités* par Émile BOREL

Pierre BOUTROUX
- *L'idéal scientifique des mathématiciens*

Léon BRILLOUIN
- *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*
- *La science et la théorie de l'information*

Louis de BROGLIE
- *Ondes et mouvements*

ISBN 2-87647-110-8
ISSN 0989-0602

Georg CANTOR
- *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

Sadi CARNOT
- *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

Élie CARTAN
- *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*
- *Leçons sur la géométrie projective complexe*
- *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*
- *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, traitées par la méthode du repère mobile*

Augustin-Louis CAUCHY
- *Analyse algébrique*

Michel CHASLES
- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
- *La dualité et l'homographie*

Rudolph CLAUSIUS
- ▭ *Théorie mécanique de la chaleur*

Gaspard-Gustave CORIOLIS
- *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*
suivie des deux célèbres Mémoires
— *Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines*
— *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*

R. DELTHEIL & D. CAIRE
- *Géométrie* et *Compléments de géométrie*

René DESCARTES
- *La Géométrie*

Paul A.M. DIRAC
- *Les principes de la Mécanique quantique*

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
Tout ce qui a paru de l'édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK.
- ▭ *Arithmétique et Algèbre*
- ▭ *Analyse*
- ▭ *Géométrie*
- ▭ *Mécanique*
- ▭ *Physique*
- ▭ *Géodésie et Topographie*
- ▭ *Astronomie*
- ▭ *Compléments*

F. G.-M.
- ▭ *Exercices de géométrie*
comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2.000 questions résolues
- ▭ *Exercices de géométrie descriptive*

Pierre FERMAT
- *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante*

Joseph FOURIER
- *Théorie analytique de la chaleur*

Maurice FRÉCHET
- *Les espaces abstraits*

Augustin FRESNEL
- *Mémoire sur la diffraction de la lumière*

Évariste GALOIS
- *Œuvres mathématiques*
suivies de :
— *Influence de Galois sur le développement des mathématiques,* par Sophus LIE

Félix R. GANTMACHER
- *Théorie des matrices*

Carl Friedrich GAUSS
- *Recherches arithmétiques*

Édouard GOURSAT
- *Cours d'Analyse mathématique (3 tomes)*

Jacques HADAMARD
- *Leçons de géométrie élémentaire (2 tomes)*

Werner HEISENBERG
- *Les principes physiques de la théorie des quanta*

Hermann von HELMHOLTZ
- *Optique physiologique (2 tomes)*
- *Théorie physiologique de la musique*

David HILBERT
- *Sur les problèmes futurs des mathématiques (Les 23 Problèmes)*

▭ = ▭blong®

(Suite au verso)

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY
151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS
Tél. (1) 43 54 64 64 - Fax : (1) 43 54 87 00

▭blong®